18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Steiner, Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Vier und funfzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1857.
Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhalts-Verzeichnifs des vier und funfzigsten Bandes.

1. Abrifs einer Theorie der höhern Congruenzen in Bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus. Von Herrn *Dedekind* in Göttingen. . . . . Seite 1
2. Beweis für die Irreductibilität der Kreistheilungs-Gleichungen. Von Demselben. . . . . — 27
3. Über die Erzeugnisse krummer projektivischer Gebilde. Von Herrn *H. Schröter* in Breslau. . . . . — 31
4. Mémoire sur la forme canonique des fonctions binaires. Par M. *A. Cayley*. — 48
5. Mathematische Miscellen. Von Herrn *Schellbach*.
   X. Zur Theorie des Additionstheorems der elliptischen Integrale. . . — 59
6. Bemerkungen zu *Jacobi's* Abhandlung über Variationsrechnung. Von Herrn *E. Heine* in Halle. . . . . — 68
7. Die Krümmungslinien der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. Von Herrn *P. Zech* in Stuttgart. . . . . — 72
8. Ueber das Flächenpotential. Von Herrn *W. Scheibner* in Leipzig. . . — 77
9. Darstellung der elliptischen Functionen durch Potenzreihen. Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi*. . . . . — 82
10. Sur les fonctions symétriques des racines des équations. Par M. *Henri Betti* à Florence. . . . . — 98
11. Allgemeine Voraussetzungen und Hülfsmittel für die Untersuchung von Functionen unbeschränkt veränderlicher Gröfsen. Von Herrn *B. Riemann* in Göttingen. . . . . — 101
12. Lehrsätze aus der Analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialien. Von Demselben. . . . . — 105
13. Bestimmung einer Function einer veränderlichen complexen Gröfse durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. Von Demselben. . . . . — 111
14. Theorie der *Abel*'schen Functionen. Von Demselben. . . . . — 115
15. Deuxième note sur une formule pour la réversion des séries. (Pour faire suite à la note t. LII p. 276.) Par M. *Cayley*. . . . . — 156
16. Ueber eine Reihe von Sätzen, die Durchschnitte von Cylindern und Kegeln durch Kugeln betreffend. Von Herrn *R. Baltzer* zu Dresden. . . . . — 162
17. Exposition d'une théorie analytique générale propre à exprimer les lois des divers ordres de phénomènes qui dépendent d'équations linéaires aux différences partielles, tels que ceux des vibrations et de la propagation de la chaleur. Par M. *L. F. Ménabréa* à Turin. . . . . — 170

18. Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes. Par M. *F. Joachimsthal* à Breslau. . . . . Seite 181
19. Zur Theorie der quadratischen Formen. Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn. — 193
20. Über die der Einwirkung der Schwere entzogenen, aber unter dem Einflusse der Erdbewegung rotirenden Körper. — Theorie des Foucault'schen Gyroscops. Von Herrn *Ed. Lottner* zu Lippstadt. . . . . — 197
21. Über die Criterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale. Von Herrn *Otto Hesse* zu Heidelberg. . . . . — 227
22. Propriétés d'un système de courbes algébriques ayant en commun un certain nombre de points. Par M. *Woepcke*. . . . . — 274
23. Integration der linearen Differentialgleichung
$$(a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y = 0.$$
Von Herrn *Spitzer* in Wien. . . . . — 280
24. Note sur un théorème de M. *Brioschi*. Par M. *Faà de Bruno* à Turin. — 283
25. Propriétés de certains systèmes de surfaces du second ordre. Par M. *Woepcke*. . . . . — 285
26. Addition au mémoire sur la forme canonique des fonctions binaires. Par M. *A. Cayley*. . . . . — 292
27. Über eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen. Von Herrn *A. Clebsch*. . . . . Seite 293
28. Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe. Von Herrn *R. Lipschitz*. . . . . — 313
29. Über confokale Kegelschnitte. Von Herrn *S. Cohn*. . . . . — 329
30. Beiträge zur Theorie des Solitär-Spiels. Von Herrn *M. Reifs* zu Frankfurt a. M. . . . . — 344
31. Über die Bewegung eines Punktes auf der Oberfläche eines Ellipsoids. Von Herrn *Schellbach*. . . . . — 381
32. *Lagrange*'s Umkehrungsformel. Von Herrn *E. Heine*. . . . . — 388

1.

Abrifs einer Theorie der höhern Congruenzen in Bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus.

(Von Herrn *Dedekind* in Göttingen.)

Es ist meine Absicht, dem in der Ueberschrift bezeichneten Gegenstande, welcher, von *Gaufs* zuerst angeregt, später mit Erfolg von *Galois, Serret, Schönemann* wieder aufgenommen ist, eine einfache zusammenhängende Darstellung zu widmen, welche sich streng an die Analogie mit den Elementen der Zahlentheorie binden soll. Diese ist in der That so durchgreifend, dafs es mit Ausnahme einiger unserm Gegenstande eigenthümlicher Untersuchungen nur einer Wortänderung in den Beweisen der Zahlentheorie bedarf. Ich folge genau dem Gange, welchen *Dirichlet* in seinen Vorlesungen über die Zahlentheorie (oder in seiner kurzen Darstellung der Theorie der complexen Zahlen im 24sten Bande dieses Journals) eingeschlagen hat. In Rücksicht hierauf wird man es nicht tadeln, dafs ich meist nur die Hauptmomente der Beweise hervorhebe, da gröfsere Ausführlichkeit für den Kenner der Zahlentheorie, welche hier vorausgesetzt wird, ermüdend sein müfste.

Die hier dargestellte Theorie, deren Erweiterungen auf der Hand liegen, ist vielfacher Anwendungen fähig, namentlich auf die Algebra, wie ich in einer spätern Abhandlung zeigen werde; zunächst schien es mir zweckmäfsig, dieselbe ohne alle Einmischung algebraischer Principien abzuhandeln.

Gebiet der Untersuchung; Definitionen und Fundamentalsätze.

1.

Unter einer *Function* einer Variabeln x wird hier immer eine ganze rationale Function von x verstanden, deren Coefficienten reelle ganze Zahlen sind. Es werden die Eigenschaften solcher Functionen untersucht in Bezug auf einen *Modulus,* der eine reelle *Primzahl* p ist. Zwei Functionen A, B heifsen *congruent* in Bezug auf den Modul p, in Zeichen

$$A \equiv B \pmod{p},$$

wenn sämmtliche Coefficienten der nach Potenzen von x geordneten Differenz $A-B$ durch p theilbar sind, oder, was dasselbe sagt, wenn die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x in den beiden Functionen paarweise einander congruent sind in Bezug auf den Modulus p. Es ist daher diese Congruenz nur ein Ausdruck für die ***Identität***

$$A = B + p.C,$$

in welcher C eine beliebige Function bedeutet. Hieraus gehen sogleich die beiden folgenden Sätze hervor:

Man darf in jeder Congruenz zwischen zwei Functionen die Variabeln x durch eine beliebige Function von x ersetzen.

Man darf jede Congruenz beliebig oft nach der Variabeln x differentiiren.

Ebenso leuchten folgende Sätze ein, in welchen der Modulus p unveränderlich beibehalten wird:

Ist $A \equiv A'$, $B \equiv B'$; so ist auch $A \pm B \equiv A' \pm B'$, ferner $AB \equiv A'B'$, ferner $A^n \equiv A'^n$, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet; und allgemein: Sind die beiden Seiten einer Congruenz ganze rationale Functionen (mit ganzen Zahlcoefficienten) von einer Reihe von Functionen A, B, C etc. der Variabeln x, so darf man dieselben (an beliebigen Stellen) durch ihnen resp. congruente Functionen A', B', C' etc. ersetzen.

2.

Der Exponent der höchsten Potenz von x in einer Function, deren Coefficient nicht durch den Modul theilbar ist, heifse der ***Grad*** der Function. Aus dieser Definition, welche für alle Functionen gilt, die nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ sind, ergiebt sich, dafs alle die unendlich vielen einander congruenten Functionen einen und denselben Grad haben. Ist ferner α der Grad von A, β der Grad von B, so ist $\alpha+\beta$ der Grad von AB; denn das Product zweier durch eine Primzahl p nicht theilbaren Zahlen-Coefficienten ist ebenfalls nicht theilbar durch p. Hieraus folgt weiter: Ist $AB \equiv 0 \pmod{p}$, so ist mindestens eine der beiden Functionen A, $B \equiv 0 \pmod{p}$; und ferner: Ist $AB \equiv A'B'$, und $A \equiv A'$ *nicht* $\equiv 0 \pmod{p}$, so ist $B \equiv B' \pmod{p}$; denn es ist $AB \equiv AB'$, oder $A(B-B') \equiv 0 \pmod{p}$. Dieser Satz giebt daher die Bedingung für die Berechtigung zur Division einer Congruenz durch eine andere. Ferner ist leicht zu sehen, dafs die Anzahl der einander nicht congruenten (*incongruenten*) Functionen vom Grade α gleich $(p-1)p^\alpha$ ist; denn der Coefficient von x^α kann $p-1$, der jeder niedrigern Potenz kann p

nach dem Modul p incongruente Werthe haben, und der Coefficient jeder höhern Potenz ist $\equiv 0 \pmod{p}$. Dies Resultat gilt auch für den Fall $\alpha = 0$, insofern bei den Functionen, welche $\equiv 0$ sind, überhaupt von einem Grade keine Rede ist.

3.

Sind A, B, C drei solche Functionen von x, dafs $A \equiv BC \pmod{p}$, so heifsen B, C (oder alle diesen congruente Functionen) ***Divisoren*** oder ***Factoren*** von A (oder jeder mit A congruenten Function) in Bezug auf den Modul p. Gleichbedeutend sind die Ausdrücke: A ist ein ***Multiplum*** von B, C; oder: A ist ***theilbar*** durch B, C. Diese Theilbarkeit nach einem Modulus ist natürlich nicht mit der algebraischen Theilbarkeit zu verwechseln, obwohl aus der letztern stets die erstere folgt. Offenbar kann der Grad eines Divisors B von A nicht höher sein als der Grad von A. Jede Function ist theilbar durch jede der $p-1$ incongruenten Functionen vom Grade Null; denn jede der letztern ist einer durch p nicht theilbaren Zahl a congruent; bestimmt man nun a' so, dafs $aa' \equiv 1 \pmod{p}$, so ist $A \equiv a.a'A$, wo A jede beliebige Function bedeutet. Aufser diesen $p-1$ Functionen vom Grade Null hat keine andere die Eigenschaft, Divisor von jeder beliebigen Function zu sein; denn eine Function, deren Grad höher als Null ist, kann nicht mehr Divisor der Functionen vom Grade Null sein. Man kann deshalb (zufolge der Analogie mit ähnlichen Untersuchungen) diese $p-1$ incongruenten Functionenclassen vom Grade Null ***Einheiten*** nennen.

Man kann jede Function vom Grade α congruent setzen dem Producte aus einer bestimmten Function vom Grade Null und einer Function vom Grade α, in welcher der Coefficient von $x^\alpha \equiv 1 \pmod{p}$ ist (solche Functionen sollen ***primäre*** heifsen); denn ist a der durch p nicht theilbare Coefficient von x^α in A, und $aa' \equiv 1 \pmod{p}$, so ist $A \equiv a.a'A$, worin $a'A$ eine primäre Function ist. — Die Anzahl der incongruenten primären Functionen vom Grade α ist gleich p^α.

Aus der Definition der Multipla ergeben sich unmittelbar die beiden folgenden Sätze: Ist eine Function ein Multiplum von einer zweiten, diese ein Multiplum von einer dritten, diese von einer vierten u. s. w., so ist jede frühere in der Reihe dieser Functionen ein Multiplum von jeder spätern. — Die Summe und die Differenz zweier Multipla von einer Function sind selbst wieder Multipla derselben Function.

4.

Von grofser Bedeutung für die spätern Untersuchungen ist folgende *Aufgabe:* Zu untersuchen, ob zwei gegebene Functionen A, A' nach dem Modul p gemeinschaftliche Divisoren haben.

Zunächst läfst sich zeigen, dafs man stets eine Congruenz von der Form

$$A \equiv QA' + A'' \pmod{p}$$

aufstellen kann, in welcher Q, A'' zwei neue Functionen sind, deren letztere A'' einen niedrigern Grad als A' hat, oder gar $\equiv 0 \pmod{p}$ ist. Denn es sei α der Grad von A, α' der von A'; im Fall nun $\alpha < \alpha'$ ist, braucht man nur $Q \equiv 0$, $A'' \equiv A \pmod{p}$ zu setzen; ist aber $\alpha \geqq \alpha'$, so kann man die Zahl q so bestimmen, dafs $A - qx^{\alpha-\alpha'}.A'$ von niedrigerm Grade α_1 als α ist; ist dann α_1 auch $< \alpha'$, so ist das Ziel schon erreicht, wenn man $Q \equiv qx^{\alpha-\alpha'}$ setzt; ist aber $\alpha_1 \geqq \alpha'$, so verfährt man mit der Function $A - qx^{\alpha-\alpha'}.A'$ ebenso, wie bei dem ersten Schritte mit A, man bestimmt q_1 so, dafs $A - qx^{\alpha-\alpha'}.A' - q_1 x^{\alpha_1-\alpha'}.A'$ von niedrigerm Grade ist als α_1 u. s. f. bis man zu einer Function von niedrigerm Grade als α' gelangt, was nach einer endlichen Anzahl von Operationen geschehen mufs. Man setzt dann

$$Q \equiv qx^{\alpha-\alpha'} + q_1 x^{\alpha_1-\alpha'} + \text{etc.} \pmod{p}$$

und dann ist $A'' \equiv A - QA'$ von niedrigerm Grade als α'. W. Z. B. W.

Aus der so gebildeten Congruenz folgt nun unmittelbar, dafs jeder gemeinschaftliche Divisor von A, A' auch Divisor von A'', und umgekehrt dafs jeder gemeinschaftliche Divisor von A', A'' auch Divisor von A sein mufs. Man braucht daher die Operation nur fortzusetzen und ein System von Congruenzen zu bilden:

$$\left.\begin{aligned} A &\equiv QA' + A'' \\ A' &\equiv Q'A'' + A''' \\ &\cdots\cdots\cdots \\ A^{(\nu-2)} &\equiv Q^{(\nu-2)}A^{(\nu-1)} + A^{(\nu)} \\ A^{(\nu-1)} &\equiv Q^{(\nu-1)}A^{(\nu)} \end{aligned}\right\} \pmod{p}$$

in welchem die Grade α', α'' etc. eine abnehmende Reihe bilden, woraus von selbst folgt, dafs nach einer endlichen Anzahl von Operationen es geschehen mufs, dafs eine Function $A^{(\nu-1)}$ durch die nächstfolgende $A^{(\nu)}$ theilbar ist. Schreitet man von der ersten bis zur letzten Congruenz fort, so ergiebt sich, dafs jeder gemeinschaftliche Divisor von A, A' auch Divisor von $A^{(\nu)}$ sein mufs; verfolgt man den umgekehrten Weg, so ergiebt sich, dafs $A^{(\nu)}$ Divisor

aller vorhergehenden Functionen und folglich auch gemeinschaftlicher Divisor der beiden Functionen A, A' ist. Es heifse daher $A^{(\nu)}$ ein *gröfster* gemeinschaftlicher Divisor von A, A'. Multiplicirt man $A^{(\nu)}$ mit einer beliebigen Function vom Grade Null (mit einer Einheit), so hat das Product offenbar dieselbe Eigenschaft wie $A^{(\nu)}$; es giebt daher $p-1$ incongruente gröfste gemeinschaftliche Divisoren desselben Grades, und ein einziger unter diesen ist primär.

Drückt man vermöge der vorletzten Congruenz $A^{(\nu)}$ durch $A^{(\nu-1)}$ und $A^{(\nu-2)}$, diese vermöge der vorhergehenden Congruenzen durch die vorhergehenden Functionen aus, so kommt man zuletzt auf eine Congruenz von der Form

$$G.A+G'.A' \equiv A^{(\nu)} \pmod{p},$$

welche also stets möglich ist, wenn $A^{(\nu)}$ gröfster gemeinschaftlicher Divisor von A, A' ist.

5.

Ist der gröfste gemeinschaftliche Divisor $A^{(\nu)}$ der Functionen A, A' vom Grade Null (also $\equiv 1 \pmod{p}$, wenn er primär ist), so heifsen A, A' *relativ prim* gegen einander.

Aus dieser Definition folgt der ***Hauptsatz:*** Sind A, A' zwei relative Primfunctionen, und ist M eine beliebige Function, so ist jeder gemeinschaftliche Divisor der beiden Functionen AM, A' zugleich gemeinschaftlicher Divisor von M, A'. Denn multiplicirt man die Reihe der Congruenzen, durch welche die Functionen A, A', A'' ... $A^{(\nu)}$ zusammenhängen, mit M, so ergiebt sich unmittelbar, dafs jeder gemeinschaftliche Divisor von AM, A' auch Divisor von $A''M$, $A'''M$ ... $A^{(\nu)}M$ und folglich auch (da der Annahme nach $A^{(\nu)}$ vom Grade Null ist) von M, also gemeinschaftlicher Divisor von M, A' ist. (Dies folgt auch unmittelbar aus der Congruenz $GAM+G'MA' \equiv A^{(\nu)}M$.)

Die wichtigsten Specialfälle dieses Satzes sind die folgenden: Ist auch M relativ prim gegen A', so ist der gröfste gemeinschaftliche Divisor von M und A', und folglich auch der von AM und A' eine Function vom Grade Null, d. h. AM und A' sind relativ prim gegen einander; und hieraus ergiebt sich der Satz: Wenn zwei Reihen von Functionen so beschaffen sind, dafs jede Function der einen Reihe relativ prim gegen jede Function der andern Reihe ist, so ist das Product aus sämmtlichen Functionen der einen Reihe relativ prim gegen das Product aus sämmtlichen Functionen der andern Reihe.

Eine zweite Specialisirung ist die folgende. Ist wieder A relativ prim gegen A', und ist AM durch A' theilbar, so ist A' als gemeinschaftlicher

Divisor von AM, A' auch gemeinschaftlicher Divisor von M, A', also Divisor von M.

Hieraus folgt weiter: Ist jede der Functionen A, B, C etc. relativ prim gegen jede der andern, und ist ferner eine Function M durch jede der Functionen A, B, C etc. theilbar, so ist M auch durch das Product $ABC\ldots$ theilbar. Denn der Annahme nach ist $M \equiv GA$ durch B theilbar, folglich ist, da A relativ prim gegen B, $G \equiv HB$, also $M \equiv HAB$ u. s. w.

6.

Eine Function, welche nach dem Modul p nur solche Divisoren hat, die entweder ihr selbst, oder Functionen vom Grade Null (d. h. Einheiten), oder Producten aus beiden congruent sind (denn jede Function hat alle diese Divisoren), heifst (*irreductibel* oder) eine ***Primfunction*** nach dem Modul p; jede andere heifst (*reductibel* oder) *zusammengesetzt*. Es leuchtet ein, dafs eine beliebige Function entweder durch eine bestimmte Primfunction theilbar, oder relativ prim gegen dieselbe ist. Ist daher ein Product AB durch eine Primfunction P theilbar, so ist mindestens einer der Factoren A, B für sich allein durch P theilbar; denn ist A nicht durch P theilbar, so ist A relativ prim gegen P, und folglich B durch P theilbar. Derselbe Satz gilt für ein Product aus beliebig vielen Functionen.

Es leuchtet ein, dafs jede beliebige Function M sich darstellen läfst als Product aus Potenzen von Primfunctionen, welche unter einander incongruent sind, und deren Anzahl eine endliche ist (wenn der Grad von M endlich ist); und zwar ist *wesentlich* nur eine einzige solche Darstellung möglich; d. h. wenn in der einen Zerfällung a Factoren vorkommen, welche einer und derselben Primfunction A congruent sind, so werden auch in jeder andern Zerfällung a Factoren vorkommen, welche derselben Primfunction A oder einem Product aus A in eine Einheit congruent sind. Man kann die Primfunctionen sämmtlich primär annehmen; ist dann

$$M \equiv \varepsilon A^a B^b C^c \ldots \pmod{p}$$

wo ε eine Einheit, A, B, C etc. incongruente primäre Primfunctionen, a, b, c etc. positive ganze Zahlen bedeuten, so ist jeder primäre Divisor D von M von der Form

$$D \equiv A^{a'} B^{b'} C^{c'} \ldots \pmod{p}$$

wo a', b', c' etc. die Null oder positive ganze Zahlen bedeuten, welche resp.

nicht gröfser als a, b, c etc. sind. Die Anzahl der incongruenten primären Divisoren von M ist demnach $= (a+1)(b+1)(c+1)$.

Wenn eine Function M einen Divisor D $m$mal enthält, d. h. wenn $M \equiv GD^m \pmod{p}$, so folgt durch Differentiation

$$\frac{dM}{dx} \equiv \left(G.m\frac{dD}{dx} + D.\frac{dG}{dx}\right)D^{m-1} \pmod{p};$$

also enthält die Derivirte von M denselben Divisor D mindestens $(m-1)$mal (sie kann ihn auch öfter enthalten). Ist daher eine Function relativ prim gegen ihre erste Derivirte, so ist sie einem Product aus lauter incongruenten Primfunctionen congruent.

Allgemeine Sätze über die Congruenzen, welche sich auf einen doppelten Modulus beziehen.

7.

Die vorhergehenden Sätze entsprechen vollständig denen über die Theilbarkeit der Zahlen in der Weise, dafs das ganze System der unendlich vielen einander nach dem Modulus p congruenten Functionen einer Variabeln sich hier verhält, wie eine einzige bestimmte Zahl in der Zahlentheorie, indem jede einzelne Function eines solchen Systems jede beliebige andere desselben Systems in jeder Beziehung vollständig ersetzt; eine solche Function ist der Repräsentant der ganzen Classe; jede Classe hat ihren bestimmten Grad, ihre bestimmten Divisoren u. s. w., und alle diese Merkmale kommen jedem einzelnen Gliede einer Classe in derselben Weise zu. Das System der unendlich vielen incongruenten Classen — unendlich vielen, da der Grad unbegrenzt wachsen kann — entspricht der Reihe der ganzen Zahlen in der Zahlentheorie. Der Congruenz der Zahlen entspricht hier Congruenz von Functionenclassen nach einem doppelten Modulus in der folgenden Weise.

Zwei Functionenclassen oder deren Repräsentanten A, B heifsen *congruent* in Bezug auf die Functionenclasse, deren Repräsentant M, in Zeichen

$$A \equiv B \,(\text{modd. } p, M) \text{ oder } A \equiv B \,(\text{mod. } M),$$

wenn die Differenz $A-B$ nach dem Modul p durch M theilbar ist.

Eine solche Congruenz zweier Functionen A, B in Bezug auf eine dritte M ist also nur ein anderer Ausdruck für die Congruenz

$$A \equiv B + CM \pmod{p},$$

und hieraus ergiebt sich, dafs man A, B, M durch beliebige Functionen A', B', M' ersetzen kann, welche resp. jenen nach dem Modul p congruent sind. Ferner leuchtet ein, dafs man in einer solchen Congruenz die Variabele x in den drei Functionen A, B, M durch eine beliebige Function von x ersetzen kann.

Aus der Definition dieser Congruenzen ergeben sich folgende Sätze: Ist $A \equiv A'$ (mod. M), $B \equiv B'$ (mod. M); so ist $A \pm B \equiv A' \pm B'$ (mod. M), ferner $AB \equiv A'B'$ (mod. M), ferner $A^n \equiv A'^n$ (mod. M), wo n eine positive ganze Zahl bedeutet. Und allgemein: Sind die beiden Seiten einer Congruenz nach dem Modulus M ganze rationale Functionen (mit ganzen Zahlcoefficienten) von Functionen, so darf man jede der letztern (an beliebigen Stellen) durch eine andere ersetzen, welche ihr nach dem Modulus M congruent ist.

Ist ferner $AB \equiv 0$ (mod. M), und A relativ prim gegen M, so ist auch $B \equiv 0$ (mod. M); allgemeiner: ist $AB \equiv A'B'$ (mod. M) und $A \equiv A'$ (mod. M) und A relativ prim gegen M, so ist auch $B \equiv B'$ (mod. M).

Sind endlich A, A' congruent nach dem Modul M, und beide von niedrigerm Grade als M, so müssen A, A' auch nach dem einfachen Modul p einander congruent sein.

8.

Man kann nun ein System von Functionen aufstellen, so dafs irgend eine beliebige Function einer von diesen Functionen, aber auch nur einer einzigen nach dem Modulus M congruent ist. Es sei A eine beliebige Function, so kann man, wie früher gezeigt ist, stets eine Congruenz von der Form

$$A \equiv QM + A' \pmod{p}$$

aufstellen, in welcher A' von niedrigerm Grade ist als M. Stellt man daher sämmtliche nach dem Modul p incongruente Functionen von niedrigerm Grade als M auf, so ist jede beliebige Function einer von diesen nach dem Modulus M congruent, aber auch nur einer einzigen von ihnen, weil zwei nach dem Modul p incongruente Functionen von niedrigerm Grade als M auch in Bezug auf M incongruent sind. Ist μ der Grad von M, so ist p^μ die Anzahl dieser Functionen, welche also ein System der verlangten Art bilden. Jedes solche System heifse ein *vollständiges System incongruenter Functionen* in Bezug auf den Modul M. Multiplicirt man jedes Glied eines solchen Systems mit einer und derselben Function, welche gegen den Modulus M relativ prim ist, so bilden die Producte wieder ein solches System, wie sich leicht beweisen läfst.

9.

Seien N, N' etc. beliebige Functionen, deren erste durch den Modulus M nicht theilbar ist, ferner n eine positive ganze Zahl, so heifst die Bedingung

$$Ny^n + N'y^{n-1} + \text{etc.} + N^{(n)} \equiv 0 \pmod{M}$$

eine ***Congruenz vom Grade n mit einer Unbekannten y;*** und jede Function, welche für y substituirt diese Bedingung befriedigt, heifst eine ***Wurzel*** derselben. Ist eine solche Wurzel gefunden, so ist jede mit ihr nach dem Modul M congruente Function ebenfalls eine Wurzel; die Hauptaufgabe ist daher, sämmtliche nach dem Modul M incongruente Wurzeln zu finden.

Wir betrachten zunächst die Congruenz ***ersten*** Grades, welche auf die Form

$$Ay \equiv B \pmod{M}$$

gebracht werden kann. Nehmen wir zuerst an, A sei relativ prim gegen den Modul M, so giebt es (zufolge der Schlufsbemerkung des vorigen Artikels) in jedem vollständigen Systeme incongruenter Functionen eine, aber auch nur eine Function y, für welche $Ay \equiv B$ wird; die Congruenz hat daher in diesem Falle nur eine einzige Wurzel (d. h. alle Wurzeln sind dieser einen nach M congruent). Hat aber A mit M den gröfsten gemeinschaftlichen Divisor D, so mufs, wenn die Congruenz lösbar sein soll, auch B durch D theilbar sein; in diesem Falle sei $A \equiv A'D$, $B \equiv B'D$, $M \equiv M'D \pmod{p}$, so folgt aus der obigen Congruenz

$$A'y \equiv B' \pmod{M'}$$

und umgekehrt jene aus dieser. Da nun hierin A' relativ prim gegen den Modulus M', so hat die letztere Congruenz eine aber auch nur eine einzige Wurzel W nach dem Modulus M'. Alle Wurzeln der ersten Congruenz sind daher in der Form

$$y \equiv W + HM' \pmod{p}$$

enthalten, und alle in dieser Form enthaltenen Functionen y sind auch Wurzeln der ersten Congruenz; und zwei in dieser Form enthaltene Functionen $W + HM'$, $W + GM'$ sind stets, aber auch nur dann nach dem Modulus M incongruent, wenn H und G nach dem Modulus D incongruent sind. Mithin hat in diesem Falle die erste Congruenz ebensoviel nach M incongruente Wurzeln, als es nach dem Modul D incongruente Functionen giebt, also p^δ, wenn δ der Grad von D ist.

Für die spätern Untersuchungen ist auch noch die Lösung der folgenden ***Aufgabe*** wichtig: Seien M, N relativ prim gegen einander; es soll die

allgemeine Form der Functionen y gefunden werden, welche die *beiden* Congruenzen $y \equiv A \pmod{M}$, $y \equiv B \pmod{N}$ befriedigen. Aus der ersten Form folgt $y \equiv A + zM \pmod{p}$, wo z eine beliebige Function ist, welche aber der Bedingung $A + zM \equiv B \pmod{N}$ genügen mufs; diese Congruenz hat nach dem Vorhergehenden eine einzige Wurzel nach dem Modul N, und es folgt daraus die allgemeine Lösung $y \equiv W \pmod{MN}$.

10.

Hat man ein vollständiges System incongruenter Functionen in Bezug auf den Modul M aufgestellt, so drängen sich die beiden folgenden Fragen auf: Wieviele dieser Functionen haben mit M einen bestimmten Divisor D gemeinschaftlich? und: Wieviele unter diesen haben D zum gröfsten gemeinschaftlichen Divisor mit M? — Die Beantwortung dieser Fragen ist unabhängig von der besondern Wahl des vollständigen Systems incongruenter Functionen, da jede von zwei einander nach M congruenten Functionen denselben gröfsten Divisor mit M gemeinschaftlich hat, wie die andere.

Die erste Frage ist im vorigen Artikel schon mit beantwortet; zwei Functionen GD, HD sind stets, aber auch nur dann nach dem Modul $M \equiv ND$ incongruent, wenn G, H nach dem Modul N incongruent sind; ist daher ν der Grad von N, so giebt es $p^{\nu} = p^{\mu-\delta}$ nach M incongruente Functionen, welche mit M den Divisor D gemeinsam haben.

Irgend eine dieser Functionen GD hat ferner stets, aber auch nur dann D zum gröfsten gemeinschaftlichen Divisor mit M, wenn G relativ prim gegen N ist. Bezeichnen wir daher allgemein mit $\varphi(A)$ die Anzahl der in Bezug auf A incongruenten Functionen, welche gegen A relativ prim sind, so ist die zweite von uns gesuchte Anzahl $= \varphi(N)$.

Schreiben wir nun sämmtliche Divisoren von M auf, mit der Beschränkung, dafs keiner von ihnen dem Producte aus einem andern in eine Einheit congruent ist, also z. B. sämmtliche incongruente *primäre* Divisoren von M; so hat irgend eine Function einen dieser Divisoren, aber auch nur einen einzigen zum gröfsten gemeinschaftlichen Divisor mit M, woraus in Verbindung mit dem Vorhergehenden der Satz

$$\Sigma\varphi(N) = p^{\mu}$$

folgt, wo das Summenzeichen sich auf ein so definirtes System von Divisoren N der Function M bezieht.

Aus diesem Satze ergiebt sich sogleich der Ausdruck für $\varphi(M)$ in dem Fall, wenn M einer Potenz A^α einer einzigen Primfunction congruent ist. Ist α der Grad von A, so hat man zufolge des Satzes

$$\varphi(1)+\varphi(A)+\varphi(A^2)+\cdots+\varphi(A^{\alpha-1})+\varphi(A^\alpha) = p^{\alpha\alpha}$$

und ebenso

$$\varphi(1)+\varphi(A)+\varphi(A^2)+\cdots+\varphi(A^{\alpha-1}) = p^{\alpha(\alpha-1)};$$

folglich

$$\varphi(A^\alpha) = p^{\alpha\alpha}-p^{\alpha(\alpha-1)} = p^{\alpha\alpha}\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right).$$

Auf diesen Fall wird aber jeder andere durch folgenden Satz zurückgeführt: Sind M, N relativ prim gegen einander, so ist $\varphi(MN)=\varphi(M)\varphi(N)$; welcher sich so beweisen läfst. Man bilde das vollständige System der gegen M relativ primen und nach M incongruenten Functionen G, deren Anzahl $\varphi(M)$; ebenso bilde man in Bezug auf den Modulus N ein entsprechendes System von $\varphi(N)$ Functionen H, und in Bezug auf MN ein solches System von $\varphi(MN)$ Functionen F. Es ergiebt sich dann mit Hülfe der Schlufsbemerkung des vorigen Artikels, dafs allen $\varphi(M)\varphi(N)$ Combinationen von Congruenzen $y\equiv G \pmod{M}$ und $y\equiv H \pmod{N}$ eine, aber auch nur eine Lösung von der Form $y\equiv F \pmod{MN}$, und umgekehrt jeder der $\varphi(MN)$ Congruenzen der letztern Form eine, aber auch nur eine Combination der erstern Form entspricht; woraus unmittelbar $\varphi(MN)=\varphi(M)\varphi(N)$ folgt.

Seien nun A, B, C etc. sämmtliche einander incongruente Primfunctionen resp. von den Graden α, β, γ etc., welche in einer Function M vom Grade μ als Factoren enthalten sind, und zwar so, dafs keine dieser Primfunctionen etwa einem Producte aus einer andern von ihnen in eine Einheit congruent ist, was man z. B. dadurch erreicht, dafs man sie alle als primär annimmt; dann ist

$$\varphi(M) = p^\mu\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{p^\beta}\right)\left(1-\frac{1}{p^\gamma}\right)\cdots,$$

wie sich aus den vorhergehenden Sätzen leicht ergiebt.

11.

Man schreibe das vollständige System der gegen M relativ primen und in Bezug auf M incongruenten Functionen auf, deren Anzahl wir mit $\varphi(M)$ bezeichnet haben. Multiplicirt man sie sämmtlich mit einer und derselben F, welche sich in ihrem Complexe findet, so bilden die $\varphi(M)$ Producte wieder ein solches System, so dafs jedes Glied des einen Systems einem,

aber auch nur einem einzigen Gliede des andern Systems nach dem Modul M congruent ist. Multiplicirt man daher alle diese $\varphi(M)$ Congruenzen mit einander, und berücksichtigt, dafs das Product der $\varphi(M)$ gegen M relativ primen Functionen ebenfalls gegen M relativ prim ist, so erhält man den Satz

$$F^{\varphi(M)} \equiv 1 \pmod{M},$$

welcher dem verallgemeinerten Satz von *Fermat* in der Zahlentheorie entspricht.

Ist M eine Primfunction P vom Grade π, so ist $\varphi(P) = p^\pi - 1$, und folglich

$$F^{p^\pi - 1} \equiv 1 \pmod{P}$$

wenn F eine durch P nicht theilbare Function bedeutet, und allgemein ist ohne alle Beschränkung für F

$$F^{p^\pi} \equiv F \pmod{P},$$

wie unmittelbar einleuchtet.

Hieraus folgt, dafs die Auflösung der Congruenz ersten Grades

$$Ay \equiv B \pmod{M}$$

in dem Falle, wo A gegen M relativ prim ist, durch die Formel

$$y \equiv BA^{\varphi(M)-1} \pmod{M}$$

gegeben wird.

12.

Von nun an wenden wir uns zu dem besondern Fall, in welchem der Modulus der Congruenzen eine *Primfunction* P vom Grade π ist. Dann besteht folgender *Satz:* Eine Congruenz $F(y) = Ny^n + N'y^{n-1} + \text{etc.} \equiv 0 \pmod{P}$ kann nicht mehr als n nach dem Modul P incongruente Wurzeln haben. — *Beweis:* Wir nehmen an, der Satz sei für Congruenzen vom Grade $n-1$ bewiesen, und zeigen, dafs er dann auch für Congruenzen vom Grade n gilt. Gesetzt dann, unsere Congruenz n^{ten} Grades hätte mehr als n incongruente Wurzeln, also mindestens $n+1$. Sei W eine derselben, so ist für jede andere von dieser verschiedene y

$$F(y) - F(W) = (y - W)F_1(y) \equiv 0 \pmod{P},$$

wo $F_1(y)$ ein Polynom vom Grade $n-1$ ist, und folglich hätte, da $y - W$ nicht $\equiv 0 \pmod{P}$ sein kann, die Congruenz $F_1(y) \equiv 0 \pmod{P}$ vom Grade $n-1$ gegen unsere Annahme mindestens n Wurzeln. — Nun ist der

Satz für die Congruenzen ersten Grades schon früher bewiesen, folglich gilt er für jeden Grad.

Hat aber unsere Congruenz n^{ten} Grades wirklich n incongruente Wurzeln W, W', W'' etc., so müssen die Coefficienten gleich hoher Potenzen von y in den beiden Polynomen

$$F(y) = Ny^n + N'y^{n-1} + \text{etc.}$$
$$G(y) = N(y-W)(y-W')(y-W'') \ldots$$

einander paarweise nach dem Modul P congruent sein; denn sonst hätte die Congruenz

$$F(y) - G(y) \equiv 0 \pmod{P},$$

deren Grad jedenfalls niedriger als n ist, n incongruente Wurzeln; sie darf daher gar keinen Grad haben, d. h. alle Coefficienten derselben müssen durch P theilbar sein.

Nun haben wir im vorigen Artikel gesehen, dafs die Congruenz

$$y^{p^\pi - 1} \equiv 1 \pmod{P}$$

durch jede der $p^\pi - 1$ incongruenten gegen P relativ primen Functionen F befriedigt wird; mithin ist *identisch*

$$y^{p^\pi - 1} - 1 \equiv \Pi(y - F) \pmod{P},$$

wo $\Pi(y-F)$ das Product aus allen Factoren $(y-F)$ bezeichnet. Daraus folgt als Analogon zu dem Satze von *Wilson* in der Zahlentheorie das Theorem

$$\Pi(F) + 1 \equiv 0 \pmod{P},$$

wo $\Pi(F)$ das Product aus allen $p^\pi - 1$ nach P incongruenten und durch P nicht theilbaren Functionen bedeutet. Und umgekehrt mufs P eine Primfunction sein, wenn dieser Satz gilt; denn hätte P einen von einer Einheit verschiedenen Divisor D von niedrigerm Grade als π, so fände sich unter den $p^\pi - 1$ Functionen F eine (im Art. 10 bestimmte) Anzahl solcher, welche mit P den Divisor D gemeinsam hätten; daraus würde aber folgen, dafs auch die Einheit diesen Divisor hätte, was unmöglich ist.

Potenzreste.

13.

Sei M wieder ein beliebiger Modulus, A relativ prim gegen denselben, so sind auch alle Glieder der Reihe 1, A, A^2 ... in inf. relativ prim gegen

M; es mufs daher geschehen, dafs $A^{m+n} \equiv A^m \pmod{M}$ und folglich $A^n \equiv 1 \pmod{M}$ wird. Sei a der kleinste Werth von n, für welchen dies eintritt, so sagt man: *A gehört* zum Exponenten a; und es sind die a Functionen

$$1, \quad A, \quad A^2 \quad \ldots \quad A^{a-1}$$

incongruent nach dem Modul M, woraus folgt, dafs jede Zahl n, für welche $A^n \equiv 1 \pmod{M}$ wird, durch a theilbar ist. Zufolge des Art. 11 ist aber $A^{\varphi(M)} \equiv 1 \pmod{M}$, also ist a ein Divisor von $\varphi(M)$. Doch kann dies leicht direct bewiesen werden, und daraus ergiebt sich dann ein neuer Beweis des Satzes $A^{\varphi(M)} \equiv 1 \pmod{M}$. Man braucht zu dem Zweck sich nur der bekannten Exhaustionsmethode zu bedienen, durch welche man die $\varphi(M)$ gegen M relativ primen Functionen in $\frac{\varphi(M)}{a}$ Gruppen, jede von a Gliedern zerfällt, deren allgemeine Form

$$F, \quad FA, \quad FA^2, \quad \ldots \quad FA^{a-1}$$

ist, wo F irgend eine gegen M relativ prime Function bedeutet; denn es ist leicht zu zeigen, dafs zwei solche Gruppen entweder ganz identisch, oder ganz verschieden in Bezug auf den Modulus M sind.

Wir verlassen den allgemeinen Fall und nehmen nun an, dafs der Modulus eine *Primfunction* P vom Grade π ist. Ist dann A irgend eine durch P nicht theilbare Function, welche in Bezug auf P zum Exponenten a gehört, so ist a ein Divisor von $p^\pi - 1$; es fragt sich: gehören zu jedem Divisor a von $p^\pi - 1$ wirklich Functionen A? und wie viele? —

Nehmen wir zuerst an, es gebe mindestens eine Function A, welche zu a gehört, so sind die a incongruenten Functionen $1, A, A^2, \ldots A^{a-1}$ sämmtliche Wurzeln der Congruenz $y^a \equiv 1 \pmod{P}$; alle zum Exponenten a gehörenden Functionen müssen daher Gliedern dieser Gruppe congruent sein, und es ergiebt sich leicht, dafs eine Function $A^{a'}$ stets, aber auch nur dann zum Exponenten a gehört, wenn a' relativ prim gegen a ist. Wenden wir daher die Charakteristik φ in der Bedeutung an, wie sie in der Zahlentheorie gebräuchlich ist, so ist die Anzahl der zu einem Divisor a von $p^\pi - 1$ gehörenden Functionen entweder $= 0$, oder $= \varphi a$. Da aber jede der $p^\pi - 1$ durch P nicht theilbaren Functionen zu einem, aber auch nur zu einem einzigen der Divisoren $a, a', a'' \ldots$ von $p^\pi - 1$ gehören mufs, und aufserdem bekanntlich $\varphi a + \varphi a' + \varphi a'' + \text{etc.} = p^\pi - 1$ ist, so ergiebt sich leicht, dafs zu jedem Divisor a von $p^\pi - 1$ wirklich φa Functionen gehören.

Es giebt daher auch $\varphi(p^\pi - 1)$ incongruente durch den Modul P nicht theilbare Functionen, welche zum Exponenten $p^\pi - 1$ gehören. Sei G irgend eine derselben, so sind die $p^\pi - 1$ Functionen

$$1,\ G,\ G^2,\ G^3,\ \ldots\ G^{p^\pi - 2}$$

sämmtlich incongruent, und sie bilden daher das vollständige System der incongruenten durch P nicht theilbaren Functionen, so dafs also jede durch P nicht theilbare Function einer von ihnen, aber auch nur einer einzigen congruent ist. Diese $\varphi(p^\pi - 1)$ Functionen G heifsen ***primitive Wurzeln*** der Primfunction P. Nimmt man eine derselben G als ***Basis*** an, und ist F eine beliebige durch P nicht theilbare Function, so kann man stets

$$F \equiv G^n \pmod{P}$$

setzen, wo $n = 0$ oder eine positive ganze Zahl $< p^\pi - 1$ ist. Diese Zahl n heifst dann der ***Index*** der Function F bezüglich der Basis G, in Zeichen

$$F \equiv G^{\mathrm{Ind}.F} \pmod{P}.$$

Dann leuchten folgende Sätze ein, in welchen A, B Functionen bedeuten, welche durch P nicht theilbar sind, und in denen die Basis der Indices unverändert bleibt: $\mathrm{Ind}.(AB) \equiv \mathrm{Ind}.A + \mathrm{Ind}.B \pmod{p^\pi - 1}$, $\mathrm{Ind}.(A^n) \equiv n\,\mathrm{Ind}.A \pmod{p^\pi - 1}$; ferner folgt aus $A \equiv B \pmod{P}$ nothwendig $\mathrm{Ind}.A = \mathrm{Ind}.B$ und umgekehrt.

Ein anderer Satz welcher seiner Natur nach von der Wahl der Basis, unabhängig ist, lautet folgendermafsen: Gehört eine Function A zum Exponenten a, so ist $\frac{p^\pi - 1}{a}$ der gröfste gemeinschaftliche Divisor von $p^\pi - 1$ und $\mathrm{Ind}.A$; und umgekehrt.

Binomische Congruenzen.

14.

Soll die binomische Congruenz $y^n \equiv A \pmod{P}$, in welcher A eine durch P nicht theilbare Function bedeutet, lösbar sein, so mufs $n\,\mathrm{Ind}.y \equiv \mathrm{Ind}.A \pmod{p^\pi - 1}$ sein; ist nun δ der gröfste gemeinschaftliche Divisor von n und $p^\pi - 1$, so mufs auch $\mathrm{Ind}.A$ durch δ theilbar sein, wenn diese Congruenz möglich sein soll, und dann hat sie in der That δ nach dem Modul $p^\pi - 1$ incongruente Wurzeln $\mathrm{Ind}.y$, denen ebenso viele nach dem Modul P incongruente Wurzeln y der binomischen Congruenz entsprechen.

Die erforderliche und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit dieser Congruenz, dafs nämlich Ind. A durch den gröfsten gemeinschaftlichen Divisor δ von n und $p^\pi - 1$ theilbar sein mufs, ist unabhängig von der Wahl der Basis und offenbar identisch mit der Bedingung, dafs A eine Wurzel der Congruenz $y^{\frac{p^\pi-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{P}$ ist; und man hätte dieses Kriterium auch leicht ohne Hülfe der Theorie der Indices ableiten können. Zugleich leuchtet nun ein, dafs die vorgelegte binomische Congruenz für $\frac{p^\pi-1}{\delta}$ incongruente Functionen A möglich ist, und nur für diese.

Quadratische Reste.

15.

Wenden wir die letzten Resultate auf den Fall an, in welchem $n = 2$ und p ungerade ist (der Fall $p = 2$ ist leicht zu absolviren), so ergiebt sich, dafs die Congruenz

$$y^2 \equiv A \pmod{P}$$

stets, aber auch nur dann möglich ist, wenn A eine der $\frac{1}{2}(p^\pi-1)$ Wurzeln der Congruenz

$$y^{\frac{1}{2}(p^\pi-1)} \equiv 1 \pmod{P}$$

ist, die wir *quadratische Reste* der Primfunction P nennen, während die übrigen $\frac{1}{2}(p^\pi - 1)$ incongruenten durch P nicht theilbaren Functionen quadratische *Nichtreste* von P heifsen; und jedes Mal, wenn A quadratischer Rest von P ist, hat die vorgelegte Congruenz zwei incongruente Wurzeln. Die $\frac{1}{2}(p^\pi - 1)$ Nichtreste sind offenbar die Wurzeln der Congruenz

$$y^{\frac{1}{2}(p^\pi-1)} \equiv -1 \pmod{P}.$$

Doch lassen sich alle diese Sätze auch unmittelbar aus den ersten Elementen ableiten, und zugleich ergeben sich dann neue Beweise für die beiden Sätze, welche denen von *Fermat* und *Wilson* in der Zahlentheorie analog sind. Ist A eine bestimmte der $p^\pi - 1$ durch P nicht theilbaren Functionen, so gehört zu jeder beliebigen F derselben eine, aber auch nur eine F', so dafs $FF' \equiv A \pmod{P}$; wenn nun *erstens* A quadratischer Nichtrest von P ist (d. h. wenn die Congruenz $y^2 \equiv A \pmod{P}$ unmöglich), so sind F und F' stets incongruent, und es zerfällt das System sämmtlicher $p^\pi - 1$

Functionen F in $\frac{1}{2}(p^\pi - 1)$ Paare F, F'; woraus leicht folgt, dafs

$$\Pi(F) \equiv A^{\frac{1}{2}(p^\pi - 1)} \pmod{P}$$

ist, wo das Zeichen Π dieselbe Bedeutung hat, wie im Art. 12. Ist aber *zweitens* A quadratischer Rest, d. h. ist die Congruenz $y^2 \equiv A \pmod{P}$ möglich, so ist einleuchtend, dafs diese zwei Wurzeln von der Form W und $-W$ hat, und das Product dieser beiden Functionen ist $\equiv -A \pmod{P}$; die übrigen $p^\pi - 3$ Functionen F zerfallen aber, wie im ersten Falle, in $\frac{1}{2}(p^\pi - 3)$ Paare incongruenter Functionen F, F'; woraus folgt, dafs in diesem Falle

$$\Pi(F) \equiv -A^{\frac{1}{2}(p^\pi - 1)} \pmod{P}$$

ist. Da nun 1 quadratischer Rest von P ist, so folgt aus dem zweiten Fall zunächst der Satz

$$\Pi(F) + 1 \equiv 0 \pmod{P},$$

sodann, dafs

$$A^{\frac{1}{2}(p^\pi - 1)} \equiv +1 \quad \text{oder} \quad \equiv -1 \pmod{P}$$

je nachdem A quadratischer Rest oder Nichtrest von P ist, und endlich, dafs in beiden Fällen

$$A^{p^\pi - 1} \equiv 1 \pmod{P}$$

ist. Die Anzahl der quadratischen Reste bestimmt sich endlich folgendermafsen. Man kann die $p^\pi - 1$ Functionen F in $\frac{1}{2}(p^\pi - 1)$ Paare von der Form F, $-F$ zerlegen, woraus folgt, dafs es höchstens $\frac{1}{2}(p^\pi - 1)$ incongruente Quadrate, also auch höchstens ebenso viel incongruente quadratische Reste giebt; da aber aufserdem je zwei verschiedenen Paaren, wie leicht zu beweisen ist, wirklich incongruente Quadrate entsprechen, so giebt es in der That $\frac{1}{2}(p^\pi - 1)$ quadratische Reste und ebenso viele Nichtreste.

16.

Das Zeichen $\left(\frac{A}{P}\right)$ möge $+1$ oder -1 bedeuten, je nachdem (die durch die Primfunction P nicht theilbare Function) A quadratischer Rest oder Nichtrest von P ist. Dann leuchten folgende Sätze ein:

1) Ist $A \equiv B \pmod{P}$, so ist $\left(\frac{A}{P}\right) = \left(\frac{B}{P}\right)$.

2) $\left(\frac{AB}{P}\right) = \left(\frac{A}{P}\right)\left(\frac{B}{P}\right)$ oder allgemeiner: das Product aus einer beliebigen Anzahl von Functionen (die durch P nicht theilbar sind) ist quadra-

tischer Rest oder Nichtrest, je nachdem die Anzahl der Factoren, welche Nichtreste sind, gerade oder ungerade ist.

Man kann auch noch ein anderes Kriterium aufstellen, um zu entscheiden, ob eine Function A quadratischer Rest oder Nichtrest von P ist. Theilt man nämlich sämmtliche $p^\pi-1$ Functionen F in $\frac{1}{2}(p^\pi-1)$ Paare von der Form F, $-F$, und nimmt aus jedem Paare willkürlich eine Function, so erhält man eine Gruppe von $\frac{1}{2}(p^\pi-1)$ Functionen F, deren Quadrate sämmtlich incongruent sind, und ebenso bilden die übrigen $\frac{1}{2}(p^\pi-1)$ Functionen $-F$ eine solche Gruppe. Nun bilde man die Producte aus jeder Function der einen Gruppe in die Function A und bezeichne mit μ die Anzahl derjenigen unter diesen Producten, welche Functionen der andern Gruppe congruent sind: so ist leicht zu zeigen, dafs

$$A^{\frac{1}{2}(p^\pi-1)} \equiv (-1)^\mu \pmod{P}$$

oder $\left(\frac{A}{P}\right) = (-1)^\mu$ ist. Je nachdem also μ gerade oder ungerade, ist A quadratischer Rest oder Nichtrest von P.

17.

Die Frage: „Von welchen Primfunctionen P ist eine gegebene Function A quadratischer Rest?", welche für die Theorie der *quadratischen Formen* (mit Functionen einer Variablen x) von Wichtigkeit ist, wird vermöge des vorigen Artikels auf den Fall reducirt, in welchem A eine Primfunction R (vom Grade ϱ) ist. Die analoge Frage in der Zahlentheorie wird bekanntlich durch den (zuerst von *Gaufs* bewiesenen) sogenannten Reciprocitäts-Satz von *Legendre* beantwortet. Diese Analogie, welche sich bisher in allen Principien und Beweisen bewährt hat, läfst keinen Zweifel an der Existenz eines entsprechenden Satzes in unserer Theorie übrig. Dieses Theorem lautet in der That

$$\left(\frac{P}{R}\right)\left(\frac{R}{P}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\pi\cdot\varrho},$$

worin P, R *primäre* Primfunctionen resp. von den Graden π, ϱ bedeuten, und $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}$ das Zeichen von *Legendre* ist. Der Fall, in welchem P, R nicht primär sind, läfst sich unmittelbar auf diesen zurückführen. Denn bedeutet E irgend eine der $p-1$ Einheiten, so ist stets $\left(\frac{A}{EP}\right)=\left(\frac{A}{P}\right)$, wo A irgend eine durch P nicht theilbare Function ist; und aufserdem ist $\left(\frac{E}{P}\right)=\left(\frac{e}{p}\right)^\pi$.

wo e eine Zahl $\equiv E \pmod{p}$ und $\left(\frac{e}{p}\right)$ das Zeichen von ***Legendre*** ist. Beide Sätze sind leicht zu beweisen.

Der Beweis unseres Theorems kann ganz analog dem fünften ***Gauſs***schen für den Satz von ***Legendre*** geführt werden und stützt sich dann auf das am Schlusse des vorigen Artikels bewiesene Lemma. Man betrachtet die vollständigen Systeme incongruenter Functionen (mit Ausnahme derer, welche $\equiv 0$ sind) in Bezug auf die drei Moduli P, R, PR, und wählt dazu immer die incongruenten Functionen, deren Grade kleiner sind als der des entsprechenden Modul. Jedes dieser drei Systeme theilt man in zwei Gruppen von gleich viel Gliedern ein, deren erstere sämmtliche Functionen F enthält, deren höchster Coefficient einer der Zahlen $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ congruent ist, während die andere Gruppe die übrigen Functionen $-F$ enthält, deren höchster Coefficient einer der Zahlen $-1, -2, \ldots -\frac{1}{2}(p-1)$ congruent ist. Die weitere Eintheilung der beiden Gruppen des dritten Systems, welches sich auf den Modulus PR bezieht, in jedesmal acht Classen mit Bezug auf die Moduli P, R und die Schlufsfolgerungen daraus bis zu dem letzten Resultat hin, in welchem der Beweis des Theorems enthalten ist, sind denen der citirten Abhandlung von ***Gauſs*** so ähnlich, dafs die vollständige Durchführung Niemandem entgehen kann. Und hiermit wollen wir diesen Theil unserer Theorie verlassen, da seine weitere Entwicklung sich von selbst ergiebt.

Bestimmung der Primfunctionen.

18.

Sei P eine Primfunction vom Grade π, A eine beliebige Function; bildet man die unendliche Reihe $A, A^p, A^{p^2}, A^{p^3} \ldots$, so mufs es natürlich geschehen, dafs ein Glied $A^{p^{m+n}}$ einem frühern Gliede A^{p^m} nach dem Modul P congruent ist (im Fall A der Null oder einer Einheit congruent ist, wird schon $A^p \equiv A \pmod{P}$); da ferner allgemein $A^{p^\pi} \equiv A \pmod{P}$ ist, so kann man annehmen, dafs $m < \pi$ ist; erhebt man daher die Congruenz $A^{p^{m+n}} \equiv A^{p^m}$ zur Potenz $p^{\pi-m}$, so ergiebt sich leicht $A^{p^n} \equiv A \pmod{P}$. Sei nun $\varrho > 0$ der niedrigste Werth von n, für welchen dies eintritt, so wollen wir sagen: die Function A *pafst* zur Zahl ϱ. Dann sind die ϱ Functionen

$$(\mathfrak{A}.) \quad A, A^p, A^{p^2}, \ldots A^{p^{\varrho-1}}$$

sämmtlich incongruent, denn aus $A^{p^{m+n}} \equiv A^{p^m}$ würde wieder $A^{p^n} \equiv A$ folgen. Daraus ergiebt sich dann leicht, dafs, wenn $A^{p^n} \equiv A$ ist, n nothwendig durch ϱ theilbar sein mufs. Also ist jedenfalls ϱ ein Divisor von π.

Es fragt sich nun: Passen zu jedem Divisor ϱ von π wirklich Functionen? und wieviele? — Zunächst leuchtet ein, dafs die Anzahl der (incongruenten) Functionen, welche zu ϱ passen, ein Multiplum $\varrho.\psi(\varrho)$ von ϱ sein mufs (die Null vorläufig nicht ausgeschlossen). Denn wenn A zu ϱ pafst, so passen auch die ϱ in dem Complex (𝔄.) enthaltenen Functionen zu ϱ; ebenso die ϱ Functionen

$$(\mathfrak{B}.) \qquad B,\ B^p,\ B^{p^2},\ \ldots\ B^{p^{\varrho-1}},$$

wenn B zu ϱ pafst; und endlich sind zwei solche Complexe (𝔄.) und (𝔅.) entweder ganz identisch, oder ganz verschieden in Bezug auf den Modulus P.

Ferner ist klar, dafs alle zu ϱ passenden Functionen unter den Wurzeln der Congruenz

$$y^{p^\varrho} \equiv y \pmod{P}$$

zu suchen sind, und jede Wurzel dieser Congruenz pafst zu einem bestimmten Divisor von ϱ. Endlich hat diese Congruenz in der That p^ϱ incongruente Wurzeln, was sich unmittelbar daraus ergiebt, dafs $y^{p^\pi} - y$ algebraisch durch $y^{p^\varrho} - y$ theilbar ist. Und da unter diesen p^ϱ Wurzeln auch sämmtliche Functionen enthalten sind, die zu einem beliebigen Divisor δ von ϱ passen, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\Sigma\delta.\psi(\delta) = p^\varrho,$$

wo sich das Summenzeichen auf sämmtliche Divisoren δ von ϱ bezieht. Stellt man nun diese Gleichung für jeden Divisor ϱ von π auf, so erhält man offenbar ebensoviel Gleichungen, als unbekannte Zahlen $\psi(\delta)$ zu bestimmen sind. Für den Fall, dafs π eine Potenz a^α einer Primzahl a ist, ergiebt sich die Auflösung unmittelbar; denn dann ist, wenn α' eine der Zahlen 1, 2, 3 ... α bedeutet,

$$1.\psi(1) + a.\psi(a) + \cdots + a^{\alpha'}.\psi(a^{\alpha'}) = p^{a^{\alpha'}}$$
$$1.\psi(1) + a.\psi(a) + \cdots + a^{\alpha'-1}\psi(a^{\alpha'-1}) = p^{a^{\alpha'-1}}$$

folglich $a^{\alpha'}.\psi(a^{\alpha'}) = p^{a^{\alpha'}} - p^{a^{\alpha'-1}}$ die Anzahl der incongruenten Functionen, welche zu dem Divisor $a^{\alpha'}$ von $\pi = a^\alpha$ passen.

Doch läfst sich auch die allgemeine Auflösung des Problems vermöge

des folgenden *allgemeinen Theorems* leicht hinschreiben: Seien $f(m)$ und $F(m)$ zwei von der ganzen Zahl m in der Weise abhängige Functionen, dafs die letztere gleich ist der Summe der Werthe der erstern für alle Divisoren von m; so läfst sich umgekehrt $f(m)$ als algebraische Summe einer Reihe von Werthen der Function $F(m)$ darstellen. Seien $a, b, c \ldots$ sämmtliche von einander verschiedenen Primzahlen, welche in m aufgehen, so ist

$$f(m) = F(m) - \Sigma F\left(\frac{m}{a}\right) + \Sigma F\left(\frac{m}{ab}\right) - \Sigma F\left(\frac{m}{abc}\right) + \cdots,$$

wo die Summenzeichen auf der rechten Seite sich der Reihe nach auf alle Combinationen zu 1, 2, 3 u. s. w. aus den Primzahlen $a, b, c \ldots$ beziehen. Und es ist leicht zu sehen, dafs dasselbe Theorem auch gilt, wenn die Functionen f, F sich auf irgend welche Elemente m beziehen, denen jedesmal bestimmte andere Elemente nach denselben Principien entsprechen, wie die Divisoren einer ganzen Zahl dieser Zahl selbst entsprechen.

So folgt aus diesem Satze unmittelbar die Bestimmung der in der Zahlentheorie gebräuchlichen Function

$$\begin{aligned}\varphi(m) &= m - \Sigma\frac{m}{a} + \Sigma\frac{m}{ab} - \Sigma\frac{m}{abc} + \cdots \\ &= m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\end{aligned}$$

aus dem Satze $\Sigma\varphi(\delta) = m$, wo δ alle Divisoren von m zu durchlaufen hat.

Ebenso ergiebt sich aus dem in Art. 10 bewiesenen Satze $\Sigma\varphi(N) = p^\mu$ die Umkehrung

$$\begin{aligned}\varphi(M) &= p^\mu - \Sigma p^{\mu-\alpha} + \Sigma p^{\mu-(\alpha+\beta)} - \Sigma p^{\mu-(\alpha+\beta+\gamma)} + \cdots \\ &= p^\mu\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{p^\beta}\right)\left(1-\frac{1}{p^\gamma}\right)\cdots;\end{aligned}$$

denn in diesem Falle war $F(M) = p^\mu$.

In unserm Falle haben wir $f(m) = m.\psi(m)$ und $F(m) = p^m$, und es ergiebt sich also

$$m.\psi(m) = p^m - \Sigma p^{\frac{m}{a}} + \Sigma p^{\frac{m}{ab}} - \Sigma p^{\frac{m}{abc}} + \cdots$$

als die Anzahl der nach dem Modul P incongruenten Functionen, welche zu dem Divisor m des Grades π von P passen; und hier bezeichnen wieder $a, b, c \ldots$ sämmtliche von einander verschiedene Primzahlen, welche in m aufgehen.

Die Unabhängigkeit dieses Ausdrucks von dem Multiplum π der Zahl m und der besondern Natur der Primfunction P läfst vermuthen, dafs derselbe eine allgemeinere Bedeutung hat, was sich auch bald herausstellen wird.

19.

Satz: Die Function $x^{p^\pi} - x$ ist nach dem Modul p congruent dem Producte aus allen primären incongruenten Primfunctionen, deren Grade Divisoren von π sind. —

Beweis: 1) Die vorgelegte Function kann keine einander congruenten Factoren enthalten, da ihre Derivirte einer Einheit congruent ist.

2) Sie ist durch jede Primfunction R theilbar, deren Grad ϱ ein Divisor von π ist. Denn es ist $x^{p^\varrho} \equiv x \pmod{R}$, und wenn man beide Seiten immer wieder zur Potenz p^ϱ erhebt

$$x \equiv x^{p^\varrho} \equiv x^{p^{2\varrho}} \equiv \cdots \equiv x^{p^\pi} \pmod{R}.$$

3) Sie kann keinen Primfactor von höherm Grade als π enthalten. Denn bezeichnet $f(x)$ eine beliebige Function, so ist, wie leicht zu zeigen, für jede positive ganze Zahl h:

$$f(x)^{p^h} \equiv f(x^{p^h}) \pmod{p}.$$

Ist nun Q irgend ein Primfactor von $x^{p^\pi} - x$, so ist also

$$f(x)^{p^\pi} \equiv f(x^{p^\pi}) \equiv f(x) \pmod{Q};$$

mithin sind alle in Bezug auf Q incongruenten Functionen $f(x)$ Wurzeln der Congruenz $y^{p^\pi} \equiv y \pmod{Q}$, und folglich kann die Anzahl dieser in Bezug auf Q incongruenten Functionen nicht grösser als p^π, folglich der Grad von Q nicht gröfser als π sein.

4) Der Grad jedes Primfactors von $x^{p^\pi} - x$ ist ein Divisor von π. Denn es folgt aus 3), dafs die Function x in Bezug auf eine Primfunction Q vom Grade μ zur Zahl μ selbst pafst (so dafs die μ Functionen x, x^p, x^{p^2}, ... $x^{p^{\mu-1}}$ in Bezug auf Q incongruent sind); ist daher $x^{p^\pi} \equiv x \pmod{Q}$, so mufs μ ein Divisor von π sein.

5) Die Function $x^{p^\pi} - x$ enthält daher alle Primfunctionen, deren Grade Divisoren von π sind, und nur solche, ferner jede nur ein Mal, und da ihr höchster Coefficient $\equiv 1 \pmod{p}$ ist, so ist sie dem Producte aus allen primären Primfunctionen congruent, deren Grade Divisoren von π sind. W. Z. B. W.

20.

Bezeichnet man daher die Anzahl der primären Primfunctionen von irgend einem Grade ϱ mit $\psi(\varrho)$, so ist

$$\Sigma\varrho.\psi(\varrho) = p^{\pi},$$

worin sich das Summenzeichen auf alle Divisoren ϱ der Zahl π bezieht. Vergleicht man diese Formel mit der im Art. 18, wo die allgemeine Auflösung solcher Gleichungen gelehrt ist, so ergiebt sich, dafs die Function ψ hier wie dort für gleiche Argumente stets denselben Werth hat; und es ist nun auch nicht schwer, die Identität der Bedeutung derselben in beiden Untersuchungen nachzuweisen.

Zunächst ziehen wir aus der im Art. 18 entwickelten Form für $m.\psi(m)$ den Schlufs, dafs es in der That Primfunctionen von jedem Grade m giebt: denn wäre die rechte Seite $= 0$, so könnte man sie durch ihr letztes Glied $p^{\frac{m}{abc\ldots}}$ dividiren, woraus folgen würde, dafs die Zahl 1 als algebraische Summe einer Reihe von Potenzen einer Primzahl $p(>1)$ darstellbar wäre, was unmöglich ist, da 1 nicht durch p theilbar ist; und negativ kann $m.\psi(m)$ seiner Bedeutung nach nicht sein.

Sei nun $\boldsymbol{P}$ eine Primfunction vom Grade π, und $\boldsymbol{A}$ eine Function, welche in Bezug auf den Modulus $\boldsymbol{P}$ zu dem Divisor ϱ von π pafst. Dann sind die Coefficienten sämmtlicher Potenzen von y in dem Producte

$$(y-\boldsymbol{A})(y-\boldsymbol{A}^p)(y-\boldsymbol{A}^{p^2})\ldots(y-\boldsymbol{A}^{p^{\varrho-1}})$$

nach dem Modulus $\boldsymbol{P}$ *Zahlen* congruent. Denn jeder Coefficient ist eine symmetrische Function der ϱ Functionen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^p$, $\ldots$ $\boldsymbol{A}^{p^{\varrho-1}}$ und bleibt daher sich selbst congruent, wenn man x durch x^p ersetzt, d. h. er ist eine Wurzel der Congruenz $y^p \equiv y \pmod{\boldsymbol{P}}$. Mit andern Worten, diese Gruppe von ϱ Functionen, welche zu dem Divisor ϱ passen, bildet das vollständige Wurzelsystem einer Congruenz

$$\boldsymbol{R}(y) \equiv 0 \pmod{\boldsymbol{P}}$$

vom Grade ϱ, deren Coefficienten von x unabhängig sind. Umgekehrt läfst sich aber auch leicht zeigen, dafs, wenn eine Congruenz, deren Coefficienten von x unabhängig sind, eine Wurzel $\boldsymbol{A}$ besitzt, welche zu dem Divisor ϱ von π pafst, sie auch die übrigen $\varrho-1$ Functionen $\boldsymbol{A}^p$, $\boldsymbol{A}^{p^2}$, $\ldots$ $\boldsymbol{A}^{p^{\varrho-1}}$ zu Wurzeln haben mufs (ein Satz, der sich leicht verallgemeinern läfst). Daraus folgt, dafs $\boldsymbol{R}(y)$ nach dem Modul p nicht in Factoren niedrigern Grades zerlegt

werden kann, oder mit andern Worten, dafs $\boldsymbol{R}(x)$ eine Primfunction vom Grade ϱ ist. Die identische Congruenz

$$y^{p^\pi} - y \equiv \Pi(y - \boldsymbol{F}) \pmod{\boldsymbol{P}}$$

führt daher, wenn man die Factoren, welche eine Gruppe zusammengehöriger zu einer und derselben Zahl passender Functionen $\boldsymbol{F}$ bilden, jedesmal in einen Factor zusammenzieht, zur Zerlegung der Function $y^{p^\pi} - y$ in ihre irreductibeln Factoren in Bezug auf den Modulus p. Auf diese Weise ist der Zusammenhang der Betrachtungen des Art. 18 mit der Bestimmung der Anzahl der Primfunctionen vollständig dargelegt.

21.

Sei nun $\boldsymbol{M}$ eine beliebige Function vom Grade μ und zwar

$$\boldsymbol{M} \equiv \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{A}^a\,\boldsymbol{B}^b\,\boldsymbol{C}^c \ldots \pmod{p},$$

worin $\boldsymbol{E}$ eine Einheit, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ etc. incongruente primäre Primfunctionen resp. von den Graden α, β, γ etc. sind. Sei ferner π irgend eine durch sämmtliche Zahlen α, β, γ etc. theilbare Zahl und $\boldsymbol{P}$ eine Primfunction vom Grade π. Dann hat nach dem Vorhergehenden jede der Congruenzen

$$\boldsymbol{A}(y) \equiv 0 \pmod{\boldsymbol{P}}, \qquad \boldsymbol{B}(y) \equiv 0 \pmod{\boldsymbol{P}}, \quad \text{etc.}$$

ebensoviel incongruente Wurzeln, als ihr Grad beträgt, und zwar ist der Grad die Zahl, zu welcher die Wurzeln passen. Daraus folgt, dafs man stets eine *identische* Congruenz von der Form

$$\boldsymbol{M}(y) \equiv \boldsymbol{E}\{\Pi(y - \boldsymbol{A}')\}^a\{\Pi(y - \boldsymbol{B}')\}^b \ldots \pmod{\boldsymbol{P}}$$

aufstellen kann, in welcher

$$\Pi(y - \boldsymbol{A}') = (y - \boldsymbol{A}')(y - \boldsymbol{A}''^p)\ldots(y - \boldsymbol{A}''^{p^{\alpha-1}})$$

und $\boldsymbol{A}'$ eine Function ist, welche zum Divisor α von π pafst.

22.

Man kann endlich auch das Product aller primären Primfunctionen eines bestimmten Grades m isolirt darstellen, mit Hülfe eines Satzes, welcher dem im Art. 18 ohne Beweis angeführten analog ist und durch einen logarithmischen Uebergang leicht aus diesem abgeleitet werden kann. Dazu führt folgender Gedankengang. Sind a, b zwei ganze positive Zahlen, und ist $c < b$ der bei der Division von a durch b bleibende (nicht negative) Rest, so ist $x^c - 1$ der Rest, welcher bei der algebraischen Division von $x^a - 1$ durch $x^b - 1$

bleibt; und dies bleibt auch noch richtig, wenn man für x eine beliebige positive ganze Zahl p einsetzt. Ist daher h der gröfste gemeinschaftliche Theiler von a, b, so ist algebraisch x^h-1 der gröfste gemeinschaftliche Theiler von x^a-1, x^b-1; und ebenso ist im gewöhnlichen Sinne p^h-1 der gröfste gemeinschaftliche Theiler von p^a-1, p^b-1. Daraus folgt durch abermalige Anwendung desselben Satzes, dafs algebraisch $x^{p^h-1}-1$ der gröfste gemeinschaftliche Theiler von $x^{p^a-1}-1$, $x^{p^b-1}-1$, und also auch $x^{p^h}-x$ der gröfste gemeinschaftliche Theiler von $x^{p^a}-x$, $x^{p^b}-x$ ist.

Sei nun m irgend eine positive ganze Zahl, welche durch keine andern Primzahlen als a, b, c ... theilbar ist, so folgt aus den vorhergehenden Principien, dafs

$$(x^{p^m}-x) : \Pi(x^{p^{\frac{m}{a}}}-x) \times \Pi(x^{p^{\frac{m}{ab}}}-x) : \Pi(x^{p^{\frac{m}{abc}}}-x) \times \cdots$$

eine ganze Function ist; hierin bezieht sich das Product-Zeichen Π der Reihe nach auf die verschiedenen Combinationen zu 1, 2, 3 u. s. w.; und die mit einander abwechselnden Divisions- und Multiplicationszeichen beziehen sich jedesmal nur auf das zunächst folgende Product.

Nehmen wir nun hierin p als Primzahl an, so ergiebt sich aus den vorhergehenden Artikeln, dafs die nach dem so eben bezeichneten Gesetze gebildete ganze Function in Bezug auf den Modul p congruent ist dem Producte aus allen incongruenten primären Primfunctionen vom Grade m. Der Grad dieser Function ist, übereinstimmend mit Art. 18, gleich

$$p^m - \Sigma p^{\frac{m}{a}} + \Sigma p^{\frac{m}{ab}} - \Sigma p^{\frac{m}{abc}} + \cdots$$

Die gemeinschaftliche Quelle des im Art. 18 angeführten und des analogen so eben benutzten Satzes ist folgende. Sei m irgend eine ganze Zahl; ferner a, b, c, ... k sämmtliche von einander verschiedene in m aufgehende Primzahlen; man bilde zwei getrennte Complexe D, D' von Divisoren der Zahl m nach folgendem Princip. In den Complex D nehme man zunächst alle Divisoren der Zahl m auf; in den Complex D' alle Divisoren von $\frac{m}{a}$, alle Divisoren von $\frac{m}{b}$ u. s. w.; dann wieder in den Complex D alle Divisoren von $\frac{m}{ab}$, von $\frac{m}{ac}$, von $\frac{m}{bc}$ u. s. w.; dann wieder in den Complex D' alle Divisoren von $\frac{m}{abc}$ u. s. w., bis man endlich auch alle Divisoren von $\frac{m}{abc\ldots k}$ entweder in den Complex D oder in den Complex D' aufgenommen hat, je

nachdem die Anzahl der Primzahlen $a, b, c, \ldots k$ eine gerade oder ungerade ist. Dann ist leicht zu zeigen, dafs jeder Divisor der Zahl m eben so oft in dem einen wie in dem andern Complex vorkommt, mit Ausnahme des Divisors m selbst, der lediglich und nur ein einziges Mal in dem Complex D vorkommt. Es bedarf nur eines Blickes, um hieraus die Umkehrungen der Gleichungen

$$\Sigma f(\delta) = F(m) \quad \text{oder} \quad \Pi f(\delta) = F(m)$$

abzuleiten, in welchen das Summen- oder Product-Zeichen Σ oder Π sich auf sämmtliche Divisoren δ einer *beliebigen* Zahl m bezieht; diese Auflösungen sind in den Formeln

$$f(m) = F(m) - \Sigma F\left(\frac{m}{a}\right) + \Sigma F\left(\frac{m}{ab}\right) - \text{etc.}$$

oder

$$f(m) = F(m) : \Pi F\left(\frac{m}{a}\right) \times \Pi F\left(\frac{m}{ab}\right) : \ldots$$

enthalten.

Göttingen, im October 1856.

2.

Beweis für die Irreductibilität der Kreistheilungs-Gleichungen.

(Von Herrn *Dedekind* in Göttingen.)

Nachdem *Gaufs* zuerst die Irreductibilität der Gleichung $\frac{x^p-1}{x-1}=0$ für den Fall bewiesen hatte, dafs p eine Primzahl ist, lag es nahe, einen ähnlichen Satz zu vermuthen, welcher sich auf die Theilung des Kreisumfangs in eine beliebige Anzahl m gleicher Theile bezieht. Dieser Satz wird so lauten:

„Die Gleichung vom Grade $\varphi(m)$, welche sämmtliche $\varphi(m)$ primitive Wurzeln der Gleichung $x^m=1$ zu Wurzeln hat, ist irreductibel."

Dem Beweise von *Gaufs* folgte zunächst eine Reihe anderer von *Kronecker, Schönemann, Eisenstein,* die auf wesentlich verschiedenen Principien beruhen, sich aber sämmtlich auf denselben einfachsten Fall beziehen, in welchem m eine Primzahl ist. Doch sieht man leicht, dafs diese Principien auch noch auf den Fall anwendbar sind, in welchem m nur durch eine einzige Primzahl theilbar, also eine Potenz dieser Primzahl ist, und namentlich wurden die Beweise von *Kronecker* und *Eisenstein* in diesem Sinne von *Serret* verallgemeinert. Allein diese Principien reichen nicht mehr aus, sobald die Zahl m durch mehrere Primzahlen theilbar ist, weil dann die in Rede stehende Gleichung in verschiedener Hinsicht einen wesentlich andern Charakter annimmt. Auf diesen Punct hat zuerst *Kronecker* in einer Abhandlung aufmerksam gemacht, welche zugleich den ersten Beweis des obigen und zwar noch verallgemeinerten Theorems enthält. Obgleich nun dieser Satz für die algebraische Auflösung der Gleichung $x^m=1$ nicht gerade erforderlich ist, da diese bekanntlich immer auf den Fall zurückgeführt werden kann, in welchem m die Potenz einer einzigen Primzahl ist, so verdient doch vielleicht ein neuer Beweis desselben, der sich durch seine Einfachheit auszeichnet, die Aufmerksamkeit derjenigen Mathematiker, welche sich mit diesem Theile der Algebra beschäftigen.

1.

Der neue Beweis stützt sich auf elementare Sätze über die Congruenzen höherer Grade, und ich werde mich in dieser Beziehung auf den vor-

stehenden Aufsatz über die Theorie derselben berufen; aufserdem benutze ich noch den folgenden zuerst von ***Schönemann*** bewiesenen Satz: Ist

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda)$$

eine ganze rationale Function mit reellen ganzzahligen Coefficienten, p eine absolute Primzahl, und

$$f_1(x) = (x-\alpha^p)(x-\beta^p)\ldots(x-\lambda^p);$$

so sind die Coefficienten dieser letztern Function ebenfalls ganze reelle Zahlen und zwar den entsprechenden Coefficienten von $f(x)$ congruent nach dem Modulus p, in Zeichen

$$f_1(x) \equiv f(x) \pmod{p}.$$

Für den directen Beweis dieses Satzes, welcher eigentlich nur eine sehr specielle algebraische Anwendung der genannten Theorie der höhern Congruenzen ist, mag hier folgende Bemerkung genügen. Sieht man $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ als ganz unbestimmte Gröfsen an, und bezeichnet mit A und A_1 irgend zwei einander entsprechende Coefficienten der beiden Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$, so leuchtet ein, dafs man $A^p = A_1 + pA_2$ setzen kann, worin A_1 und A_2 ganze, ganzzahlige und zugleich symmetrische Functionen von $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ und folglich auch (nach dem Fundamentalsatze über die Transformation symmetrischer Functionen) ganze und ganzzahlige Functionen der Coefficienten A von $f(x)$ sind. Sind daher diese Coefficienten ganze reelle Zahlen, so erhält man $A^p \equiv A_1 \pmod{p}$, und nach dem *Fermat*'schen Satze also auch $A \equiv A_1 \pmod{p}$, was zu beweisen war.

2.

Es sei nun α irgend eine primitive Wurzel der Gleichung $x^m = 1$ und $f(x)$ der durch $x-\alpha$ theilbare irreductibele Factor x^m-1, dessen rationale Coefficienten sämmtlich ganze Zahlen sein müssen, wenn der der höchsten Potenz von x gleich Eins angenommen wird (Disqu. Arithm. Art. 42). Der zu beweisende Satz ist dann identisch mit dem folgenden: *„Die Gleichung $f(x) = 0$ hat zu Wurzeln sämmtliche $\varphi(m)$ primitive m^{te} Wurzeln der Einheit, und keine andern."* Der Beweis des letztern Theils dieses Satzes hat keine Schwierigkeit, soll aber doch der Vollständigkeit halber hier nicht übergangen werden. Ist α^r irgend eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ — und in dieser Form sind ja alle ihre Wurzeln enthalten — so folgt in bekannter Weise aus der Irreductibilität von $f(x)$, dafs jedes Glied der Reihe $\alpha^r, \alpha^{r^2}, \alpha^{r^3} \ldots$ eine Wurzel der Gleichung ist, und dafs in dieser Reihe früher

oder später einmal ein Glied α^{r^n} kommen mufs, welches $= \alpha$ ist; daraus folgt aber $r^n \equiv 1 \pmod{m}$, und es ist daher r relative Primzahl gegen m, und folglich α^r ebenfalls eine ***primitive*** m^{te} Wurzel der Einheit.

Ungleich schwieriger ist der Nachweis des ersten Theils, dafs nämlich umgekehrt jede primitive m^{te} Wurzel der Einheit (d. h. jedes α^r, wenn r relative Primzahl gegen m ist) der Gleichung $f(x) = 0$ genügt; doch kann man das Problem sogleich auf den einfachsten Fall reduciren, in welchem r eine absolute Primzahl ist, die natürlich nicht in m aufgehen darf. Ist nämlich bewiesen, dafs α^r, α^s der Gleichung $f(x) = 0$ genügen, so mufs auch $\alpha^{r \cdot s}$ ihr genügen; denn da der Annahme nach α der rationalen Gleichung $f(x^r) = 0$ genügt, so mufs ihr auch jede andere Wurzel α^s der irreductibeln Gleichung $f(x) = 0$ genügen. Offenbar braucht also nur noch gezeigt zu werden, dafs jedes α^p der Gleichung $f(x) = 0$ genügt, wenn p eine absolute Primzahl ist, welche nicht in m aufgeht.

3.

Um dies zu beweisen, bemerken wir, dafs die Wurzeln der irreductibeln Gleichung $f_1(x) = 0$, welcher α^p genügt, mit den p^{ten} Potenzen der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ übereinstimmen müssen; denn da α^p ebensowohl eine rationale Function von α, wie umgekehrt α von α^p ist (nämlich $= (\alpha^p)^{p'}$, wenn $pp' \equiv 1 \pmod{m}$), so müssen die Grade der beiden Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ einander gleich sein. Setzt man daher

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta) \ldots (x - \lambda),$$

so ist

$$f_1(x) = (x - \alpha^p)(x - \beta^p) \ldots (x - \lambda^p)$$

und folglich nach dem oben bewiesenen Satze von ***Schönemann***

$$f_1(x) \equiv f(x) \pmod{p}.$$

Und aus dieser ***Congruenz*** zwischen den beiden Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ folgt auch ihre ***Identität.*** Denn nehmen wir an, die beiden irreductibeln Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ sind nicht identisch, so können sie auch keinen gemeinschaftlichen Factor haben, und folglich ist $x^m - 1$ durch ihr Product theilbar, da $x^m - 1$ sowohl durch $f(x)$ als auch durch $f_1(x)$ theilbar ist. Es wäre daher $x^m - 1$ einem Producte von Factoren gleich, unter denen mindestens zwei einander nach dem Modulus p congruent wären. Dann müfste (zufolge Art. 6 des vorstehenden Aufsatzes über die höhern Congruenzen) die

Function $x^m - 1$ mit ihrer ersten Derivirten mx^{m-1} nach dem Modulus p gemeinschaftliche Divisoren haben; da aber m nicht durch p theilbar, und folglich mx^{m-1} auch nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ ist, so hat mx^{m-1} nach dem Modulus p nur solche primäre Primfactoren, welche $\equiv x$ sind; und offenbar hat $x^m - 1$ keinen solchen Primfactor nach dem Modulus p, da sonst für $x \equiv 0$ auch $x^m - 1 \equiv 0$ werden müfste, was ja nicht der Fall ist.

Mithin sind die beiden Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ identisch; jedes α^μ und folglich auch jedes α^r genügt also einer und derselben irreductibeln Gleichung $f(x) = 0$, wenn r relative Primzahl gegen m ist. W. Z. B. W.

Göttingen, im October 1856.

3.

Über die Erzeugnisse krummer projektivischer Gebilde.

(Von Herrn *H. Schröter* in Breslau.)

In den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Januar 1856 *) hat Herr Professor ***Steiner*** eine besondere Kurve dritter Klasse und vierten Grades beschrieben, welche beim geradlinigen Dreieck auftritt und viele interessante Eigenschaften hat. In der angeführten Abhandlung erscheint diese Kurve als die Enveloppe aller derjenigen Geraden (Fufspunktenlinien), welche man erhält, wenn man aus den Peripheriepunkten des einem Dreiecke umbeschriebenen Kreises jedesmal die drei Perpendikel auf die Seiten desselben fällt, deren Fufspunkte in einer solchen Geraden liegen. Dieselbe Kurve läfst sich aber auch auf eine andere Art definiren, wobei sie als specieller Fall des Erzeugnisses zweier projektivischer Gebilde (Punktreihen) erscheint, deren eines sich auf einer Geraden, das andere auf einem Kegelschnitte befindet, und zwar ist die Gerade die unendlich entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ und der Kegelschnitt ein Kreis (a. a. O. m^2 genannt), endlich die Gebilde selbst in diesem speciellen Falle projektivisch gleich, aber ungleichliegend (***Steiner:*** Abhängigkeit geom. Gest. pag. 64).

Die Definition ist nämlich folgende:

Durch einen Punkt a eines Kreises geht ein fester Strahl aa_1 und ein beweglicher Strahl ax, welcher in x den Kreis zum andern Male trifft; trägt man den Winkel xaa_1 an den Schenkel a_1a entgegengesetzt an, so dafs der andere Schenkel ax_1 dieselbe Neigung zu aa_1 hat, wie ax zu aa_1 und zieht dann durch den Punkt x eine Parallele zu ax_1, so wird dieselbe eine Kurve dritter Klasse einhüllen, während der Punkt x den Kreis durchläuft.

Diese Kurve ist mit der von Herrn Professor ***Steiner*** untersuchten identisch. Denkt man sich x_1 als denjenigen Punkt der unendlich entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$, welcher durch die Richtung ax_1 bestimmt wird, so hat man zwei projektivische Gebilde, eine krumme Punktreihe x auf dem Kreise und eine

*) Abgedruckt in diesem Journal Bd. LIII, pag. 231.

Punktreihe x_1 auf $\mathfrak{G}_x$; die Verbindungslinien (Projektionsstrahlen) je zweier entsprechender Punkte hüllen die genannte Kurve dritter Klasse ein und die beiden Gebilde selbst sind projektivisch, denn verbindet man einerseits einen beliebigen festen Punkt $\boldsymbol{B}$ des Kreises mit dem veränderlichen Punkte x und anderseits einen beliebigen festen Punkt $\boldsymbol{P}$ der Ebene mit dem jedesmal entsprechenden x_1, so erhält man zwei gewöhnliche Strahlbüschel $\boldsymbol{Bx}$ und $\boldsymbol{Px_1}$, welche zufolge der Konstruktion projektivisch gleich aber ungleichliegend sind; mithin sind es auch die Gebilde x und x_1 selbst, deren projektivische Beziehung auf jene zurückgeführt wird. Aus dieser Definition der besonderen Kurve dritter Klasse folgen ohne Schwierigkeit die Haupteigenschaften derselben, was hier nicht näher ausgeführt werden soll.

Das Verdienst auf die Projektivität der Kegelschnitte als krummer Gebilde aufmerksam gemacht zu haben, gebührt *Göpel;* (Bd. XXXVI pag. 317 dieses Journals) indefs hat derselbe nur einen speciellen Fall näher untersucht: zwei projektivische Punktreihen *auf demselben Kegelschnitt,* als deren Erzeugnifs ein den gegebenen doppelt berührender Kegelschnitt auftritt. In dem Folgenden soll zuvörderst das Erzeugnifs einer krummen Punktreihe auf einem beliebigen Kegelschnitt mit einer projektivischen Punktreihe auf einer beliebigen Geraden aufgesucht werden, dessen specieller Fall die *Steiner*sche Kurve ist, dann aber allgemein das Erzeugnifs zweier projektivischer krummer Punktreihen auf zwei beliebigen Kegelschnitten, wovon die *Göpel*sche Untersuchung ein specieller Fall ist. Die polare Nebenbetrachtung, bei welcher an Stelle einer krummen Punktreihe ein krummes Tangentenbüschel tritt, führt zu ganz analogen Resultaten, die sich auch aus den ersteren vermittelst bekannter Prinzipien ableiten lassen.

I.

Es ist ein Kegelschnitt $\boldsymbol{K}$ und darauf eine Reihe von Punkten $\boldsymbol{abc}\ldots$ gegeben, als deren allgemeiner Repräsentant ein Punkt x, der den ganzen Kegelschnitt durchläuft, gesetzt werden mag, aufserdem eine Gerade $\mathfrak{G}$ mit einer Punktreihe $a_1 b_1 c_1 \ldots x_1 \ldots$ und die beiden Gebilde sind so auf einander projektivisch bezogen, dafs ein Strahlbüschel $\boldsymbol{B}$, welches seinen Mittelpunkt $\boldsymbol{B}$ irgendwo im Kegelschnitte $\boldsymbol{K}$ hat, mit der Punktreihe x_1 projektivisch ist, d. h. wenn man einen beliebigen festen Punkt $\boldsymbol{P}$ mit x_1 verbände, der Schnittpunkt von $\boldsymbol{Bx}$ und $\boldsymbol{Px_1}$ einen gewissen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ beschriebe. Bekanntlich ist durch drei Paar willkührlich gewählte entsprechende Punkte die ganze projektivische Beziehung eindeutig festgestellt, so dafs leicht zu jedem beliebigen

vierten Punkte x der entsprechende x_1 und umgekehrt konstruirt werden kann, wozu man sich am einfachsten des Hülfskegelschnitts $\mathfrak{K}$ bedient, den man als gegeben ansehen kann. Die Wahl des Punktes B auf dem Kegelschnitte K ist dabei ganz willkührlich, weil wenn wir B beliebig auf dem Kegelschnitte K verändern, wegen der Fundamentaleigenschaft des Kegelschnitts alle diese Strahlbüschel unter einander projektivisch sind.

Die Verbindungslinie je zweier entsprechender Punkte x und x_1 wird eine gewisse Kurve einhüllen, welche das Erzeugnifs der beiden projektivischen Gebilde heifst und es ist leicht zu sehen, dafs dieselbe von der dritten Klasse ist. In der That nehmen wir einen beliebigen Punkt B im Kegelschnitte K, so ist $B(a, b, c \ldots x \ldots)$ ein Strahlbüschel und verbinden wir einen beliebigen Punkt P in der Ebene mit der Punktreihe $a_1, b_1, c_1 \ldots x_1 \ldots$, so ist $P(a_1, b_1, c_1 \ldots x_1 \ldots)$ ein zweites Strahlbüschel; die beiden Strahlbüschel sind aber der Definition zufolge projectivisch, erzeugen also einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, den Ort des Schnittpunktes von Bx und Px_1; dieser geht durch B und P hindurch, trifft also den Kegelschnitt K im Allgemeinen nur noch in drei Punkten u, v, w aufser B und die drei Geraden Pu, Pv, Pw werden die drei von P an die gesuchte Kurve zu legenden Tangenten sein, denn es ist klar, dafs jede derselben durch zwei entsprechende Punkte beider Gebilde geht; da sich also von einem beliebigen Punkte P an die Kurve im Allgemeinen nur drei Tangenten legen lassen, so ist die ***Kurve dritter Klasse*** und es folgt zugleich dafs von den drei Tangenten, welche sich aus einem Punkte an die Kurve legen lassen, nothwendig immer eine reell sein mufs, während die beiden andern auch imaginär sein können. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ trifft ferner die Gerade $\mathfrak{G}$ im Allgemeinen in zwei Punkten p und π; die Geraden Bp und $B\pi$ sind aus demselben Grunde zwei von den Tangenten, welche sich aus B an die Kurve dritter Klasse legen lassen; die dritte erhalten wir, wenn wir den Punkt B_1 in der Geraden $\mathfrak{G}$ aufsuchen, welcher vermöge der projektivischen Beziehung dem Punkte B als im Kegelschnitt gelegen, entsprechend ist; BB_1 ist dann die dritte Tangente an die Kurve. In dem besonderen Falle der *Steiner*schen Kurve wird der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ jedesmal eine gleichseitige Hyperbel sein, weil er das Erzeugnifs zweier gleicher und ungleichliegender Strahlbüschel ist.

Insbesondere können wir mit dem Punkte P in den Kegelschnitt K hineinrücken, dann fällt einer der drei Punkte u, v, w mit P zusammen, d. h. wenn P auf dem Kegelschnitte K selbst liegt, so sind zwei von den aus P an die Kurve zu legenden Tangenten diejenigen beiden Strahlen, welche von

P nach den beiden noch übrigen Schnittpunkten der Kegelschnitte K und $\mathfrak{K}$ hingehen, während die dritte die Tangente in P am Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ ist.

Der Kegelschnitt K und die Gerade $\mathfrak{G}$ schneiden sich im Allgemeinen in zwei Punkten e und f welche, als auf dem Kegelschnitte liegend betrachtet, zwei bestimmte Punkte e_1 und f_1 auf der Geraden $\mathfrak{G}$ projektivisch entsprechend haben; weil nun ee_1 und ff_1 zwei Tangenten der Kurve sind, so ist die Gerade $\mathfrak{G}$ selbst eine ***Doppeltangente;*** dies ergiebt sich auch daraus, dafs wenn wir mit P insbesondere in die Gerade $\mathfrak{G}$ hineinrücken, der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in ein Linienpaar zerfällt, dessen einer Theil die Gerade $\mathfrak{G}$ selbst ist, welche also weil sie den Kegelschnitt K in zwei Punkten e und f schneidet, eine Doppeltangente der Kurve sein mufs; die dritte aus diesem besonderen Punkte P an die Kurve zu legende Tangente ist die Verbindungslinie PP', wenn P' der auf dem Kegelschnitte K liegende dem P entsprechende Punkt ist und BP' der andere Theil des Linienpaars, in welches der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ zerfallen ist. Es ergiebt sich zugleich, dafs die Gerade $\mathfrak{G}$ eine reelle oder imaginäre Doppeltangente der Kurve sein wird je nachdem die Schnittpunkte e und f von K und $\mathfrak{G}$ reell oder imaginär sind. In dem besonderen Falle der *Steiner*schen Kurve ist die unendlich entfernte Gerade eine imaginäre Doppeltangente.

Um auf einem beliebigen Projektionsstrahl xx_1 den ***Berührungspunkt mit der Kurve dritter Klasse*** zu finden, denken wir uns einen unendlich nahen Punkt x' des Kegelschnitts und suchen den entsprechenden x_1' der Geraden $\mathfrak{G}$; der Schnittpunkt von xx_1 und $x'x_1'$ wird der gesuchte Berührungspunkt τ sein; es ist aber xx' die Tangente T im Punkte x am Kegelschnitt K und zur Auffindung des Berührungspunktes τ genügt es den Kegelschnitt K durch die Tangente T zu ersetzen (weil beide das allein in Betracht kommende Element des Kegelschnitts gemein haben); wir lassen daher die Gerade T von dem Strahlbüschel $B\,(a, b, c\ldots)$ und die Gerade $\mathfrak{G}$ von dem Strahlbüschel $P(a_1, b_1, c_1\ldots)$ in je zwei projektivischen Punktreihen treffen, deren Erzeugnifs ein Kegelschnitt sein wird, welcher den bestimmten Projektionsstrahl xx_1 in dem gesuchten Berührungspunkte τ tangiren wird. Hieraus ergiebt sich leicht eine Konstruktion des Berührungspunktes, welche wegen der Willkührlichkeit des Mittelpunktes B auf verschiedene Arten modificirt werden kann. Lassen wir den Punkt B auf dem Kegelschnitte K ganz willkührlich, so können wir folgendermaafsen konstruiren: Die Tangente T im Punkte x am Kegelschnitte K treffe die Gerade $\mathfrak{G}$ in s; trifft der Strahl Bs etwa in r den Kegelschnitt K zum

andern Male, so hat r einen bestimmten entsprechenden Punkt r_1 auf der Geraden $\mathfrak{G}$ und anderseits wird der Punkt s als auf der Geraden $\mathfrak{G}$ liegend einen bestimmten entsprechenden Punkt s' auf dem Kegelschnitt K haben; der Strahl Bs' möge T in t treffen; ziehen wir dann xr_1 und x_1t, die sich in σ schneiden, endlich $s\sigma$ welches den Projektionsstrahl xx_1 in τ treffe, so ist τ der gesuchte Berührungspunkt mit der Kurve dritter Klasse.

Aus dem Vorigen ergiebt sich zugleich dafs, wenn der Projektionsstrahl xx_1 zufällig die Eigenschaft besäfse, dafs er in dem Punkte x den Kegelschnitt K berührte, alsdann der Punkt x zugleich der Berührungspunkt der Tangente xx_1 mit der Kurve dritter Klasse sein müfste, d. h. der Kegelschnitt K mit der Kurve dritter Klasse in dem Punkte x dieselbe Tangente hätte, mithin beide sich berührten. Wir wollen sehen, wo und wie oft dieser besondere Fall eintritt. Denken wir uns den Pol Π der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf den Kegelschnitt K konstruirt, so wird jedesmal die Polare X_1 eines bestimmten Punktes x_1 der Geraden $\mathfrak{G}$ durch den Punkt Π laufen und ein Strahlbüschel beschreiben, welches bekanntlich mit der Punktreihe x_1 projektivisch ist; das Strahlbüschel Bx ist mit der Punktreihe x_1 projektivisch, also auch mit dem Strahlbüschel X_1; die beiden letzteren erzeugen also einen Kegelschnitt, welcher den Kegelschnitt K aufser in dem Punkte B nur noch in drei andern Punkten u_0, v_0, w_0 trifft; diese besitzen die Eigenschaft, dafs in ihnen *die Kurve dritter Klasse den Kegelschnitt drei Mal berührt,* denn die Tangente in jedem dieser Punkte am Kegelschnitt K läuft jedesmal durch den entsprechenden Punkt der Geraden $\mathfrak{G}$, weil die Polare dieses letzteren durch den entsprechenden Punkt des Kegelschnitts K geht.

Aus der obigen allgemeinen Konstruktion des Berührungspunktes lassen sich auch leicht die beiden Berührungspunkte finden, in welchen die Doppeltangente $\mathfrak{G}$ die Kurve dritter Klasse tangirt. Wenn nämlich e und f die beiden Schnittpunkte von K und $\mathfrak{G}$ heifsen und dieselben als im Kegelschnitt K liegend betrachtet ihre entsprechenden e_1 und f_1 auf der Geraden $\mathfrak{G}$ haben, so sind e_1 und f_1 die Berührungspunkte der Doppeltangente mit der Kurve, also mit den beiden Schnittpunkten e und f gleichzeitig reell oder imaginär.

Gehen wir wie zu Anfang von einem beliebigen Punkte B des Kegelschnitts und einem beliebigen Punkte P in der Ebene aus und ziehen Bx und Px_1 wo x und x_1 ein Paar entsprechender Punkte beider Gebilde sind, so wird der Schnittpunkt von Bx und Px_1 einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ beschreiben, welcher den K in noch drei Punkten u, v, w und die Gerade $\mathfrak{G}$ in zwei

Punkten p und π trifft; Pu, Pv, Pw sind die drei von P aus an die Kurve dritter Klasse zu legenden Tangenten, Bp und $B\pi$ zwei von den aus B an dieselbe zu führenden Tangenten, während die dritte BB_1 ist, wenn B_1 der dem B entsprechende Punkt auf der Geraden $\mathfrak{G}$. Wir können jetzt eine doppelte Veränderlichkeit in die Figur eintreten lassen, einmal indem wir B verändern und zweitens indem wir P verändern. Halten wir zuerst den Punkt P fest, so bleiben auch die drei aus ihm an die Kurve gelegten Tangenten unverändert, welche die Gerade $\mathfrak{G}$ in u_1, v_1, w_1 und den Kegelschnitt K in drei zugehörigen Punkten u, v, w treffen; die Punkte u, v, w bleiben also auch fest; dagegen wird sich der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ verändern, wenn wir mit dem Punkte B den ganzen Kegelschnitt K durchlaufen und da er immer durch vier feste Punkte gehen mufs, so erhalten wir ein Kegelschnittbüschel von vier Punkten (P,u,v,w) von denen auch zwei imaginär sein können. Das Kegelschnittbüschel schneidet die Gerade $\mathfrak{G}$ in einem Punktsystem (p,π) (Involutionssystem) und den Kegelschnitt K in dem jedesmaligen vierten Punkte B, so dafs Bp und $B\pi$ ein Tangentenpaar der Kurve dritter Klasse sind, welches auch imaginär sein kann, während die dritte Tangente BB_1 immer reell ist. Bekanntlich hat ein Punktsystem (p,π) im Allgemeinen zwei sogenannte Asymptotenpunkte, d. h. es kommt zweimal vor, dafs ein Paar konjugirter Punkte p und π zusammenfallen, oder was dasselbe ist, unter allen Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ des Büschels giebt es im Allgemeinen zwei, welche die Gerade $\mathfrak{G}$ berühren (die allerdings auch imaginär sein können); diese beiden Kegelschnitte mögen in den Punkten m und n die Gerade $\mathfrak{G}$ berühren und in den Punkten m_0 und n_0 den K jedesmal im vierten Punkte schneiden; dann fallen auf die Gerade m_0m zwei Tangenten der Kurve dritter Klasse zusammen und ebenso auf n_0n, mithin sind m_0 und n_0 zwei Punkte der Kurve selbst. Die Kurve dritter Klasse schneidet also den Kegelschnitt K aufser dafs sie ihn in drei Punkten u_0, v_0, w_0 berührt, wie wir oben gesehen haben, noch in zwei andern Punkten m_0 und n_0. In dem besonderen Falle der *Steiner*'schen Kurve sind diese beiden übrigen Schnittpunkte imaginär, weil das Punktsystem ein Kreissystem ist und also keine reellen Asymptotenpunkte hat.

Zweitens halten wir nun den Punkt B fest und verändern den Punkt P auf einer beliebigen festen geraden Linie L; dann wird der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ sich verändern; es bleiben aber von ihm die drei Punkte B, p, π fest und wie leicht zu sehen noch ein vierter; denn es möge die Gerade L in r_1 die $\mathfrak{G}$ treffen und dem r_1 der bestimmte Punkt r auf dem Kegelschnitte K ent-

sprechend sein, endlich Br in ϱ die Gerade L schneiden, so mufs der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ nothwendig immer durch den Punkt ϱ laufen, welche Lage auch P auf der Geraden L habe, weil sich in ϱ immer zwei entsprechende Strahlen Pr_1 und Br schneiden. Bei der Veränderung von P wird also der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ wiederum ein Kegelschnittbüschel von vier festen Punkten (B, p, π, ϱ) durchlaufen und zu jedem Punkte P der Geraden L gehört ein bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ dieses Büschels, welcher in u, v, w jedesmal den Kegelschnitt K trifft, so dafs Pu, Pv, Pw die drei aus P an die Kurve dritter Klasse zu führenden Tangenten sind. Wenn wir nun den Punkt P die Gerade L durchlaufen lassen, so fragt es sich, wie oft es vorkommen wird, dafs einmal von den drei Punkten u, v, w zwei zusammenfallen, d. h. dafs der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ den K berührt; so oft dies nämlich der Fall ist, wird offenbar der zugehörige Punkt P jedesmal ein Punkt der Kurve selbst sein; diese Anzahl giebt also den Grad unserer Kurve dritter Klasse an.

Die Frage, wie viel Kegelschnitte es giebt, welche durch vier gegebene Punkte gehen und einen beliebig gegebenen Kegelschnitt berühren, ist gelegentlich von Herrn *Steiner* in einer Abhandlung: „Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe, etc." (Bd. XXXVII, pag. 189 dieses Journals) beantwortet; es giebt im Allgemeinen *sechs* solche Kegelschnitte, wenn aber der zu berührende Kegelschnitt durch einen der vier gegebenen Punkte hindurchgeht, so fallen in den Kegelschnitt, welcher durch die drei andern Punkte geht und in diesem vierten den gegebenen Kegelschnitt berührt, zwei Lösungen der Aufgabe zusammen und es bleiben nur noch *vier* andere Kegelschnitte übrig, welche der Aufgabe Genüge leisten *). Dies findet gerade in unserm Falle statt, folglich ist unsere Kurve dritter Klasse *vom vierten Grade*.

---

*) Da Herr *Steiner* a. a. O. keine Andeutung giebt, wie man zu diesem Resultat gelangt, so sei es mir erlaubt in wenigen Worten eine Lösung dieser Aufgabe anzugeben, welche sich folgendermaafsen aussprechen läfst:

Es ist ein Kegelschnittbüschel von vier Punkten gegeben und ein beliebiger anderer Kegelschnitt K; wie viel Kegelschnitte des Büschels giebt es, welche gleichzeitig K berühren?

Bekanntlich laufen, wenn man von einem beliebigen Punkte P in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte eines Büschels die Polaren nimmt, alle durch denselben Punkt p, den konjugirten Pol zu P; konstruirt man auch die Polare von P in Bezug auf den Kegelschnitt K, so wird diese im Allgemeinen nicht durch p gehen; es giebt aber Punkte P von solcher Beschaffenheit, dafs ihre Polare in Bezug auf K durch den harmonischen Pol p in Bezug auf das Kegelschnittbüschel hindurchgeht und diese haben zum Ort eine gewisse Kurve dritten Grades (*Tripelkurve*), welche zugleich der geometrische Ort sämmtlicher gemeinschaftlicher Tripelpunkte des Kegelschnitts K mit sämmtlichen Kegelschnitten des Büschels ist (*Hesse:* Ueber die Wendepunkte der Kurven dritter Ordnung,

Das Ergebnifs der vorstehenden Untersuchung ist also folgendes:

Das Erzeugnifs zweier projektivischer Gebilde, einer krummen Punktreihe auf einem Kegelschnitt und einer geraden Punktreihe auf einer Geraden ist eine Kurve dritter Klasse und vierten Grades, welche die gegebene Gerade zur Doppeltangente hat und den gegebenen Kegelschnitt dreimal berührt.

II.

Es sind zwei Kegelschnitte K und K_1 gegeben; die Punkte des einen $a, b, c \ldots x \ldots$ werden auf die Punkte des andern $a_1, b_1, c_1 \ldots x_1 \ldots$ dergestalt bezogen, dafs wenn B ein willkührlicher Punkt in K und B_1 ein ebenso willkührlicher Punkt auf K_1 die beiden Strahlbüschel $B(a, b, c, \ldots x \ldots)$ und $B_1(a_1, b_1, c_1 \ldots x_1 \ldots)$ projektivisch sind, d. h. einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ erzeugen, der durch die beiden Mittelpunkte B und B_1 der Strahlbüschel hindurchgeht und die ganze projektivische Beziehung der beiden krummen Gebilde eindeutig feststellt; die Wahl der beiden Punkte B und B_1 respektive auf K und K_1 ist dabei vollkommen willkührlich wegen der bekannten Fundamentaleigenschaft der Kegelschnitte und die projektivische Beziehung der beiden krummen Punktgebilde wird durch drei Paar willkührlich als entsprechend gewählte Punkte vollkommen und eindeutig bestimmt sein. Der Verbindungsstrahl xx_1 je zweier entsprechender Punkte wird eine Kurve einhüllen, welche das Erzeugnifs der beiden krummen Gebilde heifst und wir wollen zunächst bestimmen von der wievielsten Klasse dasselbe ist. Nehmen wir einen beliebigen Punkt P in der

---

Bd. XXVIII, pag. 105 dieses Journals). Es ist leicht durch eine einfache synthetische Betrachtung einzusehen, dafs der geometrische Ort solcher Punkte P eine Kurve dritten Grades ist; dies auszuführen möge aber hier unterbleiben. Die Tripelkurve schneidet nun im Allgemeinen den Kegelschnitt K in 6 Punkten und ein solcher Schnittpunkt S besitzt die Eigenschaft, dafs seine Polare in Bezug auf K d. h. die Tangente an K in S durch einen Punkt s läuft, in dem sich die sämmtlichen Polaren von S in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels treffen; nehmen wir aber insbesondere denjenigen Kegelschnitt des Büschels, welcher durch den Punkt S selbst hindurchgeht, so mufs Ss eine Tangente an ihm im Punkte S sein; folglich haben beide Kegelschnitte im Punkte S dieselbe Tangente, berühren sich also. Es giebt daher im Allgemeinen 6 Kegelschnitte des Büschels, welche den Kegelschnitt K berühren und diese gehen durch die 6 Schnittpunkte der Tripelkurve mit dem Kegelschnitte K. Geht der Kegelschnitt K insbesondere durch einen der vier Mittelpunkte des Büschels, so wird dies offenbar ein Doppelpunkt der Kurve dritten Grades; diese kann also im Allgemeinen den Kegelschnitt K nur noch in vier andern Punkten treffen und es giebt daher nur noch vier Berührungskegelschnitte mit Hinweglassung der sich von selbst verstehenden Lösung nämlich desjenigen Kegelschnitts, welcher durch die vier Mittelpunkte des Büschels geht und in dem vierten gleichzeitig dem K angehörigen Punkte, diesen Kegelschnitt K berührt.

Ebene und ziehen Px, so trifft dieser Strahl den Kegelschnitt K noch in einem zweiten Punkte ξ und verbinden wir B mit x und ξ, so sind nach bekannten Sätzen Bx und $B\xi$ ein Paar konjugirter Strahlen eines *Strahlsystems* (Involutionsbüschel) welches erzeugt wird, wenn wir den von P ausgehenden Strahl eine ganze Umdrehung durchlaufen lassen; den Punkten x und ξ entsprechen nun zwei bestimmte Punkte x_1 und ξ_1 auf dem Kegelschnitte K_1 und der Verbindungsstrahl $x_1\xi_1$ wird immer durch einen festen Punkt P_1 gehen, so dafs er ein Strahlbüschel beschreibt, welches mit dem Strahlbüschel P projektivisch ist. Dies ist in der That leicht einzusehen, wenn wir uns zur Konstruktion der entsprechenden Punkte x_1 und ξ_1 des Hülfskegelschnitts $\mathfrak{K}$ bedienen. Die beiden konjugirten Strahlen Bx und $B\xi$, mögen resp. in y und η den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ treffen, dann mufs bekanntlich die Verbindungslinie $y\eta$, weil jene ein Paar konjugirte Strahlen eines Strahlsystems sind, durch einen festen Punkt Q laufen; verbinden wir jetzt y und η mit B_1 und möge B_1y und $B_1\eta$ den Kegelschnitt K_1 respektive in x_1 und ξ_1 treffen, so werden, weil $y\eta$ durch einen festen Punkt Q läuft, auch B_1y und $B_1\eta$ ein Paar konjugirter Strahlen eines Strahlsystems sein, also wird auch in dem Kegelschnitt K_1, der mit $\mathfrak{K}$ den Punkt B_1 gemeinschaftlich hat, die Verbindungslinie $x_1\xi_1$ durch einen festen Punkt P_1 laufen müssen; dafs ferner die dadurch entstehenden beiden Strahlbüschel P und P_1 projektivisch sind, ist leicht zu sehen, weil beide nach bekannten Sätzen mit dem Strahlbüschel Q projektivisch sind; wir erhalten also zwei projektivische Strahlbüschel P und P_1, die einen Kegelschnitt Σ erzeugen, der durch die beiden Mittelpunkte P und P_1 selbst hindurchgeht; die beiden Kegelschnitte Σ und K_1 treffen sich im Allgemeinen in vier Punkten s, u, v, w, die vier Strahlen Ps, Pu, Pv, Pw sind vier von P aus an die Kurve zu führende Tangenten; ebenso treffen sich die beiden Kegelschnitte Σ und K in vier Punkten s', u', v', w' und die vier Strahlen P_1s', P_1u', P_1v', P_1w' sind die vier von P_1 an die Kurve zu führenden Tangenten, denn jeder dieser Strahlen besitzt die Eigenschaft durch zwei entsprechende Punkte der beiden krummen Gebilde zu gehen; nehmen wir nämlich irgend einen Punkt σ des Kegelschnitts Σ und ziehen $P\sigma$ und $P_1\sigma$, so trifft der erstere Strahl den K in zwei Punkten x und ξ und der letztere den K_1 in den beiden entsprechenden x_1 und ξ_1; nehmen wir mithin für σ einen der vier Schnittpunkte von Σ und K_1, etwa s, so wird Ps den K in x und ξ, P_1s aber den K_1 in s selbst und einem zweiten Punkte treffen und es mufs s der entsprechende zu x oder ξ sein; da nun P, x, ξ, s in einer Geraden liegen,

so geht der Strahl Ps durch zwei entsprechende Punkte der beiden krummen Gebilde, ist also Tangente an der gesuchten Ortskurve und da sich von einem beliebigen Punkte P im Allgemeinen und höchstens vier Tangenten legen lassen, wie wir eben gesehen haben, so ist die ***Kurve vierter Klasse.***

Zu jedem Punkte P in der Ebene gehört ein bestimmter Punkt P_1, wie wir eben gesehen haben, und ein bestimmter Kegelschnitt Σ, welcher durch P und P_1 geht, K_1 in s, u, v, w und K in s', u', v', w' trifft. Rücken wir mit P insbesondere in den Kegelschnitt K hinein, so wird aus dem krummen Punktsystem (x, ξ) (ich bediene mich dieses Ausdruckes, dessen Bedeutung nach der Analogie keiner Erklärung bedarf) nur eine einfache Punktreihe x und wir erhalten ein gewöhnliches Strahlbüschel Px; dem Punkte P entspricht auf dem Kegelschnitt K_1 ein bestimmter Punkt P_1 und dem jedesmaligen x ein entsprechender x_1; die beiden Strahlbüschel Px und P_1x_1 sind projektivisch und erzeugen also einen Kegelschnitt Σ, welcher K_1 nur noch in drei Punkten u, v, w und K nur noch in drei Punkten u', v', w' trifft; dann sind PP_1, Pu, Pv, Pw die vier von P an die Kurve zu legenden Tangenten und P_1P, P_1u', P_1v', P_1w' die vier von P_1 an dieselbe zu führenden Tangenten; eine ganz ähnliche Modifikation tritt in dem speciellen Falle ein, wenn P in den Kegelschnitt K_1 zu liegen kommt, wie dies leicht zu sehen ist.

Wenn wir irgend einen Projektionsstrahl xx_1 haben, so ist es leicht, den ***Berührungspunkt mit der Kurve*** zu finden, wenn wir uns wie oben der Methode des Unendlich-Kleinen bedienen. Denken wir uns in x die Tangente T an K und in x_1 die Tangente T_1 an K_1 ferner Bx und B_1x_1 gezogen, die sich in einem Punkte y des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ treffen, dann können wir, um den Berührungspunkt auf dem Projektionsstrahle xx_1 zu finden an Stelle des Kegelschnitts K die Gerade T und an Stelle des Kegelschnitts K_1 die Gerade T_1 substituiren, denn jede dieser Geraden hat mit dem resp. Kegelschnitt das Kurvenelement gemein, was allein in Betracht kommt. Die beiden projektivischen Strahlbüschel $B\ (a, b, c \ldots x \ldots)$ und $B_1\ (a_1, b_1, c_1 \ldots x_1 \ldots)$ treffen also die Geraden T und T_1 in zwei projektivischen Punktreihen und die Verbindungslinien hüllen einen Kegelschnitt ein, welcher sowohl die Geraden T und T_1 berührt, als auch den Projektionsstrahl xx_1 und letzteren gerade in dem gesuchten Berührungspunkte mit der Kurve vierter Klasse. Hieraus leitet sich leicht eine Konstruktion des Berührungspunktes ab, die allein mittelst des Lineals ausführbar ist und noch durch besondere Annahme der Punkte B und B_1,

welche auf den resp. Kegelschnitten K und K_1 willkührlich sind, simplificirt werden kann. Demnach liefse sich der Berührungspunkt τ etwa, wie folgt, konstruiren: Die beiden Tangenten T und T_1 in den Punkten x und x_1 an K und K_1 mögen sich in S schneiden; man ziehe BS, dem ein Strahl B_1r_1 in dem andern Strahlbüschel projektivisch entspricht, welcher in r_1 die Gerade T_1 treffe; ebenso ziehe man B_1S, dem ein Strahl Br entspricht, welcher in r die Gerade T treffe. Zieht man alsdann xr_1 und x_1r die sich in σ treffen und $S\sigma$, welches in τ den Projektionsstrahl xx_1 trifft, so ist τ der gesuchte Berührungspunkt.

Ein besonders interessanter specieller Fall könnte nun hiebei eintreten, dafs nämlich der Projektionsstrahl xx_1 gerade eine Tangente am Kegelschnitte K im Punkte x wäre; dann würde derselbe mit T zusammenfallen und der Berührungspunkt τ müfste nothwendig mit x coincidiren, d. h. die Kurve vierter Klasse und der Kegelschnitt K hätten in x eine und dieselbe Tangente, würden sich mithin in x selbst berühren; wir wollen sehen wo und wie oft dies eintritt. Wenn die Tangente in x am Kegelschnitte K durch x_1 gehen soll, so mufs die Polare von x_1 in Bezug auf K, welche wir X_1 nennen wollen, durch den Pol der Tangente in x d. h. durch x selbst gehen und umgekehrt, wenn X_1 durch x geht, dann wird die Tangente in x an K durch x_1 gehen; wir nehmen also sämmtliche Polaren X_1 der krummen Punktreihe x_1 in Bezug auf den Kegelschnitt K; diese hüllen bekanntlich einen bestimmten Kegelschnitt (Polarkegelschnitt) ein und bilden ein krummes Tangentenbüschel, welches mit der krummen Punktreihe x_1 projektivisch ist; zu dem Punkte x_1 gehört jedesmal ein entsprechender Punkt x und das Strahlbüschel Bx ist mit der krummen Punktreihe x_1 also auch mit dem krummen Tangentenbüschel X_1 projektivisch. Das Erzeugnifs der beiden projektivischen Gebilde, des Strahlenbüschels Bx und des krummen Tangentenbüschels X_1 ist gerade das polare von dem in Nr. I. betrachteten, also eine Kurve dritten Grades, welche den Punkt B zum Doppelpunkte hat; diese schneidet den Kegelschnitt K im Allgemeinen nur noch in vier andern Punkten s_0, u_0, v_0, w_0 und jeder dieser Schnittpunkte besitzt offenbar die gewünschte Eigenschaft, dafs seine Tangente an K durch den entsprechenden Punkt auf K_1 geht. Die Kurve vierter Klasse berührt also den Kegelschnitt K viermal in diesen vier Punkten s_0, u_0, v_0, w_0 und auf dieselbe Weise läfst sich zeigen, dafs sie auch den Kegelschnitt K_1 viermal berührt, so dafs wir also das Resultat aussprechen können: ***Die Kurve vierter Klasse berührt jeden der beiden gegebenen Kegelschnitte viermal.***

Zu demselben Resultate können wir auch auf etwas andere Art gelangen; indem wir einmal in der Punktreihe x am Kegelschnitte K die jedesmalige Tangente X ziehen und zweitens den entsprechenden Strahl B_1x_1, wo B_1 ein beliebiger fester Punkt des Kegelschnitts K_1, erhalten wir ein krummes Tangentenbüschel X und ein mit demselben projektivisches Strahlbüschel B_1x_1; diese erzeugen eine Kurve dritten Grades, welche den Punkt B_1 zum Doppelpunkte hat, also den Kegelschnitt K_1 im Allgemeinen nur noch in vier Punkten trifft; die denselben entsprechenden auf dem Kegelschnitte K befindlichen sind die vier Berührungspunkte der Kurve vierter Klasse mit dem Kegelschnitte K und auf ganz analoge Weise erhalten wir die vier Berührungspunkte mit dem Kegelschnitte K_1.

Nehmen wir in dem Kegelschnitte K einen Punkt B und ziehen Bx, in dem Kegelschnitt K_1 einen beliebigen Punkt $\mathfrak{B}_1$ (um Verwechselung zu vermeiden, schreiben wir $\mathfrak{B}_1$ statt B_1, weil B_1 den bestimmten dem B entsprechenden Punkt bezeichnet und $\mathfrak{B}_1$ beliebig sein soll) ziehen sodann $\mathfrak{B}_1x_1$, so sind die beiden Strahlbüschel Bx und $\mathfrak{B}_1x_1$ nach der Definition projektivisch und erzeugen also einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher K_1 nur noch in drei Punkten u, v, w und K in drei andern Punkten u', v', w' treffen wird; dann sind Bu, Bv, Bw drei Tangenten der Kurve, die vierte ist BB_1, wenn B_1 den auf K_1 liegenden dem B entsprechenden Punkt bezeichnet; ebenso sind $\mathfrak{B}_1u'$, $\mathfrak{B}_1v'$, $\mathfrak{B}_1w'$ drei aus $\mathfrak{B}_1$ an die Kurve gezogene Tangenten und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}$ die vierte, wenn $\mathfrak{B}$ den bestimmten dem $\mathfrak{B}_1$ entsprechenden Punkt auf K bezeichnet. Jetzt wollen wir den Punkt $\mathfrak{B}_1$ festhalten und B den ganzen Kegelschnitt K durchlaufen lassen; dann sind die vier von $\mathfrak{B}_1$ an die Kurve zu legenden Tangenten fest, also aufser der Tangente $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}$ auch die drei andern $\mathfrak{B}_1u'$, $\mathfrak{B}_1v'$, $\mathfrak{B}_1w'$ welche in u_1', v_1', w_1' den K_1 treffen und u', v', w' sind die drei den Punkten u_1', v_1', w_1' resp. entsprechenden also auch feste Punkte; der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ wird mithin obgleich er sich verändert immer durch vier feste Punkte $\mathfrak{B}_1$, u', v', w' laufen und den K in dem veränderlichen vierten Punkte B, K_1 aber in den drei veränderlichen Punkten u, v, w treffen, so dafs Bu, Bv, Bw jedesmal drei Tangenten der Kurve sind. Während nun der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ das ganze Kegelschnittbüschel von vier festen Punkten durchläuft, wird es sich im Allgemeinen nur viermal ereignen (S. die obige Anmerkung) dafs er zugleich den K_1 berührt (denn K_1 hat mit $\mathfrak{K}$ den festen Punkt $\mathfrak{B}_1$ gemein) und diese vier Berührungskegelschnitte treffen K in vier Punkten, welches Punkte der Kurve vierter Klasse sind. In der That für einen solchen Be-

rührungskegelschnitt fallen von den drei Schnittpunkten u, v, w, also auch von den drei Tangenten Bu, Bv, Bw zwei zusammen; mithin mufs ein solcher besonderer Punkt B zugleich ein Punkt der Kurve sein, weil von den vier aus ihm an die Kurve zu legenden Tangenten zwei unendlich nahe zusammenfallen. Unsere Behauptung ist also gerechtfertigt und es folgt daraus, dafs die Kurve vierter Klasse aufserdem dafs sie jeden der beiden Kegelschnitte viermal berührt, auch noch jeden derselben in vier Punkten schneidet. Hieraus folgt schon, dafs die Kurve vierter Klasse, weil sie nur 12 Punkte mit einem Kegelschnitte gemein hat, nämlich die vier doppelt zu zählenden Berührungspunkte und die vier Schnittpunkte, vom sechsten Grade sein wird; wir wollen dies aber auch wie in Nr. I. direkt beweisen und zugleich den Grund dieser Beschränktheit der Kurve erkennen.

Nehmen wir ein beliebiges Paar entsprechender Punkte x und x_1 auf den beiden Kegelschnitten und halten dasselbe für den Augenblick fest, indem wir x mit der krummen Punktreihe $a, b, c \ldots$ und x_1 mit $a_1, b_1, c_1 \ldots$ verbinden, so erhalten wir zwei projektivische Strahlbüschel $x(a, b, c \ldots)$ und $x_1(a_1, b_1, c_1 \ldots)$ (die offenbar im Allgemeinen nicht perspektivisch sind); diese erzeugen also einen bestimmten Kegelschnitt S welcher durch x und x_1 geht, den K_1 in drei Punkten u, v, w und K in u', v', w' trifft, so dafs einerseits xx_1, xu, xv, xw und anderseits $x_1x, x_1u', x_1v', x_1w'$ jedesmal vier Tangenten der Kurve sind.

Jetzt verändern wir das beliebig angenommene Paar x und x_1 selbst, dann wird auch der Kegelschnitt S sich verändern und suchen insbesondere auf, wie oft es sich ereignet dafs der Kegelschnitt S in ein Linienpaar zerfällt; dann müssen nämlich die beiden ihn erzeugenden Strahlbüschel (x) und (x_1) perspektivisch sein, also auf die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen; wenn daher xx_1 den K zum andern Male in ξ und K_1 in ξ_1 trifft, so müssen auch ξ und ξ_1 ein Paar entsprechender Punkte sein; es wird also in diesem Falle xx_1 eine Doppeltangente der Kurve sein müssen; der andere Theil des Linienpaars bestimmt dann auf K_1 die Punkte v und w, so dafs xv und xw die beiden noch übrigen Tangenten aufser der Doppeltangente sind. So oft als der veränderliche Kegelschnitt S in ein Linienpaar zerfällt, so viel Doppeltangenten hat also die Kurve und jede Doppeltangente ist der eine Theil eines solchen Linienpaars. Wir erkennen nun leicht dafs der veränderliche Kegelschnitt S, welcher jedesmal durch zwei projektivische Strahlbüschel (x) und (x_1) erzeugt wird, beständig

durch drei feste aufserhalb liegende Punkte läuft; denn nehmen wir einmal zu Mittelpunkten zweier ihn erzeugender Strahlbüschel ein Paar x und x_1 und zweitens ein anderes Paar z und z_1, so wird der erste Kegelschnitt durch den Schnittpunkt von xz und x_1z_1, der andere durch den Schnittpunkt von zx und z_1x_1 gehen, was derselbe Punkt ist, und aufser diesem haben die beiden Kegelschnitte im Allgemeinen nur noch drei Punkte $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gemein. Durch diese drei Punkte müssen auch alle übrigen Kegelschnitte S hindurchgehen; denn der Punkt $\mathfrak{l}$ besitzt, weil er auf dem ersten Kegelschnitte liegt, die Eigenschaft, dafs wenn wir $\mathfrak{l}x$ ziehen, was den K zum andern Male in ξ treffe, die Verbindungslinie der beiden entsprechenden Punkte x_1, ξ_1 durch $\mathfrak{l}$ geht; weil er aber auch auf dem zweiten Kegelschnitte liegt, so besitzt er gleichzeitig die Eigenschaft, dafs wenn wir $\mathfrak{l}z$ ziehen, welches in ζ den K zum andern Male treffen mag, die Verbindungslinie der beiden entsprechenden Punkte z_1, ζ_1 ebenfalls durch $\mathfrak{l}$ geht; hieraus folgt dafs, wenn wir durch $\mathfrak{l}$ irgend einen Strahl ziehen, welcher den Kegelschnitt K in p und π treffe, die Verbindungslinie der beiden entsprechenden p_1 und π_1 ebenfalls durch $\mathfrak{l}$ gehen mufs; denn wir haben oben gesehen, dafs wenn wir um irgend einen Punkt P in der Ebene einen Strahl $Px\xi$ drehen, welcher in x und ξ den K trifft, die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte x_1, ξ_1 alle durch einen Punkt P_1 laufen; dieser ist bereits durch zwei Strahlen vollständig bestimmt; durch $\mathfrak{l}$ haben wir nun zwei Strahlen $\mathfrak{l}x\xi$ und $\mathfrak{l}z\xi$, die entsprechenden beiden Strahlen $x_1\xi_1$ und $z_1\zeta_1$ schneiden sich also in dem entsprechenden Punkte $\mathfrak{l}_1$, der hier, wie wir sehen mit $\mathfrak{l}$ identisch ist; wenn ich also alle übrigen Strahlen durch $\mathfrak{l}$ ziehe, so müssen auch alle übrigen entsprechenden durch $\mathfrak{l}$ laufen; mithin müssen alle Kegelschnitte S durch $\mathfrak{l}$ gehen und ebenso natürlich durch $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$. Diese drei festen Punkte $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, welche allein durch die gegebene projektivische Beziehung der beiden gegebenen Kegelschnitte bestimmt werden, besitzen also die besondere Eigenthümlichkeit, dafs in jeden derselben, als Punkt P der obigen anfänglichen Betrachtung aufgefafst, das zugehörige P_1 mit P zusammenfällt und es sind nur diese drei Punkte in der Ebene, welche die genannte Eigenschaft besitzen. Da der Kegelschnitt S durch die 5 Punkte x, x_1, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ jedesmal vollständig bestimmt ist und die drei Punkte $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ fest sind, so kann er nur dreimal in ein Linienpaar zerfallen, dessen einer Theil jedesmal eine Seite des Dreiecks $\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ sein wird; mithin hat die Kurve nach dem Obigen *drei Doppeltangenten* und bezeichnen wir die drei Seiten des Dreiecks $\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, so sind dieses die drei Doppeltangenten der Kurve,

wie leicht zu sehen ist; sei nämlich $\mathfrak{L}$ die Verbindungslinie der Punkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$, so wird kraft der Eigenschaft des Punktes $\mathfrak{m}$ jeder durch $\mathfrak{m}$ gezogene Strahl, welcher in p und π den K treffe, einen zugehörigen Strahl $p_1\pi_1$ (die Verbindungslinie der beiden entsprechenden Punkte von p und π) haben, der ebenfalls durch $\mathfrak{m}$ läuft und desgl. für $\mathfrak{n}$; ziehen wir nun insbesondere $\mathfrak{mn}$, welches in x^0 und ξ^0 den Kegelschnitt K treffe, so wird die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte x_1^0, ξ_1^0, weil der erstere Strahl durch $\mathfrak{m}$ geht, auch durch $\mathfrak{m}$ gehen müssen und weil er durch $\mathfrak{n}$ geht, auch durch $\mathfrak{n}$ gehen müssen, also mufs er $\mathfrak{mn}$ selbst sein; mithin fallen auf die Gerade $\mathfrak{L}$ zwei Tangenten $x^0x_1^0$ und $\xi^0\xi_1^0$, sie ist also eine Doppeltangente; dasselbe gilt von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$; zugleich geht aus der vorigen Betrachtung evident hervor, dafs von den drei Doppeltangenten nothwendig wenigstens eine und der Schnittpunkt der beiden andern reell sein mufs. Da die Kurve von der vierten Klasse ist und drei Doppeltangenten hat, so kann sie bekanntlich nur noch vom sechsten Grade sein; wir wollen dies aber auch schliefslich noch direkt beweisen.

Wir haben oben gesehen, dafs wenn wir durch einen beliebigen Punkt P Strahlen gehen lassen, deren jeder in x und ξ den Kegelschnitt K treffe, die Verbindungslinien der beiden entsprechenden Punkte x_1, ξ_1 sämmtlich durch einen bestimmten Punkt P_1 laufen, so dafs in P und P_1 als Mittelpunkten zwei Strahlbüschel entstehen, von denen wir gesehen haben dafs sie projektivisch sind und also einen Kegelschnitt Σ erzeugen, der einmal in s, u, v, w den K_1, anderseits in s', u', v', w' den K trifft; dann sind Ps, Pu, Pv, Pw und P_1s', P_1u', P_1v', P_1w' jedesmal vier von einem Punkte an die Kurve zu legende Tangenten. Es gehört also zu jedem beliebigen Punkte P ein bestimmter entsprechender Punkt P_1 und ein bestimmter Kegelschnitt Σ. Verändern wir jetzt den anfänglichen Punkt P auf einer beliebig gegebenen festen geraden Linie $\mathfrak{G}$, so wird mit ihm sich auch der zugehörige Punkt P_1 und Kegelschnitt Σ verändern; es ist aber leicht zu sehen dafs P_1 eine bestimmte Gerade $\mathfrak{G}_1$ durchläuft und der Kegelschnitt Σ ein Kegelschnittbüschel von vier festen Punkten. In der That, welche Lage auch der Punkt P auf der gegebenen Geraden $\mathfrak{G}$ haben mag, immer wird es durch P einen Strahl geben, der allen Strahlbüscheln P gemeinschaftlich ist, nämlich die Gerade $\mathfrak{G}$ selbst; treffe sie in x^0 und ξ^0 den Kegelschnitt K und seien x_1^0 ξ_1^0 die diesen entsprechenden Punkte auf dem Kegelschnitte K_1, so wird der Punkt P_1 immer auf dem Strahl x_1^0 ξ_1^0, den wir mit $\mathfrak{G}_1$ bezeichnen wollen, liegen müssen, also P_1 wird die bestimmte Gerade $\mathfrak{G}_1$ durchlaufen müssen; und zugleich ist

klar, weil $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ ein Paar entsprechender Strahlen für alle Lagen von P und P_1 sind, dafs der Schnittpunkt $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ allen Kegelschnitten Σ gemeinschaftlich sein mufs; die Kegelschnitte Σ laufen nun aufser durch den einen festen Punkt $\mathfrak{r}$ auch noch sämmtlich durch drei andere feste Punkte, nämlich die uns bereits bekannten Punkte $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, weil jeder derselben die oben erwähnte Eigenschaft hat dafs in ihm zwei entsprechende Punkte P und P_1 zusammenfallen. Da nun der Kegelschnitt Σ durch vier feste Punkte $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{r}$ läuft und die Gerade $\mathfrak{G}$ in dem veränderlichen Punkte P, den Kegelschnitt K_1 aber in den vier veränderlichen Punkten s, u, v, w trifft, so dafs Ps, Pu, Pv, Pw immer die vier von P an die Kurve zu legenden Tangenten sind, so suchen wir uns diejenigen Kegelschnitte des Büschels $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{r})$ auf, welche den Kegelschnitt K_1 berühren; deren giebt es nach der obigen Anmerkung in No. I. im Allgemeinen sechs; mithin giebt es in der Geraden $\mathfrak{G}$ sechsmal einen Punkt P von solcher Beschaffenheit, dafs von den vier aus ihm an die Kurve zu legenden Tangenten zwei unendlich nahe zusammenfallen, wo er denn selbst ein Punkt der Kurve sein mufs. Wir schliefsen also, dafs unsere Kurve vierter Klasse vom sechsten Grade ist und können das Ergebnifs der vorigen Untersuchung folgendermaafsen aussprechen:

Das Erzeugnifs zweier projektivischer krummer Punktreihen auf zwei beliebigen Kegelschnitten ist eine Kurve vierter Klasse und sechsten Grades, welche drei Doppeltangenten hat und jeden der beiden Kegelschnitte viermal berührt.

Die polare Nebenbetrachtung führt zu dem analogen Resultat, dafs *das Erzeugnifs zweier projektivischer krummer Tangentenbüschel**) *an zwei beliebigen Kegelschnitten eine Kurve vierten Grades und sechster Klasse ist, welche drei Doppelpunkte hat und jeden der beiden Kegelschnitte viermal berührt.* In mehreren Abhandlungen (Comptes rendus, tome XXXVII, pag. 272; *Chasles:* Sur les courbes du quatrième et du troisième ordre; suite pag. 372 et 437) hat Herr *Chasles* die Erzeugnisse zweier projektivischer Kegelschnittbüschel untersucht und gefunden, dafs dabei eine *allgemeine* Kurve vierter Ordnung (sowohl Grades wie Klasse) hervorgeht, deren Eigenschaften sich mit Leichtigkeit aus dieser rein synthetischen Definition ableiten lassen.

---

*) Unter Tangentenbüschel verstehen wir die sämmtlichen Tangenten eines Kegelschnitts, welche projektivisch bezogen werden können auf irgend ein anderes Gebilde vermittelst einer Punktreihe, in der sie von einer beliebigen aber festen Tangente desselben Kegelschnitts getroffen werden.

Abgesehen von der etwas verschiedenen Ausdrucksweise ist dies im Wesentlichen eine Verallgemeinerung der ursprünglich von ***Steiner*** erdachten Auffassungsweise der projektivischen Beziehung in der Art, dafs an Stelle des Projektionsstrahles ein Kegelschnitt tritt, also die Art und Weise der Beziehung eine krumme wird, während die auf einander bezogenen Gebilde wesentlich gerade sind; in der vorstehenden Untersuchung ist umgekehrt die Beziehungsweise eine gerade und die auf einander bezogenen Gebilde krumme und die bei dieser Auffassungsweise hervorgehenden Erzeugnisse, sind, wie wir gesehen haben nicht allgemein, sondern beschränkter Natur, weil es Kurven vierter Klasse (Grades) und nur sechsten Grades (Klasse) sind.

Breslau im April 1857.

4.

Mémoire sur la forme canonique des fonctions binaires.

(Par *M. A. Cayley.*)

L'idée de la forme canonique d'une fonction binaire de degré impair et la théorie de la réduction d'une pareille fonction à la forme canonique sont dues à M. *Sylvester* *), qui a, en outre étendu sa théorie aux fonctions binaires des degrés pairs 4 et 6. Mais il n'a établi nulle part l'idée générale de la forme canonique d'une fonction binaire d'un degré pair quelconque. Je me propose de reprendre cette théorie en considérant d'abord les fonctions binaires de degré impair et ensuite les fonctions binaires de degré pair.

Soit donc proposée la fonction de degré impair

$$(a, b, \ldots a')(x, y)^{2m-1}.$$

En désignant par le symbole Σ une somme de m termes on voit qu'on pourra écrire

$$(a, b, \ldots a')(x, y)^{2m-1} = \Sigma A(x + \alpha y)^{2m-1}.$$

L'expression qui forme le second membre de cette équation est appelée la forme canonique de la fonction donnée, et il s'agit de trouver les valeurs des quantités A, α.

En supposant que le produit des facteurs linéaires $x + \alpha y$ soit égal, à un facteur constant près, à

$$(a, b, \ldots a')(x, y)^m$$

la question peut s'énoncer sous la forme suivante: trouver une fonction de degré m, telle qu'en représentant par $x + \alpha y$ un facteur linéaire quelconque de cette fonction, la fonction donnée de degré $2m-1$ se reduise à la forme $\Sigma A(x + \alpha y)^{2m-1}$. La fonction de degré m contiendra un facteur constant

---

*) Les recherches de M. *Sylvester* sont contenues dans le mémoire intitulé „Sketch of a memoir on elimination, transformation and canonical forms" Camb. and Dublin Mathematical Journal t. VI, p. 186, dans un supplément publié conjointement avec ce mémoire et intitulé „Essay on canonical forms by *J. J. Sylvester,*" London, Bell, 1851, et dans le mémoire intitulé „On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants" Phil. Mag. Nov. 1851.

dont la valeur peut être prise à volonté. Mais à ce facteur près la fonction de degré m sera complètement déterminée.

Pour fixer les idées je suppose que la fonction donnée soit la fonction cubique

$$(a,\ b,\ c,\ d\widehat{)}(x,\ y)^3$$

dans ce cas il s'agira de trouver une fonction quadratique

$$(\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c}\widehat{)}(x,\ y)^2$$

telle qu'en posant $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\widehat{)}(x, y)^2 = \mathrm{a}(x+\alpha y)(x+\beta y)$ on ait identiquement

$$(a, b, c, d\widehat{)}(x, y)^3 = \mathrm{A}(x+\alpha y)^3 + \mathrm{B}(x+\beta y)^3.$$

Cela se fait très-facilement par les méthodes ordinaires. En effet, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{A}+\mathrm{B} &= a \\ \mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\beta &= b \\ \mathrm{A}\alpha^2+\mathrm{B}\beta^2 &= c \\ \mathrm{A}\alpha^3+\mathrm{B}\beta^3 &= d \end{aligned}$$

d'où il suit

$$\begin{aligned} a\xi\eta - b(\xi+\eta) + c &= \mathrm{A}(\xi-\alpha)(\eta-\alpha) + \mathrm{B}(\xi-\beta)(\eta-\beta) \\ b\xi\eta - c(\xi+\eta) + d &= \mathrm{A}\alpha(\xi-\alpha)(\eta-\alpha) + \mathrm{B}\beta(\xi-\beta)(\eta-\beta) \end{aligned}$$

ξ et η étant des quantités quelconques; donc, en prenant $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, on obtient

$$\begin{aligned} a\alpha\beta - b(\alpha+\beta) + c &= 0 \\ b\alpha\beta - c(\alpha+\beta) + d &= 0. \end{aligned}$$

Mais l'équation $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\widehat{)}(x, y)^2 = \mathrm{a}(x+\alpha y)(x+\beta y)$ donne

$$\alpha\beta : \alpha+\beta : 1 = \mathrm{c} : 2\mathrm{b} : \mathrm{a}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} a\mathrm{c} - 2b\mathrm{b} + c\mathrm{a} &= 0 \\ b\mathrm{c} - 2c\mathrm{b} + d\mathrm{a} &= 0 \end{aligned}$$

système qui donne les rapports $\mathrm{a} : \mathrm{b} : \mathrm{c}$. Mais pour compléter la solution de la manière la plus élégante, il faut ajouter à ces équations, l'équation $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\widehat{)}(x, y)^2 = 0$ mise sous la forme $(\mathrm{c}, \mathrm{b}, \mathrm{a}\widehat{)}(y, x)^2 = 0$ ou ce qui est la même chose

$$y^2\mathrm{c} + 2yx\mathrm{b} + x^2\mathrm{a} = 0.$$

En éliminant a, b, c on obtient une équation de laquelle on déduit

$$(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})\widehat{(x,y)^2} = \begin{vmatrix} y^2, & -yx, & x^2 \\ a, & b, & c \\ b, & c, & d \end{vmatrix}.$$

Mais on peut trouver ce résultat d'une manière encore plus facile. Considérant l'équation

$$(a, b, c, d)\widehat{(x, y)^3} = \mathrm{A}(x+\alpha y)^3 + \mathrm{B}(x+\beta y)^3.$$

On n'a qu'à opérer sur cette équation en se servant du symbole

$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})\widehat{(\partial_y, -\partial_x)^2};$$

le second membre se réduit à zéro à cause des équations $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})\widehat{(\alpha, -1)^2} = 0$, $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})\widehat{(\beta, -1)^2} = 0$ que donne l'équation $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})\widehat{(x, y)^2} = \mathrm{a}(x+\alpha y)\widehat{(x+\beta y)}$. Par conséquent on a identiquement

$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})\widehat{(\partial_y, -\partial_x)^2}(a, b, c, d)\widehat{(x, y)^3} = 0$$

c'est à dire

$$x(ac - 2b\mathrm{b} + c\mathrm{a}) + y(b\mathrm{c} - 2c\mathrm{b} + d\mathrm{a}) = 0$$

ou enfin

$$ac - 2b\mathrm{b} + c\mathrm{a} = 0$$
$$b\mathrm{c} - 2c\mathrm{b} + d\mathrm{a} = 0$$

et de là on tire comme auparavant la valeur de la fonction $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})\widehat{(x, y)^2}$.

Les valeurs des coefficients A, B s'expriment alors en fonctions linéaires des coefficients de la fonction cubique et des quantités α, β qui sont pour ainsi dire les racines de la fonction quadratique $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})\widehat{(x, y)^2}$.

Il est évident que le procédé suivi dans ce qui précède est tout à fait général, et que l'on obtient toujours explicitement la fonction du degré m: par exemple pour la fontion du cinquième degré

$$(a, b, c, d, e, f)\widehat{(x, y)^5}$$

la fonction dont il s'agit sera

$$\begin{vmatrix} y^3, & -y^2x, & yx^2, & -x^3 \\ a, & b, & c, & d \\ b, & c, & d, & e \\ c, & d, & e, & f \end{vmatrix}$$

et de même dans tous les autres cas. Cette fonction du degré m (laquelle est un covariant de la fonction donnée) peut être appelée le *canonisant*. Pour

la fonction du cinquième degré le canonisant peut être mis sous cette autre forme

$$\begin{vmatrix} ax+by, & bx+cy, & cx+dy \\ bx+cy, & cx+dy, & dx+ey \\ cx+dy, & dx+ey, & ex+fy \end{vmatrix}$$

et on démontre facilement qu'il existe toujours une transformation semblable. Considérons maintenant une fonction de degré pair

$$(a,\ b,\ \ldots\ a')\widehat{(x,\ y)^{2m}}.$$

Posons

$$(a, b, \ldots a')\widehat{(x, y)^{2m}} = \Sigma \mathrm{A}(x+\alpha y)^{2m} + \Lambda(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \ldots \mathrm{a}')\widehat{(x, y)^{m}}(\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \ldots \mathrm{a}_1')\widehat{(x, y)^{m}}$$

où l'on suppose $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \ldots \mathrm{a}')\widehat{(x, y)^{m}} = \mathrm{a}(x+\alpha y)\ldots$ et où $(\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \ldots \mathrm{a}_1')\widehat{(x, y)^{m}}$ représente un certain covariant parfaitement déterminé de $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \ldots \mathrm{a}')\widehat{(x, y)^{m}}$. L'expression qui forme le second membre de l'équation proposée s'appelera la forme canonique de la fonction de degré pair. Pour fixer les idées je suppose que la fonction donnée soit la fonction du quatrième degré

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)\widehat{(x,\ y)^{4}}.$$

Dans ce cas, en prenant la fonction quadratique $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})\widehat{(x, y)^{2}} = \mathrm{a}(x+\alpha y)(x+\beta y)$ et en représentant par $(\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \mathrm{c}_1)\widehat{(x, y)^{2}}$ un covariant déterminé de $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})\widehat{(x, y)^{2}}$ on a

$$(a, b, c, d, e)\widehat{(x, y)^{4}} = \mathrm{A}(x+\alpha y)^4 + \mathrm{B}(x+\beta y)^4 + \Lambda(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})\widehat{(x, y)^{2}}(\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \mathrm{c}_1,)\widehat{(x, y)^{2}}.$$

Cela posé la condition qui sert à déterminer le covariant $(\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \mathrm{c}_1)\widehat{(x, y)^{2}}$ est la suivante

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})\widehat{(\partial_y, -\partial_x)^{2}}.(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})\widehat{(x, y)^{2}}(\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \mathrm{c}_1)\widehat{(x, y)^{2}} = K(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})\widehat{(x, y)^{2}}$$

où K est un facteur constant dont la valeur est arbitraire.

Le premier membre sera

$$((\begin{vmatrix} 7\mathrm{ac}-6\mathrm{b}^2, & -2\mathrm{ab}, & \mathrm{a}^2, \\ 2\mathrm{bc}, & 12\mathrm{ac}-16\mathrm{b}^2, & 2\mathrm{ab}, \\ \mathrm{c}^2, & -2\mathrm{bc}, & 7\mathrm{ac}-6\mathrm{b}^2 \end{vmatrix} \widehat{(\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \mathrm{c}_1)})\widehat{(x, y)^{2}}$$

en représentant par cette notation l'expression

$$\begin{aligned} &[(7\mathrm{ac}-6\mathrm{b}^2)\mathrm{a}_1 && -2\mathrm{abb}_1 && +\mathrm{a}^2\mathrm{c}_1 &&]x^2 \\ +&[\ 2\mathrm{bca}_1 && +(12\mathrm{ac}-16\mathrm{b}^2)\mathrm{b}_1 && +2\mathrm{abc}_1 &&]xy \\ +&[\ \mathrm{c}^2\mathrm{a}_1 && -2\mathrm{bcb}_1 && +(7\mathrm{ac}-6\mathrm{b}^2)\mathrm{c}_1 &&]y^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{array}{rrrl} (7ac-6b^2)a_1 & -2abb_1 & +a^2c_1 & = Ka \\ 2bca_1 & +(12ac-16b^2)b_1 & +2abc_1 & = K2b \\ c^2a_1 & -2bcb_1 & +(7ac-6b^2)c_1 & = Kc \end{array}$$

et en ajoutant à ces équations la suivante

$$x^2a_1 + 2xyb_1 + y^2c_1 = u$$

on obtient, en éliminant a_1, b_1, c_1, l'équation

$$\begin{vmatrix} u, & x^2, & 2xy, & y^2 \\ Ka, & 7ac-6b^2, & -2ab, & a^2 \\ 2Kb, & 2bc, & 12ac-16b^2, & 2ab \\ Kc, & c^2, & -2bc, & 7ac-6b^2 \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle peut s'écrire aussi comme il suit

$$u\begin{vmatrix} 7ac-6b^2, & -2ab, & a^2 \\ 2bc, & 12ac-16b^2, & 2ab \\ c^2, & -2bc & 7ac-6b^2 \end{vmatrix}$$

$$+K\begin{vmatrix} x^2, & 2xy & y^2 \\ a, & 7ac-6b^2, & -2ab, & a^2 \\ 2b, & 2bc & 12ac-16b^2, & 2ab \\ c, & c^2, & -2bc, & 7ac-6b^2 \end{vmatrix} = 0,$$

donc, en rétablissant la valeur de u, savoir $u = (a_1, b_1, c_1)\widehat{(x, y)^2}$, et en prenant

$$K = \begin{vmatrix} 7ac-6b^2, & -2ab, & a^2 \\ 2bc, & 12ac-16b^2, & 2ab \\ c^2, & -2bc, & 7ac-6b^2 \end{vmatrix}$$

on obtient

$$(a_1, b_1, c_1)\widehat{(x, y)^2} = -\begin{vmatrix} x^2, & 2xy, & y^2 \\ a, & 7ac-6b^2, & -2ab, & a^2 \\ 2b, & 2bc, & 12ac-16b^2, & 2ab \\ c, & c^2, & -2bc, & 7ac-6b^2 \end{vmatrix}.$$

Ces valeurs se réduisent à des expressions très simples. En effet, on a $K = 576(ac-b^2)^3$, $(a_1, b_1, c_1)\widehat{(x, y)^2} = -72(ac-b^2)^2(a, b, c)\widehat{(x, y)^2}$ de sorte qu'en supprimant le facteur constant $-72(ac-b^2)^2$ on peut prendre

$$(a_1, b_1, c_1)\widehat{(x, y)^2} = (a, b, c)\widehat{(x, y)^2}.$$

C'est ce q'on aurait pu prévoir dès le commencement; car le procédé par lequel on obtient $(a_1, b_1, c_1)\widehat{(x, y)}^2$ fait voir que cette fonction est un covariant de $(a, b, c)\widehat{(x, y)}^2$, du second degré par rapport aux variables et du cinquième degré par rapport aux coefficients; donc cette fonction sera à un facteur numérique près, identique avec $(ac - b^2)^2(a, b, c)\widehat{(x, y)}^2$. Une circonstance pareille se présente dans la réduction d'une fonction du sixième degré à la forme canonique. En effet le covariant $(a_1, b_1, c_1, d_1)\widehat{(x, y)}^3$ sera une fonction du troisième degré par rapport aux variables et du septième degré par rapport aux coefficients, donc à un facteur numérique près, cette fonction sera identique avec le discriminant $(a^2d^2 + \text{etc.})$ multiplié par le cubicovariant $(a^2d - 3abc + 2b^3)x^3 + \text{etc.}$, ou, en supprimant le facteur constant, le covariant cherché sera tout simplement le cubicovariant de $(a, b, c, d)\widehat{(x, y)}^3$. De même pour la fonction du huitième degré on trouve que le covariant $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1)\widehat{(x, y)}^4$ sera tout simplement $(a, b, c, d, e)\widehat{(x, y)}^4$. Mais rien ne nous autorise à supposer qu'une reduction de cette espèce ait lieu dans le cas général, et il paraît qu'en général le covariant $(a_1, b_1, \ldots a_1')\widehat{(x, y)}^m$ sera une fonction indécomposable du degré $2m+1$ par rapport aux coefficients; à savoir, en posant

$$(a, b, \ldots a')\widehat{(\partial_y, -\partial_x)}^m (a, b, \ldots a')\widehat{(x, y)}^m (a_1, b_1, \ldots a_1')\widehat{(x, y)}^m = K(a, b, \ldots a')\widehat{(x, y)}^m$$

le premier membre sera une fonction de la forme

$$\left(\left(\begin{vmatrix} \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots \\ \mathfrak{A}', \mathfrak{B}' \ldots \\ \vdots \end{vmatrix}\widehat{(a_1, b_1 \ldots a_1')}\right)\widehat{(x, y)}^m$$

où $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \ldots$ etc. sont des fonctions données du second degré par rapport aux coefficients $(a, b, \ldots a')$; cela étant, on aura

$$K = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \ldots \\ \mathfrak{A}', & \mathfrak{B}', & \ldots \\ \vdots & & \end{vmatrix}$$

et

$$(a_1, b_1, \ldots a_1')\widehat{(x, y)}^m = -\begin{vmatrix} & x^m, & mx^{m-1}y & \\ a, & \mathfrak{A}, & \mathfrak{B} & \ldots \\ mb, & \mathfrak{A}', & \mathfrak{B}' & \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

ce qui fait voir que le covariant dont il s'agit est une fonction du degré $2m+1$ par rapport aux coefficients.

Je reviens au cas particulier, le cas général pouvant être traité précisément de la même manière. On a

$$(a, b, c, d, e\widehat{)}(x, y)^4$$
$$= \mathrm{A}(x+\alpha y)^4 + \mathrm{B}(x+\beta y)^4 + \mathit{\Lambda}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\widehat{)}(x, y)^2(\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \mathrm{c}_1\widehat{)}(x, y)^2.$$

J'opère sur cette équation en me servant du symbole $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\widehat{)}(\partial_y, -\partial_x)^2$ et j'obtiens

$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\widehat{)}(\partial_y, -\partial_x)^2(a, b, c, d, e\widehat{)}(x, y)^4 = 2\mathit{\Lambda}\mathrm{K}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\widehat{)}(x, y)^2,$$

c'est à dire

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{a}(cx^2 + 2dxy + ey^2) \\ -2\mathrm{b}(bx^2 + 2cxy + dy^2) \\ +\mathrm{c}(ax^2 + 2bxy + cy^2) \end{array}\right\} = \tfrac{1}{6}\mathit{\Lambda}\mathrm{K}(\mathrm{a}x^2 + 2\mathrm{b}xy + \mathrm{c}y^2);$$

en posant, pour abréger, $\frac{1}{6}\mathit{\Lambda}\mathrm{K} = \lambda$, on aura

$$\left.\begin{array}{rrrr} x^2[\mathrm{c}a & -2\mathrm{b}b & +\mathrm{a}(c-\lambda)] \\ +2xy[\mathrm{c}b & -2\mathrm{b}(c+\frac{1}{2}\lambda) & +\mathrm{a}d \quad] \\ +y^2[\mathrm{c}(c-\lambda) & -2\mathrm{b}d & +\mathrm{a}e \quad] \end{array}\right\} = 0$$

ce qui donne

$$\begin{array}{rrrr} \mathrm{c}a & -2\mathrm{b}b & +\mathrm{a}(c-\lambda) & = 0 \\ \mathrm{c}b & -2\mathrm{b}(c+\frac{1}{2}\lambda) & +\mathrm{a}d & = 0 \\ \mathrm{c}(c-\lambda) & -2\mathrm{b}d & +\mathrm{a}e & = 0 \end{array}$$

et de là on tire l'équation

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c-\lambda \\ b, & c+\frac{1}{2}\lambda, & d \\ c-\lambda, & d, & e \end{vmatrix} = 0$$

qui servira à la détermination de la quantité λ: Les coefficients des différentes puissances de λ seront des invariants; en effet, si on développe le déterminant, l'équation devient $2(ace + 2bcd - ad^2 - b^2e + c^3) + \lambda(ae - 4bd + 3c^2) - \lambda^3 = 0$. La quantité λ étant connue, on peut au moyen de deux quelconques des trois équations trouver les rapports $\mathrm{a} : \mathrm{b} : \mathrm{c}$, ou ce qui revient à la même chose, on peut se servir des trois équations en introduisant les quantités arbitraires L, M, N et l'on trouve

$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\widehat{)}(x, y)^2 = \begin{vmatrix} & y^2, & -yx, & x^2 \\ \mathrm{L}, & a, & b, & c-\lambda \\ \mathrm{M}, & b, & c+\frac{1}{2}\lambda, & d \\ \mathrm{N}, & c-\lambda, & d, & e \end{vmatrix}$$

expression qui, en réalité, ne contient rien d'indéterminé. La quantité K est une fonction connue de (a, b, c) donc $A = \frac{6\lambda}{K}$ sera pareillement connu, et les coefficients A, B s'expriment en fonctions linéaires des coefficients de la fonction du quatrième degré et des quantités α, β qui sont pour ainsi dire les racines de la fonction quadratique $(a, b, c)\widehat{(x, y)^2}$. Comme je l'ai déjà fait observer, tout ce qui précède s'applique également à une fonction de degré pair quelconque. Le déterminant qui contient λ peut être appelé le *Lambdaïque*. On voit aisément quelle est sa forme générale; par exemple pour la fonction $(a, b, c, d, e, f, g)\widehat{(x, y)^6}$ ce déterminant est

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d-\lambda \\ b, & c, & d+\frac{1}{3}\lambda, & e \\ c, & d-\frac{1}{3}\lambda, & e, & f \\ d+\lambda, & e, & f, & g \end{vmatrix}$$

expression dont le développement ne contient que les puissances paires de λ; cela arrive, comme M. *Sylvester* l'a remarqué depuis longtemps, toutes les fois que m est impair, c'est à dire toutes les fois que le degré de la fonction dont il s'agit est un nombre de la forme $4p+2$.

Revenons à la fonction du quatrième degré $(a, b, c, d, e)\widehat{(x, y)^4}$; en écrivant $(a_1, b_1, c_1)\widehat{(x, y)^2} = (a, b, c)\widehat{(x, y)^2} = a(x+\alpha y)(x+\beta y)$ on obtient pour la forme canonique

$$(a, b, c, d, e)\widehat{(x, y)^4} = A(x+\alpha y)^4 + B(x+\beta y)^4 + A(x+\alpha y)^2(x+\beta y)^2.$$

Relativement à la fonction du sixième degré $(a, b, c, d, e, f, g)\widehat{(x, y)^6}$, je fais observer que le cubicovariant de $(x+\alpha y)(x+\beta y)(x+\gamma y)$ est

$$\{(2\alpha-\beta-\gamma)x-(2\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta)y\}\{(2\beta-\gamma-\alpha)x-(2\gamma\alpha-\alpha\beta-\beta\gamma)y\}$$
$$\{(2\gamma-\alpha-\beta)x-(2\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)y\}$$

donc en représentant cette fonction par Φ, on a pour la forme canonique

$$(a, b, c, d, e, f, g)\widehat{(x, y)^6}$$
$$= A(x+\alpha y)^6 + B(x+\beta y)^6 + C(x+\gamma y)^6 + A(x+\alpha y)(x+\beta y)(x+\gamma y)\Phi.$$

Pour la fonction du huitième degré le covariant $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1)\widehat{(x, y)^4}$ est tout simplement égal à $(a, b, c, d, e)\widehat{(x, y)^4}$ ainsi que je l'ai déjà fait observer, et l'on a pour la forme canonique

$$(a, b, c, d, e, f, g, h, i)\widehat{(x, y)^8} = A(x+\alpha y)^8 + B(x+\beta y)^8 + C(x+\gamma y)^8 + D(x+\delta y)^8$$
$$+ A(x+\alpha y)^2(x+\beta\gamma)^2(x+\gamma y)^2(x+\delta y)^2.$$

Je n'ai pas cherché à réduire ou à présenter sous la forme d'un déterminant le covariant $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1)(x, y)^5$ qui entre dans la forme canonique de la fonction du dixième degré.

On a vu que le covariant $(a_1, b_1, \ldots a'_1)(x, y)^m$ s'obtient par le développement de la fonction

$$(a, b, \ldots a')(\partial_y, -\partial_x)^m . (a, b, \ldots a')(x, y)^m (a_1, b_1, \ldots a'_1)(x, y)^m$$

et j'ai donné ci-dessus un exemple de ce développement; en employant pour plus de commodité les lettres italiques au lieu des lettres romaines, on peut écrire la formule dont il s'agit de la manière suivante

$$(a, b, c)(\partial_y, -\partial_x)^2 (a, b, c)(x, y)^2 (a_1, b_1, c_1)(x, y)^2 =$$

$$2\left(\begin{vmatrix} 7ac - 6b^2 & -2ab & a^2 \\ 2bc & 12ac - 16b^2 & 2ab \\ c^2 & -2bc & 7ac - 6b^2 \end{vmatrix}(a_1, b_1, c_1)\right)(x, y)^2$$

Les équations analogues pour la fonction cubique etc. sont

$$(a, b, c, d)(\partial_y, -\partial_x)^3 (a, b, c, d)(x, y)^3 (a_1, b_1, c_1, d_1)(x, y)^3 =$$

$$6\times\left(\begin{vmatrix} -19ad + 18bc & +39ac - 36b^2 & -3ab \\ -39bd + 36c^2 & -18ad + 27bc & +72ac - 81b^2 \\ -3cd & -72bd + 81c^2 & +18ad - 27bc \\ -d^2 & +3cd & -39bd + 36c^2 \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.\begin{vmatrix} +a^2 \\ +3ab \\ +39ac - 36b^2 \\ +19ad - 18bc \end{vmatrix}(a_1, b_1, c_1, d_1)\right)(x, y)^3$$

$$(a, b, c, d, e)(\partial_y, -\partial_x)^4 (a, b, c, d, e)(x, y)^4 (a_1, b_1, c_1, d_1, e_1)(x, y)^4 =$$

$$24\times\left(\begin{vmatrix} +71ae - 160bd + 90c^2 & -124ad + 120bc & +126ac - 120b^2 \\ +124be - 120cd & +160ae - 896bd + 720c^2 & -120ad + 144bc \\ +126ce - 120d^2 & +120be - 144cd & +180ae - 1440bd + 1296c^2 \\ +4de & +240ce - 256d^2 & -120be + 144cd \\ +e^2 & -4de & +126ce - 120d^2 \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.\begin{vmatrix} -4ab & +a^2 \\ +240ac - 256b^2 & +4ab \\ +120ad - 144bc & +126ac - 120b^2 \\ +160ae - 896bd + 720c^2 & +124ad - 120bc \\ -124be + 120cd & +71ae - 160bd + 90c^2 \end{vmatrix}(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1)\right)(x, y)^4$$

$$(a,b,c,d,e,f)\widehat{(\partial_y,-\partial_x)^5}(a,b,c,d,e,f)\widehat{(x,y)^5}(a_1,b_1,c_1,d_1,e_1,f_1)\widehat{(x,y)^5} =$$

$$120\times\left(\begin{vmatrix} -251af+600be-350cd & +655ae-1700bd+1050c^2 \\ -655bf+1700ce-1050d^2 & -600af+2875be-2250cd \\ -460cf+450de & -1700bf+7750ce-6000d^2 \\ -310df+300e^2 & -450cf+500de \\ -5ef & -600df+625e^2 \\ -e^2 & +5ef \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.\begin{vmatrix} -460ad+450bc & +310ac-300b^2 \\ +1700ae-7750bd+6000c^2 & -450ad+500bc \\ -350af+2250be-2000cd & +2100ae-12000bd+10000c^2 \\ -2100bf+12000ce-10000d^2 & +350af-2250be+2000cd \\ +450cf-500de & -1700bf+7750ce-6000d^2 \\ -310df+300e^2 & +460cf-450de \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.\begin{vmatrix} -5ab & +a^2 \\ +600ac-625b^2 & +5ab \\ +450ad-500bc & +310ac-300b^2 \\ +1700ae-7750bd+6000c^2 & +460ad-450bc \\ +600af-2875be+2250cd & +655ae-1700bd+1050c^2 \\ -655bf+1700ce-1050d^2 & +251af-600be+350cd \end{vmatrix}\right)\widehat{(a_1,b_1,c_1,d_1,e_1,f_1)}\widehat{(x,y)^5}$$

Les résultats qu'on vient d'obtenir pour les cas particuliers les plus simples font voir que la théorie générale doit être susceptible de développements ultérieurs. Ainsi la forme canonique de la fonction cubique $(a,b,c,d)\widehat{(x,y)^3}$ sera u^3+v^3 si l'on pose u, v au lieu de $\sqrt[3]{A}(x+\alpha y)$, $\sqrt[3]{B}(x+\beta y)$. La méthode générale ne donne que la valeur du produit u, v à un facteur constant près; mais on peut trouver les valeurs de u et v séparément. En effet en se rappelant les résultats obtenus dans la „Note sur les covariants d'une fonction quadratique, cubique, ou biquadratique à deux indéterminées" (t. L, p. 285 de ce Journal), on reconnaît que les deux fonctions $\Phi+U\sqrt{-\square}$, $\Phi-U\sqrt{-\square}$ sont l'une et l'autre des cubes parfaits et l'on a

$$2U\sqrt{-\square} = (\Phi+U\sqrt{-\square})-(\Phi-U\sqrt{-\square});$$

on a donc

$$u=\sqrt[3]{\frac{\Phi+U\sqrt{-\square}}{2\sqrt{-\square}}}, \qquad v=\sqrt[3]{\frac{\Phi-U\sqrt{-\square}}{2\sqrt{-\square}}}.$$

De même la forme canonique de la fonction du quatrième degré $(a,b,c,d,e)\widehat{(x,y)^4}$ sera $u^4+v^4+6\theta u^2v^2, = (u^2-v^2)^2+2(1+3\theta)u^2v^2$, si l'on pose u, v au lieu

de $\sqrt[4]{A(x+\alpha y)}$, $\sqrt[4]{B(x+\beta y)}$; or $IH-\varpi_1 JU$, $IH-\varpi_2 JU$, $IH-\varpi_3 JU$ étant tous les trois des carrés de fonctions quadratiques, la fonction U peut s'exprimer au moyen de deux quelconques de ces trois quantités comme une somme de deux carrés et on déduit de là les valeurs de u et de v; on trouvera le développement de cette solution dans un mémoire „Sur quelques formules pour la transformation des intégrales elliptiques" qui paraîtra prochainement dans ce Journal. Quant à la fonction du cinquième degré on pourrait écrire u, v, w au lieu de $\sqrt[5]{A(x+\alpha y)}$, $\sqrt[5]{B(x+\beta y)}$, $\sqrt[5]{C(x+\gamma y)}$, ce qui donnerait pour forme canonique $u^5+v^5+w^5$, mais il vaut mieux, en multipliant ces valeurs par des facteurs convenables, écrire $u+v+w=0$ et prendre pour forme canonique $Au^5+Bv^5+Cw^5=0$, c'est ce qu'a fait M. ***Sylvester*** dans son mémoire ci-dessus cité. On trouve aussi des développements sur ce sujet dans le mémoire de M. ***Faà de Bruno*** „Nota sulla teorica degli invarianti, ***Tortolini*** annali etc. 1855.

Pour la fonction du sixième degré on peut supposer que la fonction cubique $(a, b, c, d)(x, y)^3$ soit réduite à la forme canonique u^3+v^3, cela étant le cubicovariant sera u^3-v^3, et en représentant par ϱ l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité la forme canonique sera

$$A(u+v)^6+B(u+\varrho v)^6+C(u+\varrho^2 v)^6+\Delta(u^6-v^6);$$

c'est encore ce qu'a fait voir M. ***Sylvester*** dans son mémoire.

Londres, 9 Avril 1856.

5.

Mathematische Miscellen.

(Von Herrn *Schellbach*.)

X.

Zur Theorie des Additionstheorems der elliptischen Integrale.

§. 1.

Man mufs zu einer symmetrischen Function von a, b, c gelangen, wenn man aus der Gleichung

$$(1.) \qquad \sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{c}$$

die Wurzelgröfsen fortschafft. Man erhält auf diese Weise

$$(2.) \qquad c^2 - 2c(a+b) + (a-b)^2 = 0.$$

Setzt man hier

$$(3.) \qquad a-b = x-y$$

$$(4.) \qquad a+b = x+y-2xy$$

so ist auch noch

$$(5.) \qquad c^2 - 2c(x+y-2xy) + (x-y)^2 = 0$$

eine symmetrische Function von x, y, c, denn zu der symmetrischen Function (2.) ist nur noch die symmetrische Function $2xyc$ hinzugetreten. Vertauscht man nun x, y, c mit x^2, y^2, z^2 und setzt

$$(6.) \qquad x^2+x'^2=1; \qquad y^2+y'^2=1; \qquad z^2+z'^2=1$$

so ergiebt sich aus (3.) und (4.)

$$a = x^2(1-y^2) = x^2y'^2 \quad \text{und} \quad b = y^2x'^2.$$

Setzt man diese Werthe für a, b, c in (1.) ein, so ist ersichtlich, dafs die erste der drei Gleichungen

$$(7.) \qquad xy'+yx'=z; \qquad xz'+zx'=y; \qquad yz'+zy'=x$$

die beiden andern nach sich zieht, da alle drei auf dieselbe symmetrische Function führen. Da die Zeichen von x, y, x', y' willkürlich sind, und das Zeichen von z durch die erste Gleichung bestimmt wird, so kann nur noch über das Zeichen von z' eine Ungewifsheit bleiben. Setzt man aber den Werth von z aus der ersten dieser Gleichungen in die zweite oder dritte

ein, so erhält man für z' ganz denselben Ausdruck, daher wird das Zeichen von z' vollständig durch die Gröfsen x, y, x', y' bestimmt. Vertauscht man noch in der erhaltenen Gleichung z mit y und mit x, so gelangt man zu den drei Gleichungen

$$(8.) \qquad xy - x'y' = z'; \qquad zx - z'x' = y'; \qquad yz - y'z' = x'.$$

Solcher Gleichungen lassen sich nun noch mehrere entwickeln. Addirt man z. B. die beiden letzten der Gleichungen (7.) und dividirt die Summe durch $x+y$, so erhält man

$$(9.) \qquad \frac{x'+y'}{x+y} = \frac{1-z'}{z}; \qquad \frac{x'+z'}{x+z} = \frac{1-y'}{y}; \qquad \frac{y'+z'}{y+z} = \frac{1-x'}{x},$$

wo die zwei letzten Gleichungen wieder durch Vertauschung aus der ersten entsprungen sind.

Es ist

$$x'^2 - y'^2 = y^2 - x^2$$

oder

$$\frac{x'+y'}{x+y} \cdot \frac{x'-y'}{y-x} = 1 = \frac{z^2}{z^2} = \frac{1-z'^2}{z^2} = \frac{1-z'}{z} \cdot \frac{1+z'}{z}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch die erste (9.) und wechselt dann die Buchstaben gehörig, so entstehen die Gleichungen

$$(10.) \qquad \frac{x'-y'}{y-x} = \frac{1+z'}{z}; \qquad \frac{x'-z'}{z-x} = \frac{1+y'}{y}; \qquad \frac{y'-z'}{z-y} = \frac{1+x'}{x}.$$

Eliminirt man aus den beiden letzten der Gleichungen (7.) die Gröfse z' so erhält man

$$(11.) \qquad \frac{xy'-yx'}{x^2-y^2} = \frac{1}{z}; \qquad \frac{xz'-zx'}{x^2-z^2} = \frac{1}{y}; \qquad \frac{yz'-zy'}{y^2-z^2} = \frac{1}{x}.$$

Multiplicirt man aber die zweite der Gleichungen (7.) mit x und die dritte mit y und subtrahirt die Producte, so ergiebt sich auch durch gehörige Vertauschung

$$(12.) \qquad \frac{xx'-yy'}{y^2-x^2} = \frac{z'}{z}; \qquad \frac{xx'-zz'}{z^2-x^2} = \frac{y'}{y}; \qquad \frac{yy'-zz'}{z^2-y^2} = \frac{x'}{x}.$$

Diese Formeln lassen sich leicht noch weiter vermehren.

§. 2.

Aus der ersten der Gleichungen (8.) ist

$$x'y' = xy - z'$$

und wenn man beide Seiten dieser Gleichung quadrirt, so erhält man

$$(1.) \qquad z^2 = x^2 + y^2 - 2xyz'.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann man zu Formeln von weit gröfserer Allgemeinheit gelangen. Schreibt man nämlich $\frac{\xi'}{n}$ statt x und $\frac{\eta'}{n}$ statt y, wo unter ξ' und η' verstanden werden soll $\sqrt{1-\xi^2}$ und $\sqrt{1-\eta^2}$, so erhält man $n^2z^2=\xi'^2+\eta'^2-2\xi'\eta'z'$, oder wenn man für ξ' und η' wieder die alten Buchstaben x' und y' einführt, welche aber jetzt eine andere Bedeutung haben als in §. 1

$$(2.) \qquad n^2z^2 = x'^2+y'^2-2x'y'z'.$$

Aus dieser Gleichung läfst sich leicht eine symmetrische Function von x, y, z bilden, denn da $x'y'z'$ schon eine solche ist, so braucht nur n^2 so gewählt zu werden, dafs $n^2z^2-x'^2-y'^2$ eine symmetrische Function wird; dazu ist aber offenbar nur erforderlich, dafs man

$$n^2 = 1-k^2x^2y^2$$

annimmt, wodurch sich aus (2.) die symmetrische Function

$$(3.) \qquad 1-x'^2-y'^2-z'^2+2x'y'z'-k^2x^2y^2z^2 = 0$$

ergiebt. Hier soll k^2 eine Constante bedeuten. Dem Ausdrucke für n^2 könnte auch eine andere Gestalt gegeben werden, aber die gewählte ist die einfachste. Ganz ähnlich ist auch in §. 1 Gleichung (4.) für $a+b$ die einfachste Form gewählt worden. Da nun in (3.) eine symmetrische Function von x, y, z erhalten worden ist, so führt also die Substitution von

$$\frac{x'}{n} \text{ statt } x \text{ also } 1-\frac{x'^2}{n^2} = \frac{n^2-x'^2}{n^2} = \frac{x^2(1-k^2y^2)}{1-k^2x^2y^2} \text{ statt } x'^2$$

und die ähnlichen Einführungen für y und y' in die Gleichungen des §. 1 zu neuen Gleichungen, in denen die Buchstaben x, y, z untereinander vertauscht werden können. Bezeichnet man also

$$\sqrt{1-k^2x^2}, \quad \sqrt{1-k^2y^2}, \quad \sqrt{1-k^2z^2}, \quad \sqrt{1-k^2x^2y^2}$$

durch

$$x_1, \qquad y_1, \qquad z_1, \qquad n$$

so hat man nur in den erwähnten Gleichungen

$$x, \; x', \; y, \; y'$$

mit

$$\frac{x'}{n}, \quad \frac{xy_1}{n}, \quad \frac{y'}{n}, \quad \frac{yx_1}{n}$$

zu vertauschen, um neue Gleichungen zu erhalten.

Aus den ersten der Gleichungen (7.) in §. 1 und durch Buchstabenvertauschung erhält man so die drei Gleichungen

$$(4.) \qquad \frac{yx'x_1+xy'y_1}{1-k^2x^2y^2} = z; \qquad \frac{zx'x_1+xz'z_1}{1-k^2x^2z^2} = y; \qquad \frac{zy'y_1+yz'z_1}{1-k^2y^2z^2} = x.$$

Aus der letzten der Gleichungen (7.) entstehen ebenso die Gleichungen

(5.) $\quad y'z'+zyx_1=x'; \quad x'z'+zxy_1=y'; \quad x'y'+xyz_1=z'.$

Aus der ersten der Gleichungen (8.) §. 1 kommt auf gleiche Weise

(6.) $\quad \frac{x'y'-xyx_1y_1}{1-k^2x^2y^2}=z'; \quad \frac{x'z'-xzx_1z_1}{1-k^2x^2z^2}=y'; \quad \frac{y'z'-yzy_1z_1}{1-k^2y^2z^2}=x'.$

Aus der letzten der erwähnten Gleichungen folgen noch die 6 Gleichungen

(7.) $\quad \begin{cases} x'z-xy_1z'=yx_1; & x'y-xz_1y'=zx_1; & y'x-yz_1x'=zy_1; \\ y'z-yx_1z'=xy_1; & z'y-zx_1y'=xz_1; & z'x-zy_1x'=yz_1. \end{cases}$

Setzt man aus der ersten der Gleichungen (6.) in §. 2 den Werth von z' in die letzte der Gleichungen (5.), so erhält man

$$xyz_1=\frac{x'y'-xyx_1y_1}{1-k^2x^2y^2}-x'y'=\frac{xy(k^2xyx'y'-x_1y_1)}{1-k^2x^2y^2} \text{ oder } z_1=\frac{k^2xx'yy'-x_1y_1}{1-k^2x^2y^2},$$

also durch Vertauschung

(8.) $\quad \frac{k^2xx'yy'-x_1y_1}{1-k^2x^2y^2}=z_1; \quad \frac{k^2xx'zz'-x_1z_1}{1-k^2x^2z^2}=y_1; \quad \frac{k^2yy'zz'-y_1z_1}{1-k^2y^2z^2}=x_1.$

Dividirt man die Gleichungen (4.) durch die (6.), so ergeben sich die Gleichungen

(9.) $\quad \frac{yx'x_1+xy'y_1}{x'y'-xyx_1y_1}=\frac{z}{z'}; \quad \frac{zx'x_1+xz'z_1}{x'z'-xzx_1z_1}=\frac{y}{y'}; \quad \frac{zy'y_1+yz'z_1}{y'z'-yzy_1z_1}=\frac{x}{x'}.$

Aus der ersten der Gleichungen (9.) in §. 1 und durch Tausch und dann aus Nr. 1 in (10.) erhält man folgende 6 Gleichungen

(10.) $\quad \frac{xy_1+yx_1}{x'+y'}=\frac{1-z'}{z}; \quad \frac{xz_1+zx_1}{x'+z'}=\frac{1-y'}{y}; \quad \frac{yz_1+zy_1}{y'+z'}=\frac{1-x'}{x};$

(11.) $\quad \frac{xy_1-yx_1}{y'-x'}=\frac{1+z'}{z}; \quad \frac{xz_1-zx_1}{z'-x'}=\frac{1+y'}{y}; \quad \frac{yz_1-zy_1}{z'-y'}=\frac{1+x'}{x}.$

Addirt man die zweite und dritte der Gleichungen (7.) in §. 2, so erhält man sogleich auf die bekannte Weise

(12.) $\quad \frac{x_1+y_1}{xy'+yx'}=\frac{1-z_1}{z}; \quad \frac{x_1+z_1}{xz'+zx'}=\frac{1-y_1}{y}; \quad \frac{y_1+z_1}{yz'+zy'}=\frac{1-x_1}{x}.$

Zieht man aber dieselben Gleichungen von einander ab, so gelangt man zu

(13.) $\quad \frac{x_1-y_1}{yx'-xy'}=\frac{1+z_1}{z}; \quad \frac{x_1-z_1}{zx'-xz'}=\frac{1+y_1}{y}; \quad \frac{y_1-z_1}{zy'-yz'}=\frac{1+x_1}{x}.$

Setzt man den Werth von $x'z$ aus der ersten der Gleichungen (7.) in die letzte, so erhält man die Gleichungen

(14.) $\quad k^2xyz'-x_1y_1=z_1, \quad k^2xzy'-x_1z_1=y_1; \quad k^2yzx'-y_1z_1=x_1.$

Multiplicirt man die letzte dieser Gleichungen mit der ersten (5.), deren Seiten man vorher umkehrt, so erhält man

$$k^2yzx'^2 - x'y_1z_1 = x_1y'z' + zyx_1^2 = x_1y'z' + zy - k^2zyx^2$$

oder

$$x'y_1z_1 + x_1y'z' + zy - k^2zy = 0.$$

Setzt man nun

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

so erhält man folgende drei Gleichungen

$$(15.)\quad x'y_1z_1 + x_1y'z' + yzk'^2 = 0; \qquad y'x_1z_1 + y_1x'z' + xzk'^2 = 0;$$
$$z'x_1y_1 + z_1x'y' + yzk'^2 = 0.$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (14.) mit z_1, so erhält man

$$k^2xyz'z_1 - x_1y_1z_1 = 1 - k^2z^2 \quad \text{oder} \quad k^2(z^2 + xyz'z_1) = 1 + x_1y_1z_1.$$

Multiplicirt man aber die letzte der Gleichungen (5.) mit z', so ergiebt sich

$$x'y'z' + xyz'z_1 = z'^2 = 1 - z^2 \quad \text{oder} \quad z^2 + xyz'z_1 = 1 - x'y'z',$$

also wird

$$(16.)\quad k^2(1 - x'y'z') = 1 + x_1y_1z_1$$

oder auch

$$(17.)\quad k'^2 + k^2x'y'z' + x_1y_1z_1 = 0.$$

Aus der ersten der Gleichungen (11.) und der ersten der Gleichungen (12.) in §. 1 erhält man auch noch

$$(18.)\quad \frac{xy'y_1 - yx'x_1}{x^2 - y^2} = \frac{1}{z}; \qquad \frac{xz'z_1 - zx'x_1}{x^2 - z^2} = \frac{1}{y}; \qquad \frac{yz'z_1 - zy'y_1}{y^2 - z^2} = \frac{1}{x};$$

$$(19.)\quad \frac{xx'y_1 - yy'x_1}{x^2 - y^2} = \frac{z'}{z}; \qquad \frac{xx'z_1 - zz'x_1}{x^2 - z^2} = \frac{y'}{y}; \qquad \frac{yy'z_1 - zz'y_1}{y^2 - z^2} = \frac{x'}{x};$$

und aus diesen Gleichungen

$$(20.)\quad \frac{xx'y_1 - yy'x_1}{xy'y_1 - yx'x_1} = z'; \qquad \frac{xx'z_1 - zz'x_1}{xz'z_1 - zx'x_1} = y'; \qquad \frac{yy'z_1 - zz'y_1}{yz'z_1 - zy'y_1} = x'.$$

Eliminirt man aus der zweiten und dritten der Gleichungen (7.) die Gröfse z, so erhält man

$$(21.)\quad \frac{x'yy_1 - y'xx_1}{xy'y_1 - yx'x_1} = z_1; \qquad \frac{x'zz_1 - z'xx_1}{xz'z_1 - zx'x_1} = y_1; \qquad \frac{y'zz_1 - z'yy_1}{yz'z_1 - zy'y_1} = x_1.$$

Durch die angewandte Substitution läfst sich also aus jeder Formel für die Kreisfunctionen, denn das sind die Formeln des §. 1, eine entsprechende für die elliptischen Functionen ableiten.

§. 3.

Die Gleichungen des vorigen Paragraphen, die sich leicht noch vermehren liefsen, können auch auf andere Weise entwickelt werden.

Setzt man in der Gleichung (1.) des §. 2 kz statt z, so erhält man

$$k^2z^2 = x^2+y^2-2xyz_1$$

und wenn man hier x und y mit $\frac{x_1}{n}$ und $\frac{y_1}{n}$ vertauscht, so gelangt man zu

$$k^2z^2n^2 = x_1^2+y_1^2-2x_1y_1z_1.$$

Nimmt man nun wieder

$$n^2 = 1-k^2x^2y^2,$$

so erhält man die Gleichung

$$1-x_1^2-y_1^2-z_1^2+2x_1y_1z_1-k^4x^2y^2z^2 = 0.$$

Es werden also die Gleichungen des §. 1 ebenfalls neue Gleichungen liefern, wenn man in ihnen kz statt z setzt, also z' mit z_1 vertauscht und auch statt

$$x;\quad x';\quad y;\quad y'$$

die Gröfsen

$$\frac{x_1}{n};\quad \frac{kxy'}{n};\quad \frac{y_1}{n};\quad \frac{kyx'}{n}$$

einführt.

Man erhält auf diese Weise neue Gleichungen, aber nicht die Gleichungen des §. 2. Um diese zu erhalten mufs man noch die Zeichen der mit Accenten und Zeigern versehenen Buchstaben in die entgegengesetzten verwandeln, wie ein einfacher Versuch sogleich lehren wird. Die letzte Gleichung gehört also auch in die Reihe der Gleichungen des §. 2, wenn man das Zeichen von $x_1y_1z_1$ in das entgegengesetzte verwandelt. Diese Gleichung wird dann

$$(1.)\qquad 1-x_1^2-y_1^2-z_1^2-2x_1y_1z_1-k^4x^2y^2z^2 = 0.$$

Durch diese Beobachtungen wird man darauf aufmerksam gemacht, dafs sich die meisten der Gleichungen des §. 2 durch schickliche Substitutionen in einander überführen lassen. Man findet so leicht, dafs wenn man in den Formeln des §. 2 erst die Zeichen der mit Accenten und Zeigern versehenen Buchstaben in die entgegengesetzten verwandelt, dann $\frac{1}{k}$ statt k setzt und zuletzt x, y, z mit kx, ky, kz vertauscht, mehrere dieser Gleichungen in einander übergehen. Diese erste Substitution fordert also, dafs man

$$\left.\begin{array}{r} x,\ y,\ z;\quad x',\ y',\ z';\quad x_1,\ y_1,\ z_1 \\ \text{vertauscht mit} \\ kx,\ ky,\ kz;\quad x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x',\ y',\ z' \end{array}\right\} A$$

Es giebt noch zwei andere Substitutionen, welche dieselben Dienste leisten. Man braucht nämlich nur

$$\left.\begin{array}{cccccccccc} k; & x, & y, & z; & x', & y', & z'; & x_1, & y_1, & z_1 \end{array}\right\} B$$

zu vertauschen mit

$$\left.\begin{array}{cccccccccc} k'; & \frac{ix}{x'}, & \frac{iy}{y'}, & \frac{iz}{z'}; & \frac{1}{x'}, & \frac{1}{y'}, & \frac{1}{z'}; & \frac{x_1}{x'}, & \frac{y_1}{y'}, & \frac{z_1}{z'} \end{array}\right\} B$$

und ferner

$$\left.\begin{array}{cccccccccc} k; & x, & y, & z; & x', & y', & z'; & x_1, & y_1, & z_1 \end{array}\right\}$$

mit

$$\left.\begin{array}{cccccccccc} \frac{ik}{k'}; & -\frac{k'x}{x_1}, & y', & z'; & \frac{x'}{x_1}, & y, & z; & \frac{1}{x_1}, & \frac{y_1}{k'}, & \frac{z_1}{k'} \end{array}\right\} C.$$

Auf diese Weise lassen sich aus der einzigen Formel (16.) in §. 2 funfzehn andere Formeln ableiten. Durch die Substitution C liefert diese Formel zunächst die drei Formeln (14.). Durch die Substitution B entspringen aus der letzten der Gleichungen (14.) die drei Gleichungen (15.), und durch die Substitution A erhält man aus derselben Gleichung die drei Gleichungen (5.). Wendet man dann noch auf die zweite der Gleichungen (5.) die Substitution C an, so gelangt man zu den Gleichungen (7.).

Auf diese Substitutionen hat zuerst *Jacobi* im 39. Bande d. J. aufmerksam gemacht.

§. 4.

Multiplicirt man die Gleichungen (5.) in §. 2 mit den Differenzialen $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ und addirt alle drei Gleichungen, so erhält man sogleich

$$\partial . x'y'z' + zyx_1\partial x' + zxy_1\partial y' + xyz_1\partial z' = \tfrac{1}{2}\partial(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Es ist aber $\partial x' = -\frac{x\partial x}{x'}$ etc., daher ist diese Gleichung

$$xyz\left(\frac{x_1\partial x}{x'} + \frac{y_1\partial y}{y'} + \frac{z_1\partial z}{z'}\right) = \tfrac{1}{2}\partial(2x'y'z' - x'^2 - y'^2 - z'^2).$$

Nach (3.) in §. 2 ist aber die rechte Seite dieser Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\partial . k^2x^2y^2z^2 = k^2xyz\,\partial xyz,$$

daher erhält man

$$(1.) \qquad \frac{x_1\partial x}{x'} + \frac{y_1\partial y}{y'} + \frac{z_1\partial z}{z'} = k^2\partial xyz.$$

§. 5.

Durch die Substitution A erhält man aus dieser Gleichung auf der Stelle

$$(1.) \qquad \frac{x'\partial x}{x_1} + \frac{y'\partial y}{y_1} + \frac{z'\partial z}{z_1} = \partial xyz.$$

Multiplicirt man nun diese Gleichung mit k^2 und zieht sie von der (1.) in §. 4 ab, so bleibt, wenn man mit $1-k^2$ dividirt

$$(2.) \quad \frac{\partial x}{x'x_1}+\frac{\partial y}{y'y_1}+\frac{\partial z}{z'z_1}=0.$$

§. 6.

Bezeichnet man $\frac{\partial x}{x'x_1}$, $\frac{\partial y}{y'y_1}$, $\frac{\partial z}{z'z_1}$ entsprechend mit X, Y, Z, so ist also

$$(1.) \quad X+Y+Z=0.$$

Setzt man noch $xyz=u$ und $x'y'z'=u'$, so erhält man aus (1.) in §. 5

$$(2.) \quad x'^2X+y'^2Y+z'^2Z=\partial u$$

oder wenn man (1.)—(2.) bildet

$$(3.) \quad x^2X+y^2Y+z^2Z=-\partial u.$$

Multiplicirt man (1.) mit $x^2+y^2+z^2$ und zieht (3.) vom Producte ab, so bleibt

$$(4.) \quad (y^2+z^2)X+(z^2+x^2)Y+(x^2+y^2)Z=\partial u.$$

Wendet man nun die Substitution B an, so verwandelt sich ∂x in $\frac{i\partial x}{x'^3}$ u. s. w. und X geht in iX über u. s. w. Daher erhält man aus (2.) sogleich

$$(5.) \quad \frac{X}{x'^2}+\frac{Y}{y'^2}+\frac{Z}{z'^2}=-\partial\cdot\frac{u}{u'}=\frac{u\partial u'-u'\partial u}{u'^2}$$

oder

$$(6.) \quad y'^2z'^2X+z'^2x'^2Y+x'^2y'^2Z=u\partial u'-u'\partial u.$$

Addirt man zu dieser Gleichung (4.)—(1.), so bleibt

$$(7.) \quad y^2z^2X+z^2x^2Y+x^2y^2Z=(1-u')\partial u+u\partial u'.$$

Dividirt man diese Gleichung mit u^2, so erhält man eine der (5.) entsprechende

$$(5'.) \quad \frac{X}{x^2}+\frac{Y}{y^2}+\frac{Z}{z^2}=\partial\cdot\frac{1-u'}{u}.$$

Aus $(1.)-k^2a^2(4.)+k^4a^4(7.)$ ergiebt sich

$$(1-k^2a^2y^2)(1-k^2a^2z^2)X+(1-k^2a^2z^2)(1-k^2a^2x^2)Y+(1-k^2a^2x^2)(1-k^2a^2y^2)Z$$
$$=k^4a^4u\,\partial u'-k^2a^2(1-k^2a^2+k^2a^2u')\,\partial u.$$

Setzt man

$$1-k^2a^2+k^2a^2u'=v,$$

so erhält man aus der letzten Gleichung

$$(8.) \quad \frac{X}{1-k^2a^2x^2}+\frac{Y}{1-k^2a^2y^2}+\frac{Z}{1-k^2a^2z^2}=\frac{k^2a^2(u\partial v-v\partial u)}{(1-k^2a^2x^2)(1-k^2a^2y^2)(1-k^2a^2z^2)}.$$

Der Nenner des Bruches auf der rechten Seite läfst sich durch die Gröfsen u und u' ausdrücken, denn es ist

$$u'^2 = (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) = 1-x^2-y^2-z^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2-x^2y^2z^2.$$

Nach Nr. 3 in §. 2 ist aber

$$(9.) \quad 2-2u'+k^2u^2 = x^2+y^2+z^2,$$

daher wird, wenn man diese Gleichung zu der vorigen addirt,

$$(10.) \quad (1-u')^2+(1+k^2)u^2 = y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2.$$

Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen erhält man, wenn noch $\sqrt{1-a^2}$ mit a' und $\sqrt{1-k^2a^2}$ mit a_1 bezeichnet werden,

$$(11.) \quad (1-k^2a^2x^2)(1-k^2a^2y^2)(1-k^2a^2z^2) = v^2-k^4a^2a'^2a_1^2u^2$$
$$= (v+k^2aa'a_1u)(v-k^2aa'a_1u).$$

Die rechte Seite von (8.) geht jetzt in

$$\frac{a}{2a'a_1}\partial \log \frac{v-k^2aa'a_1u}{v+k^2aa'a_1u}$$

über. Setzt man nun für X, Y, Z, u und v wieder ihre Werthe ein, so erhält man aus (8.) endlich

$$(12.) \quad \frac{\partial x}{(1-k^2a^2x^2)x'x_1}+\frac{\partial y}{(1-k^2a^2y^2)y'y_1}+\frac{\partial z}{(1-k^2a^2z^2)z'z_1}$$
$$= \frac{a}{2a'a_1}\partial \log \frac{a_1^2+k^2a^2x'y'z'-k^2aa'a_1xyz}{a_1^2+k^2a^2x'y'z'+k^2aa'a_1xyz}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung läfst sich auch in anderer Form darstellen. Multiplicirt man nämlich die letzte der Gleichungen (5.) mit z', so erhält man

$$x'y'z' = 1-z^2-xyz'z_1,$$

führt man diesen Werth von $x'y'z'$ in (12.) ein und setzt

$$\frac{za'a_1+az'z_1}{1-k^2a^2z^2} = \sigma,$$
$$\frac{za'a_1-az'z_1}{1-k^2a^2z^2} = \delta,$$

so erhält man

$$(13.) \quad \frac{\partial x}{(1-k^2a^2x^2)x'x_1}+\frac{\partial y}{(1-k^2a^2y^2)y'y_1}+\frac{\partial z}{(1-k^2a^2z^2)z'z_1} = \frac{a}{2a'a_1}\partial \log \frac{1-k^2axy\sigma}{1+k^2axy\delta}.$$

Wer mit der Theorie der elliptischen Integrale vertraut ist, wird diese Mittheilungen zu benutzen verstehen.

6.

Bemerkungen zu *Jacobi*'s Abhandlung über Variationsrechnung.

(Von Herrn *E. Heine* in Halle.)

I.

Der Satz, welchen *Jacobi* in *Crelle's* Journal f. M. Bd. XVII Seite 71 aufstellte, und dessen Richtigkeit im VI^ten^ Bande des *Liouville*'schen Journals *Lebesgue* S. 17—35 und *Delaunay* S. 211—218 nachgewiesen haben, läfst sich durch folgende, auf ganz verschiedenen Prinzipien beruhende Betrachtungen ohne grofse Rechnung ableiten:

Ist A eine gegebene, u irgend eine Function von x, deren Differentialquotienten nach x durch u', etc. bezeichnet werden, setzt man ferner

$$(1.) \qquad 2Z = (-1)^n \int A u^{(n)} u^{(n)} \, dx,$$

so wird

$$\delta Z = (-1)^n \int A u^{(n)} \delta u^{(n)} \, dx$$

oder, nach bekannten Sätzen, gleich einem von dem Integralzeichen freien Theile — er sei L — vermehrt um $\int \frac{d^n(Au^{(n)})}{dx^n} \delta u \, dx$. Bedeutet nun y eine gegebene Function von x, und setzt man $u = yt$, so ist $\delta u = y \delta t$, also

$$(2.) \qquad \delta Z = L + \int y \frac{d^n(Au^{(n)})}{dx^n} \delta t \, dx.$$

Einen *gleichen Werth* mufs man finden, wenn man zuerst $u = yt$ in (1.) einsetzt, und erst dann variirt; nur *die Form*, in der beide Ausdrücke auftreten, wird verschieden, und grade dadurch *Jacobi's* Satz erhalten werden.

Substituirt man obigen Werth für u, so hat $u^{(n)}$ die Form

$$\alpha t^{(n)} + \alpha_1 t^{(n-1)} + \cdots + \alpha_{n-1} t' + \alpha_n t,$$

wo die α einfache Functionen von y, also auch Functionen von x sind; folglich besteht $Au^{(n)}u^{(n)}$ aus einer Summe von Gliedern $\Sigma \beta t^{(m)} t^{(p)}$, wo die β gegebene Functionen von x (wie die α) sind, und die Indices m und p die Werthe 0, 1, etc. n annehmen. Setzt man diesen Ausdruck in (1.), so

läfst sich $2Z$ leicht auf die Form

$$(3.) \qquad M+\int(C_0tt-C_1t't'+C_2t''t''-\cdots\pm C_nt^{(n)}t^{(n)})\,dx$$

bringen, wenn M, wie früher L, keine Integration enthält, und die C gegebene Functionen von x sind. Es besteht nämlich $\Sigma\int\beta t^{(m)}t^{(p)}dx$ erstens aus Gliedern, für die $m=p$ ist, die also unmittelbar die Form (3.) haben, zweitens aus Gliedern, in denen m und p verschieden sind. Es sei $p>m$, und zwar zunächst $p=m+1$; für solche Glieder ist

$$\int\beta t^{(m)}t^{(p)}dx=\int\beta t^{(m)}t^{(m+1)}dx=\frac{\beta t^{(m)}t^{(m)}}{2}-\int\frac{\beta'}{2}t^{(m)}t^{m)}dx,$$

also von der Form (3.). Ist $p-m>1$, so reducirt man vermittelst Integration durch Theile, nämlich nach der Gleichung

$$\int\beta t^{(m)}t^{p)}dx=\beta t^{(m)}t^{(p-1)}-\int\beta' t^{(m)}t^{(p-1)}dx-\int\beta t^{(m+1)}t^{(p-1)}dx$$

das Integral auf der linken Seite auf solche von den *beiden* eben betrachteten Formen, also auch auf die *eine* Form $\int\beta t^{(r)}t^{(r)}dx$.

Nimmt man nun die Variation von $2Z$ in der Form (3.), so wird nach dem schon oben benutzten bekannten Satze δZ gleich einem von dem Integralzeichen freien Theile N vermehrt um

$$(4.) \qquad \int\Big(C_0t+\frac{d(C_1t')}{dx}+\frac{d^2(C_2t'')}{dx^2}+\cdots+\frac{d^n(C_nt^{(n)})}{dx^n}\Big)\delta t\,dx.$$

Es muss daher der Ausdruck (4.) gleich dem Integrale in (2.) sein, d. h.

$$(5.) \qquad y\frac{d^n(Au^{(n)})}{dx^n}=C_0t+\frac{d(C_1t')}{dx}+\cdots+\frac{d^n(C_nt^{(n)})}{dx^n}.$$

Die Grōfse C_0 ist offenbar gleich $y\frac{d^n(Ay^{(n)})}{dx^n}$; denn da $u=yt$, so wird

$$u^{(n)}=y^{(n)}t+\frac{n}{1}y^{(n-1)}t'+\cdots$$

Es ist daher

$$y\frac{d^n(Ay^{(n)}t)}{dx^n}$$

das einzige Glied, welches einen Beitrag zu C_0t liefern kann, und dieser ist offenbar

$$yt\frac{d^n(Ay^{(n)})}{dx^n}.$$

Aus diesen Entwicklungen folgt unmittelbar *Jacobi's* Satz. Macht man nämlich

$$U = A_0 u + \frac{d(A_1 u')}{dx} + \cdots + \frac{d^n(A_n u^{(n)})}{dx^n},$$

bezeichnet durch die A wiederum gegebene Functionen von x, und setzt $u = yt$, wo y eine gegebene Function von x ist, so wird nach den obigen Entwicklungen

$$yU = B_0 t + \frac{d(B_1 t')}{dx} + \cdots + \frac{d^n(B_n t^{(n)})}{dx^n},$$

wenn die B ähnlich den C, nämlich gleichfalls bekannte Functionen von x sind. Da ferner

$$B_0 = y\left(A_0 y + \frac{d(A_1 y')}{dx} + \cdots + \frac{d^n(A_n y^{(n)})}{dx^n}\right)$$

ist, so wird, wenn y so gewählt wird, dafs es ein Integral der Differentialgleichung $U = 0$ ist, auch B_0 verschwinden, also

$$\int y U dx = B_1 t' + \frac{d(B_2 t'')}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}(B_n t^{(n)})}{dx^{n-1}},$$

wie der Satz von *Jacobi* behauptet.

Anmerk. Um die *Werthe* der B, die in jener Abhandlung von *Jacobi* nicht in Frage kommen, wirklich zu bestimmen, habe ich das Verfahren etwas abgeändert, indem ich schon früher durch Theile integrirte, und dadurch $\int A u^{(n)} u^{(n)} dx$ auf $\int u \frac{d^n(A u^{(n)})}{dx^n} dx$ reducirte. Setzt man in dieses Integral $u = ty$, so hat man nur Integrale von der Form $\int \beta t t^{(p)} dx$ statt wie früher von der Form $\int \beta t^{(m)} t^{(p)} dx$ zu behandeln.

II.

Seite 72 stellt *Jacobi* einen zweiten Satz auf, der gleichfalls von *Delaunay* im weiteren Verlaufe der oben erwähnten Arbeit bewiesen ist. Setzt man nämlich

$$J = \int f(x, y, y', \ldots y^{(n)}) dx,$$

so zerfällt bekanntlich δJ in einen Theil wie L und ein Integral $\int V dy\, dx$, wo

$$V = f'(y) - \frac{df'(y')}{dx} + \cdots \pm \frac{d^n f'(y^{(n)})}{dx^n}$$

ist. *Jacobi* behauptet, dafs δV die Form

$$(6.) \qquad A\delta y + \frac{d(A_1 \delta y')}{dx} + \cdots \frac{d^n(A_n \delta y^{(n)})}{dx^n} = W$$

hat. Diesen Satz durch directes Variiren von V zu beweisen scheint Schwierigkeiten zu haben; ich schlage deshalb folgenden, dem obigen ähnlichen Weg ein:

Es seien δ und θ Zeichen von Variationen, die unabhängig von einander sind; alsdann wird die doppelte Variation $\delta\theta J$ gleich

$$(7.) \qquad \Sigma\int f''(y^{(m)}, y^{(p)})(\delta y^{(m)}\theta y^{(p)} + \theta y^{(m)}\delta y^{(p)})\,dx,$$

wenn das Summenzeichen sich auf alle Werthe von m und p bezieht, die man durch Combinationen der Zahlen 0, 1, 2, ... n zur zweiten Klasse mit Wiederholung ohne Permutation erhält. Einerseits ist dieser Ausdruck offenbar von der Form

$$L + \int \delta V\,\theta y\,dx,$$

andrerseits läfst er sich (s. unten) in die Gestalt

$$(8.) \qquad M + \int (A\,\delta y\,\theta y - A_1\,\delta y'\,\theta y' + \cdots \pm A_n\,\delta y^{(n)}\theta y^{(n)})\,dx$$

bringen, folglich nach bekannten Sätzen sofort in

$$N + \int W\theta(y)\,dx$$

transformiren. Hieraus folgt unmittelbar, dafs δV gleich W ist, wie behauptet war.

Dafs $\delta\theta J$ wirklich die Form (8.) hat, sieht man auf folgende Art ein: Die Glieder von (7.), für welche $m = p$, haben bereits diese Gestalt; in den übrigen mag $p > m$ sein, und von diesen betrachten wir zuerst alle, in welchen $p = m + 1$. Dann wird

$$\int \beta(\delta y^{(m)}\theta y^{(m+1)} + \theta y^{(m)}\delta y^{(m+1)})\,dx$$

offenbar auf

$$\int \beta'\,\delta y^{(m)}\theta y^{(m)}\,dx$$

also auf die verlangte Form durch eine einmalige Integration durch Theile zurückgeführt. Ist endlich p noch gröfser, so wird

$$\int \beta(\delta y^{(m)}\theta y^{(p)} + \delta y^{(p)}\theta y^{(m)})\,dx$$

auf

$$\int \beta(\delta y^{(m+1)}\theta y^{(p-1)} + \delta y^{(p-1)}\theta y^{(m+1)})\,dx \text{ und } \int \beta'(\delta y^{(m)}\theta y^{(p-1)} + \delta y^{(p-1)}\theta y^{(m)})\,dx$$

also schliefslich auf eine der früheren Formen, und daher auf die Form von (8.) reducirt. —

Januar 1857.

7.

Die Krümmungslinie der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle.

(Von Herrn *P. Zech* in Stuttgart.)

(Im 52. Bande dieses Journals habe ich die Eigenschaften der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle untersucht, welche sich aus der punktweisen Construction derselben ergeben. Eine Reihe weiterer Eigenschaften findet man, wenn man sie als Einhüllungsfläche von Ebenen betrachtet. Ich bediene mich dabei derselben Bezeichnungen, wie in jenem Aufsatz und fahre in der Nummernzahl fort.)

9.

Zu den Mantellinien eines Kegels K, welcher die optischen Axen des Ellipsoids E zu Fokallinien hat, lege man senkrechte Ebenen im Abstand der reciproken Mantellinienlänge des Ergänzungskegels C vom Mittelpunkt O. Diese Ebenen sind Berührungsebenen an die Wellenfläche, ihre Einhüllungsfläche ist eine entwickelbare Fläche F: sie ist einer Kugel mit dem Mittelpunkt O und mit einem Halbmesser gleich jener reciproken Länge umschrieben und ihre Berührungsebenen sind den Berührungsebenen des Ergänzungskegels C parallel, oder sie ist die Einhüllungsfläche der gemeinschaftlichen Berührungsebenen jener Kugel und des Kegelschnitts, in welchem C die unendlich ferne Ebene schneidet (unter Berührungsebene eines Kegelschnitts ist jede Ebene zu verstehen, welche durch eine seiner Tangenten geht). Die Fläche F hat dieselben Hauptschnittebenen wie die Wellenfläche und ist durch zwei auf verschiedenen Hauptschnittebenen senkrechte Berührungsebenen bestimmt. Die Erzeugenden der Fläche F liegen in den Normalebenen des Kegels K, weil je zwei aufeinanderfolgende Berührungsebenen von F senkrecht stehen auf zwei aufeinanderfolgenden Mantellinien von K. Die Wellenfläche ist die Einhüllungsfläche aller möglichen entwickelbaren Flächen F, welche den verschiedenen Kegeln K entsprechen.

Es giebt noch eine zweite Art entwickelbarer Flächen, als deren Einhüllungsfläche die Wellenfläche sich betrachten läfst. Ist ON Mantellinie eines Kegels K, OS die entsprechende Mantellinie des Ergänzungskegels C (2.)

oder die eine Halbaxe des auf ON senkrechten Diametralschnitts von E, OQ die zweite Halbaxe dieses Schnitts, so sind zwei zu ON senkrechte Ebenen in den Abständen $\frac{1}{OS}$ und $\frac{1}{OQ}$ von O Berührungsebenen an die Wellenfläche. Alle möglichen zu den Mantellinien von K senkrechte Ebenen im constanten Abstand $\frac{1}{OS}$ von O bilden eine Fläche F, alle möglichen zu den Mantellinien von K senkrechte Ebenen in dem veränderlichen Abstand $\frac{1}{OQ}$ von O bilden eine entwickelbare Fläche G, welche demselben unendlich fernen Kegelschnitt wie F umschrieben ist. Ist nun OV der Abstand einer zu ON senkrechten Berührungsebene an E von O, so ist $OV.OS.OQ$ constant als Inhalt eines Parallelepipeds aus drei conjugirten Halbmessern von E, welche Richtung auch ON habe: bleibt ON auf K, so ist OS constant, also auch $OV.OQ$, oder das Verhältnifs $OV:\frac{1}{OQ}$, d. h. die Berührungsebenen der Fläche G sind Berührungsebenen an ein E ähnliches Ellipsoid. Die Fläche G ist also die Einhüllungsfläche der gemeinschaftlichen Berührungsebenen an ein E ähnliches Ellipsoid und an einem unendlich fernen Kegelschnitt; sie hat dieselben Hauptschnittebenen wie die Wellenfläche, ihre Erzeugenden liegen in den Normalebenen des Kegels K. Die Wellenfläche ist die Einhüllungsfläche aller möglichen Flächen G. Jede Fläche G ist bestimmt, sobald man von ihr zwei zu verschiedenen Hauptschnittebenen senkrechte Berührungsebenen kennt.

Sind K_1 und K_2 zwei sich schneidende Kegel, welche die optischen Axen von E zu Fokallinien haben, so bestimmt der Kegel K_1 eine Fläche F_1 und eine Fläche G_1, welche demselben unendlich fernen Kegelschnitt umschrieben sind, der Kegel K_2 eine Fläche F_2 und eine Fläche G_2, welche auch Einem unendlich fernen Kegelschnitt umschrieben sind. Die zu einer gemeinschaftlichen Mantellinie von K_1 und K_2 senkrechten Berührungsebenen an die Wellenfläche sind Berührungsebenen der 4 Flächen F_1, G_1, F_2, G_2 und zwar die eine von F_1 und G_2, die andere von F_2 und G_1. Jede Berührungsebene der Wellenfläche läfst sich also als Berührungsebene entweder einer Fläche G oder einer Fläche F betrachten; die zwei Flächen sind bestimmt durch sich rechtwinklig schneidende Kegel, also sind die Erzeugenden, längs welcher sie von jener Berührungsebene berührt werden, senkrecht auf einander, weil die eine in der Normalebene eines Kegels K_1, die andere in der Normalebene eines Kegels K_2 längs ihrer gemeinschaftlichen Mantellinie liegt.

10.

Die zwei Arten entwickelbarer Flächen F und G sind die Polarflächen der ellipsoidischen und sphärischen Kegelschnitte auf der Wellenfläche in Beziehung auf ein Ellipsoid D, welches dieselben Hauptschnittebenen wie die Wellenfläche und die Halbaxen $\sqrt{bc}$, $\sqrt{ca}$, $\sqrt{ab}$ hat, wenn die des Ellipsoids $\mathfrak{E}$ beziehungsweise nach denselben Richtungen a, b und c sind.

Denn die Polarfläche eines ellipsoidischen Kegelschnitts ist die Einhüllungsfläche der gemeinschaftlichen Berührungsebenen der Polarflächen des Ellipsoids und des Kegels, die sich längs des Kegelschnitts schneiden. Das Ellipsoid ist E ähnlich (6.), hat also die Halbaxen $\frac{1}{ma}$, $\frac{1}{mb}$, $\frac{1}{mc}$, wo m verschieden ist für verschiedene ellipsoidische Kegelschnitte; seine Polarfläche für das Ellipsoid D ist ein Ellipsoid mit den Halbaxen $mabc$, $mbca$, $mcab$, d. h. eine Kugel. Die Polarfläche des Kegels ist durch einen unendlich fernen Kegelschnitt vorgestellt. Die Polarfläche jedes ellipsoidischen Kegelschnitts ist also eine einer Kugel und einem unendlich fernen Kegelschnitt umschriebene entwickelbare Fläche, und daher durch zwei auf verschiedenen Hauptschnittebenen der Wellenfläche senkrechte Berührungsebenen bestimmt. Die vier Scheitel des ellipsoidischen Kegelschnitts liegen auf zwei Kreisen, in welchen die Wellenfläche zwei ihrer Hauptschnittebenen schneidet; die Polarflächen dieser Kreise für D sind elliptische Cylinder, welche, wie sich leicht ergiebt, die Wellenfläche längs der zwei Ellipsen berühren, in welchen die Wellenfläche dieselben Hauptschnittebenen schneidet. Die Polarebenen der vier Scheitel sind also Berührungsebenen der Wellenfläche und daher Berührungsebenen einer der entwickelbaren Flächen F, welche einer Kugel und der Wellenfläche umschrieben sind. Da nun diese vier Berührungsebenen die Fläche F vollkommen bestimmen, und ebenso die Polarfläche des ellipsoidischen Kegelschnitts, so fallen die beiden Flächen zusammen.

Auf ganz ähnliche Art ergiebt sich der Beweis, dafs die Polarflächen der sphärischen Kegelschnitte die entwickelbaren Flächen G sind.

Es folgt daraus, dafs die Wellenfläche in Beziehung auf das Ellipsoid D ihre eigene Polarfläche ist; d. h. dafs sie die Einhüllungsfläche der Polarebenen ihrer Punkte in Beziehung auf D ist*).

---

*) Ein Satz, welcher bereits von Herrn *Plücker* (Bd. 19 S. 42 dieses Journals) aufgestellt worden ist. ***B.***

11.

Die zwei entwickelbaren Flächen F und G, welche eine bestimmte Berührungsebene mit der Wellenfläche gemein haben, werden von dieser Berührungsebene längs zweier Erzeugenden berührt, welche Tangenten an die Krümmungslinien durch den Berührungspunkt auf der Wellenfläche sind; und *die Berührungskurven der entwickelbaren Flächen F und G mit der Wellenfläche sind die Krümmungslinien der Wellenfläche.*

Denn es sei wieder ON gemeinschaftliche Mantellinie zweier sich rechtwinklig schneidender Kegel K_1 und K_2, welche die optischen Axen von E zu Fokallinien haben, T eine der auf ON senkrechten Berührungsebenen der Wellenfläche. T ist Berührungsebene einer entwickelbaren Fläche F_1 und einer entwickelbaren Fläche G_2, von denen die erste durch den Kegel K_1, die zweite durch den Kegel K_2 bestimmt ist (9.). Die Erzeugende von F_1 in T liegt in der Normalebene von K_1 längs ON, die Erzeugende von G_2 in T liegt in der Normalebene von K_2 längs ON. Geht man von der gemeinschaftlichen Mantellinie ON weiter zu der ihr unendlich nahen Mantellinie auf K_2 und betrachtet man diese als Mantellinie eines neuen Kegels K_1, so erhält man senkrecht zu ihr eine Berührungsebene einer neuen Fläche F_1, welche auch auf der Normalebene zum ersten Kegel K_1 längs ON senkrecht steht. Die Erzeugenden, längs welcher die zwei Flächen F von den zwei aufeinanderfolgenden Berührungsebenen berührt werden, liegen in der Normalebene und die Schnittlinie der zwei aufeinanderfolgenden Berührungsebenen oder die Tangente an die Berührungskurve der Fläche F mit der Wellenfläche steht senkrecht auf der Normalebene zu K_1 längs ON. Ganz ähnlich ergiebt sich, dafs die Tangente an die Berührungskurve von G_2 mit der Wellenfläche senkrecht steht auf der Normalebene zu K_2 längs ON.

Die Berührungskurven der Flächen F und G mit der Wellenfläche durchschneiden sich also rechtwinklig und in jedem Punkt der Berührungskurve ist die Erzeugende der einen Fläche Tangente an die Berührungskurve der andern.

Ist nun ON Mantellinie eines Kegels K_1 und OS die entsprechende Mantellinie des Ergänzungskegels C_1, $R'M'$ die Spur der (auf der Ebene SON senkrechten) Polarebene von S auf E für eine Kugel mit dem Mittelpunkt O und mit der Längeneinheit als Halbmesser, so ist (wie sich aus (4.) ergiebt) $R'M'$ die Richtung der Normale zur Wellenfläche, welche zu der auf ON

senkrechten Berührungsebene T im Abstand $\frac{1}{OS}$ von O gehört. Die Linie $R'M'$ ist (4.) gemeinschaftliche Tangente an das Ellipsoid E und eine concentrische Kugel vom Halbmesser $\frac{1}{OS}$, also Erzeugende einer entwickelbaren Fläche H, der Einhüllungsfläche der dem Ellipsoid und der Kugel gemeinschaftlichen Berührungsebenen. Ist s unendlich nahe an S auf dem sphärischen Kegelschnitt, in welchem C_1, das Ellipsoid E schneidet, so erhält man eine neue Erzeugende $r'm'$ der Fläche H, welche die vorhergehende schneidet und mit ihr die auf SON senkrechte Berührungsebene der Fläche H bestimmt, die Polarebene von S für die Kugel mit der Längeneinheit als Halbmesser. Ist R der Berührungspunkt der Wellenfläche mit T, r der Berührungspunkt der Wellenfläche mit der neuen Berührungsebene t an die Wellenfläche, die sich aus Os ergiebt, so ist Rr ein Element der Berührungskurve einer Fläche F mit der Wellenfläche, also senkrecht zur Ebene SON, der Normalebene des Kegels K_1 längs ON. Denkt man sich also durch Rr eine Ebene parallel zur Ebene $R'M'm'r'$, so fallen die Parallelen zu $R'M'$ durch R und zu $r'm'$ durch r in diese Ebene, d. h. die Normalen in R und r zur Wellenfläche schneiden sich. Die aufeinanderfolgenden Normalen der Wellenfläche längs der Berührungskurve einer Fläche F' mit der Wellenfläche schneiden sich, diese Berührungskurven sind Krümmungslinien der Wellenfläche, also auch die sie rechtwinklig schneidenden Berührungskurven der Flächen G.

Da die Wellenfläche Einhüllungsfläche der Flächen F' oder der Flächen G ist, so kann man auch sagen, die Charakteristiken bei diesen zwei Einhüllungsarten seien die Krümmungslinien der Wellenfläche.

Nur die eine Reihe Krümmungslinien (die auf den Flächen F') wird durch folgende Definition bestimmt: Eine Krümmungslinie der Wellenfläche ist der geometrische Ort der Berührungspunkte aller sich gleich schnell fortpflanzender ebener Wellen mit der Wellenfläche. Darunter befinden sich die Berührungskreise der singulären Berührungsebenen.

Stuttgart, März 1857.

8.

Über das Flächenpotential.

(Von Herrn *W. Scheibner* in Leipzig.)

Herr *Jul. Weingarten* hat im 49sten Bande dieses Journals die Differentialgleichung, welcher das Potential

$$V = \iiint \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}$$

eines beliebig gegebenen Körpers in Bezug auf den Punkt (x, y, z) genügt, auf eine sinnreiche Weise abgeleitet. Mit Hülfe der leicht beweisbaren Formel

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(at+bu+cv)i}\, \frac{dt\, du\, dv}{t^2+u^2+v^2}$$

läfst sich das Tripelintegral für V in ein sechsfaches transformiren von der Form

$$V = \frac{1}{2\pi^2}\iiint \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\overline{\xi-x}t+\overline{\eta-y}u+\overline{\zeta-z}v)i}\, \frac{dt\, du\, dv}{t^2+u^2+v^2}.$$

Soll nach den Coordinaten des angezogenen Punktes differentiirt werden, so ist in dieser Form die Differentiation unter dem Integralzeichen auch in dem Falle auszuführen erlaubt*), wenn der Punkt dem Körper angehört. Man erhält dadurch ohne Schwierigkeit

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{1}{2\pi^2}\iiint \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\overline{\xi-x}t+\overline{\eta-y}u+\overline{\zeta-z}v)i}\, dt\, du\, dv.$$

Da in dieser Gleichung die rechte Seite durch ein *Fourier*'sches Integral von bekanntem Werthe ausgedrückt wird, so folgt schliefslich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varphi(x, y, z),$$

welche Gröfse im Innern des Körpers seiner Dichtigkeit proportional ist, aufserhalb desselben aber verschwindet.

Für das Flächenpotential läfst sich vermittelst derselben Substitution der Satz beweisen, dafs beim Durchgang durch die mit Masse belegte Fläche in einer beliebigen Richtung der Sprung der nach der nämlichen Richtung zerlegten Attractionscomponente gleichfalls der in dem Durchgangspunkte stattfindenden Dichtigkeit proportional ist. Es sind dazu folgende Transformationen erforderlich.

---

*) Wegen der Rechtfertigung dieser Behauptung sehe man die Nachschrift zu diesem Aufsatz.

Sei df ein Element der gegebenen Fläche, deren laufende Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem wie oben durch ξ, η, ζ bezeichnet werden sollen. Das Potential für einen Punkt (x, y, z) wird dargestellt durch das Doppelintegral

$$W = \iint \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)\, df}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}$$

ausgedehnt über alle Punkte der mit Masse belegten Fläche, deren Dichtigkeit die Function $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ ausdrückt. Wenn wir der Kürze halber in der Richtung der x Axe durch die Fläche hindurchgehen, so haben wir den Sprung zu untersuchen, welchen der Differentialquotient $\frac{\partial W}{\partial x}$ bei diesem Durchgange erfährt.

Bezeichnet man durch $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x\pm h}$ den Werth, in welchen $\frac{\partial W}{\partial x}$ übergeht, wenn man $x \pm h$ statt x schreibt, so wird für unendlich abnehmende Werthe von h die Differenz

$$\lim. \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x+h} - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x-h} \right\} = \Delta$$

die Aenderung darstellen, welche der Differentialquotient $\frac{\partial W}{\partial x}$ beim Durchgange durch den Punkt (x, y, z) in der Richtung der x Axe erleidet. Diese Aenderung ist im Allgemeinen verschwindend klein, und kann nur dann einem endlichen Betrage gleich werden, wenn $\frac{\partial W}{\partial x}$ unstetig wird, d. h. wenn der Punkt (x, y, z) auf der Fläche liegt.

Nun giebt die Differentialrechnung

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x+h} = \lim. \frac{W_{x+h}-W}{h}, \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x-h} = \lim. \frac{W-W_{x-h}}{h}$$

folglich den Werth der Differenz

$$\Delta = \lim. \frac{W_{x+h}+W_{x-h}-2W}{h}$$

wo für W die Integralausdrücke zu substituiren sind. Das oben gegebene Doppelintegral soll zunächst in derselben Weise wie der Ausdruck des Körperpotentials transformirt werden. Damit folgt

$$W = \frac{1}{2\pi^2} \iint \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, df \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\overline{\xi-x}t+\overline{\eta-y}u+\overline{\zeta-z}v)i} \frac{dt\, du\, dv}{t^2+u^2+v^2}$$

und weiter

$$\Delta = -\frac{2}{\pi^2} \lim. \iint \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, df \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\overline{\xi-x}t+\overline{\eta-y}u+\overline{\zeta-z}v)i} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}ht}{h} \frac{dt\, du\, dv}{t^2+u^2+v^2}.$$

Für das Flächenelement gilt der Ausdruck

$$df = \frac{d\eta\, d\zeta}{\cos\alpha}$$

wenn α, β, γ die Winkel der in df errichteten Normale mit den Coordinatenaxen bezeichnen. Vermöge der Gleichung der Fläche ist ξ als Function von η und ζ bestimmt, und, wenn der Punkt (x, y, z) auf der Fläche liegt, wird $\xi = x$ für $\eta = y$ und $\zeta = z$. Folglich hat man nach dem ***Taylor***'schen Satze die Entwickelung

$$\xi = x + \frac{\partial y}{\partial x}(\eta - y) + \frac{\partial z}{\partial x}(\zeta - z) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\eta - y)^2 + \cdots,$$

da aber in dem zu findenden Integrale nur die dem Punkte (x, y, z) unendlich nahe liegenden Flächenelemente von Einfluſs sein können, weil durch die übrigen Theile der Fläche in dem Werthe von $\frac{\partial W}{\partial x}$ keine Unstetigkeit hervorgebracht werden kann, so brauchen wir nur so weit zu integriren, als die Tangentialebene im Punkt (x, y, z) mit der Fläche zusammenfällt; d. h. wir dürfen die in die höheren Potenzen $(\eta - y)^2 \ldots$ multiplicirten Glieder in der Entwickelung für ξ weglassen, und erhalten

$$\Delta = -\frac{2}{\pi^2}\lim.\iint \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{\cos\alpha}\, d\eta\, d\zeta \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int e^{(\eta-y)\left(u+\frac{\partial x}{\partial y}t\right)i + (\zeta-z)\left(v+\frac{\partial x}{\partial z}t\right)i} \frac{\sin^2\frac{1}{2}ht}{h}\, \frac{dt\, du\, dv}{t^2+u^2+v^2}.$$

Führt man jetzt statt der Integrationsvariabeln t, u, v drei neue Veränderliche

$$t' = ht, \qquad u' = u + \frac{\partial x}{\partial y}t, \qquad v' = v + \frac{\partial x}{\partial z}t$$

ein, so bleiben die Grenzen des Integrals unverändert, die Functionaldeterminante ist h, folglich nach bekannten Regeln

$$\Delta = -\frac{2}{\pi^2}\lim.\iint \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{\cos\alpha}\, d\eta\, d\zeta \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int e^{(\overline{\eta-y}u' + \overline{\zeta-z}v')i} \frac{\sin^2\frac{1}{2}t'\, dt'\, du'\, dv'}{t'^2 + \left(u'h - \frac{\partial x}{\partial y}t'\right)^2 + \left(v'h - \frac{\partial x}{\partial z}t'\right)^2}.$$

In dieser Form hindert Nichts, wenn man zur Grenze übergehen will, h unter dem Integralzeichen unendlich abnehmen zu lassen, wodurch die einfache Gleichung

$$\Delta = -\frac{1}{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, \frac{2}{\pi^2}\iint \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{\cos\alpha}\, d\eta\, d\zeta \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int e^{(\overline{\eta-y}u + \overline{\zeta-z}v)i} \frac{\sin^2\frac{1}{2}t}{t^2}\, dt\, du\, dv$$

hervorgeht. Bezeichnet man durch a, b, c die Winkel der im Punkt (x, y, z)

errichteten Normale mit den Coordinatenaxen, so wird

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}}.$$

Von den Integrationen ergiebt sich zunächst die Integration nach t vermittelst der Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}t}{t^2}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t}\,\frac{1-\cos t}{t} = \int_0^1 ds \int_0^{\infty} \frac{\sin st}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

und damit

$$\Delta = -\frac{\cos^2 a}{\pi} \iint \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{\cos\alpha}\,d\eta\,d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\overline{\eta-y}u+\overline{\zeta-z}v)i}\,du\,dv.$$

Die rechte Seite dieses Ausdrucks ist jetzt wiederum auf die Form eines *Fourier*'schen Integrals reducirt, und giebt ohne Schwierigkeit, da α in a übergeht, wenn man x, y, z statt ξ, η, ζ schreibt:

$$\Delta = -4\pi\varphi(x,y,z)\cos a.$$

Q. E. D.

Nachschrift.

Ich will im Folgenden einen Weg mittheilen, auf dem man sich, dünkt mich, von der Berechtigung der Differentiation unter dem Integralzeichen bei dem *Weingarten*'schen Beweise überzeugen kann. Schreibt man zur Abkürzung

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = dm,\quad dt\,du\,dv = dw,\quad (\xi-x)t+(\eta-y)u+(\zeta-z)v = H$$

und betrachtet das Integral

$$V_h = \frac{1}{2\pi^2}\int e^{Hi-h(t^2+u^2+v^2)}\,\frac{dm\,dw}{t^2+u^2+v^2}$$

mit den bekannten Grenzen der sechsfachen Integration, so kann, wenn h eine beliebige positive Constante bezeichnet, jedenfalls unter dem Integralzeichen zweimal nach x differentiirt werden. Denn setzt man

$$V_h' = -\frac{i}{2\pi^2}\int e^{Hi-h(t^2+u^2+v^2)}\,\frac{t}{t^2+u^2+v^2}\,dm\,dw,$$

$$V_h'' = -\frac{1}{2\pi^2}\int e^{Hi-h(t^2+u^2+v^2)}\,\frac{t^2}{t^2+u^2+v^2}\,dm\,dw,$$

so sind V_h, V_h', V_h'' drei Integrale, welche bestimmten endlichen Werthen

gleich werden, wenn man an die Stelle ihrer einzelnen Elemente überall deren absolute numerischen Werthe (für die imaginäre Exponentialgröfse den Modul 1) setzt. Dies lehrt der blofse Anblick der drei Gleichungen

$$\int e^{-h(t^2+u^2+v^2)}\,\frac{dm\,dw}{t^2+u^2+v^2} = \int dm \int_0^\infty e^{-hr^2}\,dr \int_0^\pi \sin\vartheta\,d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

$$\int e^{-h(t^2+u^2+v^2)}\,\frac{Vt^2}{t^2+u^2+v^2}\,dm\,dw = \int dm \int_0^\infty e^{-hr^2} r\,dr \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 2\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

$$\int e^{-h(t^2+u^2+v^2)}\,\frac{t^2}{t^2+u^2+v^2}\,dm\,dw = \int dm \int_0^\infty e^{-hr^2} r^2\,dr \int_0^\pi \sin\vartheta\cos^2\vartheta\,d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Den Reihen analog, welche unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder convergiren, haben, wie ***Dirichlet*** gelehrt hat, solche Integrale die Eigenschaft, bei anderer Vertheilung ihrer Elemente, in Folge einer Veränderung der Integrationsordnung oder der Einführung neuer Variabeln, ungeändert zu bleiben. Geht man nun von der Gleichung für V_h'' aus, und integrirt auf beiden Seiten nach x zwischen beliebigen endlichen Grenzen, so folgt

$$\int V_h'' dx = -\frac{1}{2\pi^2} \int \left\{ \int e^{Hi-h(t^2+u^2+v^2)}\,\frac{t^2}{t^2+u^2+v^2}\,dm\,dw \right\} dx.$$

Da aber aus demselben Grunde wie oben, die Umkehr der Integrationsordnung hier erlaubt ist, so erhält man, wenn man zuerst nach x integrirt,

$$\int V_h'' dx = \text{const.} - \frac{i}{2\pi^2} \int e^{Hi-h(t^2+u^2+v^2)}\,\frac{t}{t^2+u^2+v^2}\,dm\,dw = c - V_h'$$

$$\text{oder} \quad V_h'' = \frac{\partial V_h'}{\partial x}.$$

Ebenso beweist man die Gleichung $V_h' = \frac{\partial V_h}{\partial x}$ und damit

$$\frac{\partial^2 V_h}{\partial x^2} = V_h''.$$

Da für die Differentiationen nach y und z die nämlichen Regeln gelten, so folgt jetzt ohne Schwierigkeit

$$\frac{\partial^2 V_h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_h}{\partial z^2} = -\frac{1}{2\pi^2} \int e^{Hi-h(t^2+u^2+v^2)}\,dm\,dw.$$

Läfst man auf beiden Seiten dieser Gleichung die willkürliche positive Constante h ohne Grenzen abnehmen, so geht V_h in das Potenzial V über, und da auf der rechten Seite gleichzeitig ein stetiger Uebergang in das ***Fourier***'sche Integral stattfindet, so geht mit völliger Strenge die Gleichung hervor:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varphi(x, y, z).$$

Leipzig, im Januar 1857.

9.

Darstellung der elliptischen Funktionen durch Potenzreihen.

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch *C. W. Borchardt.*)

Die vier Reihen

$$\begin{aligned}
\vartheta x &= 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots \\
\vartheta_1 x &= 2\{\sqrt[4]{q}\sin x - \sqrt[4]{q^9}\sin 3x + \sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \cdots\} \\
\vartheta_2 x &= 2\{\sqrt[4]{q}\cos x + \sqrt[4]{q^9}\cos 3x + \sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \cdots\} \\
\vartheta_3 x &= 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \cdots
\end{aligned}$$

bilden den Nenner und die Zähler der Brüche, durch welche ich in meinen *Fundam. Nov.* die elliptischen Funktionen

$$\sqrt{k}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}, \qquad \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}, \qquad \frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$$

dargestellt habe. Ich will im Folgenden diese vier Reihen nach Potenzen von x entwickeln.

Man hat hiezu ein einfaches Mittel durch die in die Augen springende Eigenschaft dieser Reihen, dafs wenn man

$$\log\sqrt[4]{q} = h$$

setzt, ihr erstes nach h genommenes Differential den entgegengesetzten Werth wie ihr zweites nach x genommenes Differential hat. Hieraus folgt sogleich auch, dafs ihr m^{tes} nach h genommenes Differential ihrem $(2m)^{\text{ten}}$ nach x genommenen Differential gleich oder entgegengesetzt ist, je nachdem m gerade oder ungerade ist, so dafs man die nachstehenden Gleichungen hat:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{2m}\vartheta x}{\partial x^{2m}} &= (-1)^m\frac{\partial^m\vartheta x}{\partial h^m}, \\
\frac{\partial^{2m+1}\vartheta_1 x}{\partial x^{2m+1}} &= (-1)^m\frac{\partial^{m+1}\vartheta_1 x}{\partial x\,\partial h^m}, \\
\frac{\partial^{2m}\vartheta_2 x}{\partial x^{2m}} &= (-1)^m\frac{\partial^m\vartheta_2 x}{\partial h^m}, \\
\frac{\partial^{2m}\vartheta_3 x}{\partial x^{2m}} &= (-1)^m\frac{\partial^m\vartheta_3 x}{\partial h^m}.
\end{aligned}$$

Um die vorgelegten Entwicklungen zu erhalten, mufs man die Werthe kennen, welche die nach x genommenen geraden Differentiale von ϑx, $\vartheta_2 x$, $\vartheta_3 x$ und die ungeraden Differentiale von $\vartheta_1 x$ für $x=0$ annehmen. Wenn man statt dieser Differentiale die Ausdrücke rechts setzt, so erlangt man den Vortheil, dafs man den speciellen Werth 0, für welchen allein man ihre Werthe zu kennen braucht, vor den nach h anzustellenden Differentiationen in die Funktionen

$$\vartheta(x), \quad \frac{\partial\vartheta_1(x)}{\partial x}, \quad \vartheta_2(x), \quad \vartheta_3(x)$$

substituiren kann, und dann nur diese speciellen Werthe, welche sie für $x=0$ annehmen, nach h zu differentiiren hat. Nach in den ***Fund. nov.*** gegebenen Formeln hat man

$$\vartheta_3(0)=\sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \quad \vartheta_2(0)=\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}, \quad \vartheta(0)=\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},$$

und es wurde dort der Werth, welchen $\frac{\partial\vartheta_1 x}{\partial x}$ für $x=0$ annimmt, gleich dem Product der vorstehenden drei Werthe gefunden oder gleich

$$\sqrt{\left(kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\right)}.$$

Wenn man daher nach den nach x ausgeführten Differentiationen $x=0$ setzt, so erhält man

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^{2m}\vartheta_3 x}{\partial x^{2m}} = (-1)^m \frac{\partial^m \sqrt{\frac{2K}{\pi}}}{\partial h^m}, \\ \frac{\partial^{2m+1}\vartheta_1 x}{\partial x^{2m+1}} = (-1)^m \frac{\partial^m \sqrt{\left(kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\right)}}{\partial h^m}, \\ \frac{\partial^{2m}\vartheta_2 x}{\partial x^{2m}} = (-1)^m \frac{\partial^m \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}}{\partial h^m}, \\ \frac{\partial^{2m}\vartheta x}{\partial x^{2m}} = (-1)^m \frac{\partial^m \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}}{\partial h^m}. \end{cases}$$

Hieraus folgt zufolge des ***Maclaurin***'schen Satzes, wenn man mit A, A_1, A_2 die drei Gröfsen

$$\frac{2K}{\pi}=A, \quad \frac{2kK}{\pi}=A_1, \quad \frac{2k'K}{\pi}=A_2$$

und mit Πn das Product $1.2.3\ldots n$ bezeichnet

$$(2.)\quad \begin{cases} \vartheta_3 x = \sqrt{A} - \dfrac{\partial\sqrt{A}}{\partial h}\dfrac{x^2}{\Pi 2} + \dfrac{\partial^2\sqrt{A}}{\partial h^2}\dfrac{x^4}{\Pi 4} - \dfrac{\partial^3\sqrt{A}}{\partial h^3}\dfrac{x^6}{\Pi 6} + \cdots \\ \vartheta_2 x = \sqrt{A_1} - \dfrac{\partial\sqrt{A_1}}{\partial h}\dfrac{x^2}{\Pi 2} + \dfrac{\partial^2\sqrt{A_1}}{\partial h^2}\dfrac{x^4}{\Pi 4} - \dfrac{\partial^3\sqrt{A_1}}{\partial h^3}\dfrac{x^6}{\Pi 6} + \cdots \\ \vartheta x = \sqrt{A_2} - \dfrac{\partial\sqrt{A_2}}{\partial h}\dfrac{x^2}{\Pi 2} + \dfrac{\partial^2\sqrt{A_2}}{\partial h^2}\dfrac{x^4}{\Pi 4} - \dfrac{\partial^3\sqrt{A_2}}{\partial h^3}\dfrac{x^6}{\Pi 6} + \cdots \end{cases}$$

Ferner, wenn man

$$D = \sqrt{\left(kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\right)}$$

setzt,

$$(3.)\quad \vartheta_1 x = D.x - \frac{\partial D}{\partial h}\frac{x^3}{\Pi 3} + \frac{\partial^2 D}{\partial h^2}\frac{x^5}{\Pi 5} - \frac{\partial^3 D}{\partial h^3}\frac{x^7}{\Pi 7} + \cdots$$

Ich will jetzt die Formeln angeben, durch welche man die nach h genommenen Differentialquotienten am bequemsten nach einander findet.

Es sei

$$B = \frac{2k^2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \frac{2E}{\pi} - k'^2\frac{2K}{\pi},$$

$$B_1 = \frac{2}{\pi}\frac{1}{k}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}\, d\varphi = \frac{1}{k}\frac{2E}{\pi},$$

$$B_2 = -\frac{2}{\pi}\frac{k^2}{k'}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \frac{1}{k'}\left(\frac{2E}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\right),$$

so wird, wie ich in einer früheren Abhandlung (Bd. XXXVI S. 100 dieses Journals oder Bd. II S. 24 meiner mathematischen Abhandlungen) gezeigt habe.

$$\frac{\partial A}{\partial h} = 2A^2B, \qquad \frac{\partial B}{\partial h} = 2k^2k'^2A^3,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial h} = 2A_1^2B_1, \qquad \frac{\partial B_1}{\partial h} = -\frac{2k'^2}{k^4}A_1^3,$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial h} = 2A_2^2B_2, \qquad \frac{\partial B_2}{\partial h} = -\frac{2k^2}{k'^4}A_2^3,$$

$$\frac{\partial . k^2}{\partial h} = -\frac{\partial . k'^2}{\partial h} = 4k^2k'^2A^2 = 4k'^2A_1^2 = 4k^2A_2^2,$$

in welchen Formeln man $d\log q$ durch $4\,dh$ ersetzt hat *). Aus der letzten dieser Formeln folgt

---

*) Die hier gebrauchte Bezeichnung unterscheidet sich von der in der angeführten früheren Abhandlung angewandten überdies noch dadurch, dafs die Gröfse, die hier B_2 heifst, dort $= -B_2$ gesetzt war. Diese Aenderung ist der Symmetrie der Formeln wegen nothwendig.

$$\frac{\partial \log 2k^2k'^2}{\partial h} = 4(1-2k^2)A^2, \qquad \frac{\partial .4(1-2k^2)}{\partial h} = -32k^2k'^2A^2,$$

$$\frac{\partial \log -\frac{2k'^2}{k^4}}{\partial h} = -4\left(\frac{2}{k^2}-1\right)A_1^2, \qquad -\frac{\partial .4\left(\frac{2}{k^2}-1\right)}{\partial h} = 32\frac{k'^2}{k^4}A_1^2,$$

$$\frac{\partial \log -\frac{2k^2}{k'^4}}{\partial h} = 4\left(\frac{2}{k'^2}-1\right)A_2^2, \qquad \frac{\partial .4\left(\frac{2}{k'^2}-1\right)}{\partial h} = 32\frac{k^2}{k'^4}A_2^2.$$

Es ergiebt sich hieraus, ***dafs wenn man respective***

mit A eine der Gröfsen	$\frac{2K}{\pi}$,	$\frac{2kK}{\pi}$,	$\frac{2k'K}{\pi}$,
mit B eine der Gröfsen	$\frac{2E}{\pi}-k'^2\frac{2K}{\pi}$,	$\frac{1}{k}\cdot\frac{2E}{\pi}$	$\frac{1}{k'}\left(\frac{2E}{\pi}-\frac{2K}{\pi}\right)$,
mit a eine der Gröfsen	$4(1-2k^2)$,	$-4\left(\frac{2}{k^2}-1\right)$,	$4\left(\frac{2}{k'^2}-1\right)$,
mit b eine der Gröfsen	$2k^2k'^2$,	$\frac{-2k'^2}{k^4}$,	$\frac{-2k^2}{k'^4}$

bezeichnet, wo immer $a^2 = 16(1-2b)$, ***zwischen den Gröfsen***

$$A,\ B,\ a,\ b,\ h$$

die Differentialgleichungen

$$(4.)\quad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial h} = 2A^2B, & \frac{\partial a}{\partial h} = -16bA^2, \\ \frac{\partial B}{\partial h} = bA^3, & \frac{\partial b}{\partial h} = abA^2 \end{cases}$$

Statt finden.

Der vorstehende Satz gewährt die grofse Erleichterung, dafs man die nach h genommenen Differentialen der ***drei*** Funktionen

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},$$

welche zu suchen sind, durch dieselben Formeln ausdrücken kann. Hat man nämlich den m^{ten} nach $h = \log\sqrt[4]{q}$ genommenen Differentialquotienten der ersten dieser Funktionen durch

$$A = \frac{2K}{\pi}, \quad B = \frac{2E}{\pi} - k'^2\frac{2K}{\pi}, \quad a = 4(k'^2-k^2), \quad b = 2k^2k'^2$$

ausgedrückt, so erhält man denselben Differentialquotienten von $\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}$, wenn man in diesem Ausdrucke die Werthe

$$A = \frac{2kK}{\pi}, \quad B = \frac{1}{k}\cdot\frac{2E}{\pi}, \quad a = -\frac{4(1+k'^2)}{k^2}, \quad b = -\frac{2k'^2}{k^4}$$

substituirt, und denselben Differentialquotienten von $\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$, wenn man wieder in dem nämlichen Ausdrucke für A, B, a, b die Werthe

$$A = \frac{2k'K}{\pi}, \quad B = \frac{1}{k'}\left(\frac{2E}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\right), \quad a = \frac{4(1+k^2)}{k'^2}, \quad b = -\frac{2k^2}{k'^4}$$

setzt. Man wird daher auch die vorgelegten Entwicklungen der drei Funktionen $\vartheta_3 x$, $\vartheta_2 x$, ϑx durch dieselben Formeln darstellen können, wenn man die Entwicklungscoefficienten durch die Gröfsen A, B, a, b darstellt, und dann diesen Gröfsen die drei verschiedenen im obigen Satze angegebenen Bedeutungen giebt. Man hat ferner

$$D = \sqrt{\left(kk'\left(\frac{2k}{\pi}\right)^3\right)} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}b}\cdot\sqrt{A^3},$$

wenn man den Gröfsen A und b ihre erste Bedeutung beilegt; und wenn man in dieser Formel den Gröfsen A und b ihre beiden andern Bedeutungen giebt, erhält man keine andere Veränderung, als dafs der Ausdruck mit einer 8ten Wurzel der Einheit multiplicirt wird. Man wird daher den nach h genommenen Differentialquotienten dieses Ausdrucks und daher auch den Entwicklungscoefficienten von $\vartheta_1 x$ drei verschiedene Formen geben können, wenn man sie durch die Gröfsen A, B, a, b ausdrückt und dann diesen Gröfsen ihre dreierlei Bedeutung beilegt, wobei man nur die zweite und dritte Form, welche man so erhält, noch durch $\sqrt[4]{-1}$ zu dividiren hat.

Man bildet die verschiedenen Differentialquotienten von $\sqrt{A}$ nach einander mittelst der sich aus (4.) ergebenden Formel

$$(5.) \quad \frac{\partial H}{\partial h} = 2A^2B\frac{\partial H}{\partial A} + bA^3\frac{\partial H}{\partial B} + abA^2\frac{\partial H}{\partial b} - 16bA^2\frac{\partial H}{\partial a},$$

in welcher H eine beliebige Funktion von A, B, a, b bedeutet. Durch wiederholte Anwendung dieser Formel ergiebt sich

$$A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial . A^{\frac{1}{2}}}{\partial h} = A^{\frac{3}{2}}B,$$

$$\frac{\partial^2 . A^{\frac{1}{2}}}{\partial h^2} = 3A^{\frac{5}{2}}B^2 + bA^{\frac{9}{2}},$$

$$\frac{\partial^3 . A^{\frac{1}{2}}}{\partial h^3} = 15A^{\frac{7}{2}}B^3 + 15bA^{\frac{11}{2}}B + abA^{\frac{13}{2}},$$

$$\frac{\partial^4.A^{\frac{1}{2}}}{\partial h^4} = 105A^{\frac{9}{2}}B^4 + 210bA^{\frac{13}{2}}B^2 + 28abA^{\frac{15}{2}}B + (a^2b - b^2)A^{\frac{17}{2}},$$

$$\frac{\partial^5.A^{\frac{1}{2}}}{\partial h^5} = 945A^{\frac{11}{2}}B^5 + 3150bA^{\frac{15}{2}}B^3 + 630abA^{\frac{17}{2}}B^2 + 45(a^2b - b^2)A^{\frac{19}{2}}B + (a^3b - 6ab^2)A^{\frac{21}{2}}$$

u. s. w. u. s. w.

Man sieht hier, dafs abgesehen von den Zahlenfaktoren die Coefficienten in jedem Differentialquotienten von Anfang an dieselben werden, nämlich, wenn man dem fehlenden Gliede den Coefficienten Null giebt, die folgenden:

$$1, \quad 0, \quad ab, \quad a^2b - b^2, \quad a^3b - 6ab^2, \quad \text{etc.}$$

Man sieht aber aus der angegebenen Art der Ableitung keinen Grund hiefür. Ich will daher und um ein Beispiel für diese Ableitung zu geben die Coefficienten der drei letzten Terme in dem Ausdrucke von $\frac{\partial^6.A^{\frac{1}{2}}}{\partial h^6}$ aufsuchen. Bezeichnet man den zuletzt angegebenen 5ten Differentialquotienten von $A^{\frac{1}{2}}$ mit H, so hat man zufolge (5.) die vier Ausdrücke

$$2A^2B\frac{\partial H}{\partial A}, \quad bA^3\frac{\partial H}{\partial B}, \quad abA^2\frac{\partial H}{\partial b}, \quad -16bA^2\frac{\partial H}{\partial a}$$

zu bilden und dieselben zu addiren. Diese vier Ausdrücke ergeben respective die Terme

$$855(a^2b - b^2)A^{\frac{21}{2}}B^2 + (21a^3b - 126ab^2)A^{\frac{23}{2}}B,$$

$$9450b^2A^{\frac{21}{2}}B^2 + 1260ab^2A^{\frac{23}{2}}B + 45(a^2b^2 - b^3)A^{\frac{25}{2}},$$

$$630a^2bA^{\frac{21}{2}}B^2 + (45a^3b - 90ab^2)A^{\frac{23}{2}}B + (a^4b - 12a^2b^2)A^{\frac{25}{2}},$$

$$-10080b^2A^{\frac{21}{2}}B^2 - 1440ab^2A^{\frac{23}{2}}B + (-48a^2b^2 + 96b^3)A^{\frac{25}{2}},$$

und deren Summe

$$1485(a^2b - b^2)A^{\frac{21}{2}}B^2 + 66(a^3b - 6ab^2)A^{\frac{23}{2}}B + (a^4b - 15a^2b^2 + 51b^3)A^{\frac{25}{2}},$$

wo die beiden ersten Terme wieder die Factoren $a^2b - b^2$ und $a^3b - 6ab^2$ haben.

Man multiplicire jetzt $A^{\frac{1}{2}}$ und die angegebenen Werthe seiner Differentialquotienten nach einander mit den Gröfsen

$$1, \quad \frac{-x^2}{\Pi 2}, \quad \frac{x^4}{\Pi 4}, \quad \frac{-x^6}{\Pi 6}, \quad \frac{x^8}{\Pi 8}, \quad \frac{-x^{10}}{\Pi 10}$$

oder, was dasselbe ist, mit den Gröfsen

$$1,\quad -\frac{x^2}{2},\quad \frac{1}{\Pi 2}\cdot\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{1.3},\quad -\frac{1}{\Pi 3}\cdot\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^3}{1.3.5},\quad \frac{1}{\Pi 4}\cdot\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^4}{1.3.5.7},\quad -\frac{1}{\Pi 5}\cdot\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^5}{1.3.5.7.9}$$

und addire die erhaltenen Producte, so bekommt man zufolge (2.) die Entwicklungen von $\vartheta_3 x$, $\vartheta_2 x$, ϑx, je nachdem man den Gröfsen A, B, a, b die verschiedenen angegebenen Bedeutungen giebt. Ordnet man die erhaltene Summe nach den Funktionen von a und b, in welche die einzelnen Terme multiplicirt sind, so erhält man:

$$A^{\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{AB.x^2}{2}+\frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^2-\frac{1}{\Pi 3}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^3+\frac{1}{\Pi 4}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^4-\cdots\right\}$$

$$+\frac{bA^{\frac{9}{2}}.x^4}{\Pi 4}\left\{1-\frac{AB.x^2}{2}+\frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^2-\frac{1}{\Pi 3}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$-\frac{abA^{\frac{13}{2}}.x^6}{\Pi 6}\left\{1-\frac{AB.x^2}{2}+\frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^2-\cdots\right\}$$

$$+\frac{(a^2b-b^2)A^{\frac{17}{2}}.x^8}{\Pi 8}\left\{1-\frac{AB.x^2}{2}+\frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^2-\cdots\right\}$$

$$-\frac{(a^3b-6ab^2)A^{\frac{21}{2}}.x^{10}}{\Pi 10}\left\{1-\frac{AB.x^2}{2}+\cdots\right\}$$

$$+\frac{(a^4b-15a^2b^2+51b^3)A^{\frac{25}{2}}.x^{12}}{\Pi 12}\left\{1-\cdots\right\}\quad \text{u. s. w.}$$

Dieser Ausdruck läfst noch ein anderes Gesetz erkennen, wonach man auch die Zahlenfactoren allgemein angeben kann, mit welchen dieselben ganzen rationalen Funktionen von a und b in den verschiedenen Differentialquotienten von $A^{\frac{1}{2}}$ zu multipliciren sind. Die in Klammern eingeschlossenen Reihen werden nämlich, so weit man aus der hier geführten Induction ersehen kann, dieselben und der aus der Entwicklung der Exponentialfunktion

$$e^{-\frac{1}{2}ABx^2}$$

sich ergebenden Reihe gleich. Bezeichnet man daher mit ϑx eine der drei Funktionen $\vartheta_3 x$, $\vartheta_2 x$, ϑx, je nachdem man den Gröfsen A, B, a, b ihre dreierlei Bedeutungen giebt, so erhält man zufolge der angestellten Induction

$$(6.)\qquad \vartheta x = \sqrt{A}e^{-\frac{1}{2}ABx^2}\left(1+r_2\frac{A^4x^4}{\Pi 4}-r_3\frac{A^6x^6}{\Pi 6}+r_4\frac{A^8x^8}{\Pi 8}-\cdots\right),$$

wo

$$(7.)\qquad r_2=b,\quad r_3=ab,\quad r_4=a^2b-b^2,\quad r_5=a^3b-6ab^2,$$
$$r_6=a^4b-15a^2b^2+51b^3,\quad \text{etc.}$$

Man sieht aus diesen Ausdrücken, *dafs die Funktionen r_i rationale ganze Funktionen von a und b sind, und zwar, wenn man der Gröfse a eine, der Gröfse b zwei Dimensionen beilegt, homogene Funktionen der i^{ten} Dimension.*

Vergleicht man die Ausdrücke (6.) von ϑx mit dem Ausdrucke (2.),

$$\vartheta x = \sqrt{A} - \frac{\partial\sqrt{A}}{\partial h}\cdot\frac{x^2}{\Pi 2} + \frac{\partial^2\sqrt{A}}{\partial h^2}\cdot\frac{x^4}{\Pi 4} - \frac{\partial^3\sqrt{A}}{\partial h^3}\cdot\frac{x^6}{\Pi 6} + \cdots,$$

so erhält man

$$(8.)\quad \frac{\partial^m\sqrt{A}}{\partial h^m} = \sqrt{A^{2m+1}}\{(m)_0 B^m + (m)_2 r_2 B^{m-2}A^2 + (m)_3 r_3 B^{m-3}A^3 \cdots + (m)_m r_m A^m\},$$

wo der Zahlenfactor

$$(9.)\quad (m)_i = \frac{\Pi(2m)}{2^{m-i}\Pi(m-i)\Pi(2i)} = (2i+1)(2i+3)\ldots(2m-1)\frac{m.m-1\ldots m-i+1}{1.2.3\ldots i}$$

gefunden wird.

Ich will jetzt die Bedingungen untersuchen, welche Statt finden müssen, damit die beiden im Vorigen durch Induction gefundenen Gesetze sich erhalten. Diese Gesetze bestehen darin, dafs wenn man den Ausdruck (8.) noch einmal nach h differentiirt, in dem neuen Ausdrucke die algebraische Funktion, welche in $A^{\frac{2m+3}{2}+i}$ multiplicirt ist, unverändert $= r_i$ bleiben, und der Werth des Zahlenfactors aus $(m)_i$ durch Aenderung von m in $m+1$ erhalten werden mufs. Zufolge der Formel (5.) hat man

$$\frac{\partial H}{\partial h} = 2A^2B\frac{\partial H}{\partial A} + bA^3\frac{\partial H}{\partial B} + abA^2\frac{\partial H}{\partial b} - 16bA^2\frac{\partial H}{\partial a}.$$

Der Term

$$A^{\frac{2m+3}{2}+i}B^{m+1-i}$$

entsteht zufolge dieser Formel aus den drei Termen

$$(m)_i r_i A^{\frac{2m+1}{2}+i}B^{m-i},$$

$$(m)_{i-2} r_{i-2} A^{\frac{2m-3}{2}+i}B^{m-i+2},$$

$$(m)_{i-1} r_{i-1} A^{\frac{2m-1}{2}+i}B^{m-i+1}$$

und erhält den Factor

$$(2m+2i+1)(m)_i r_i + (m-i+2)(m)_{i-2} r_{i-2} b + (m)_{i-1}\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b}ab - 16(m)_{i-1}\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}b.$$

Dieser Ausdruck mufs $=(m+1)_i r_i$ werden. Es mufs daher

$$(10.)\quad \{(2m+2i+1)(m)_i-(m+1)_i\}r_i+(m-i+2)(m)_{i-2}br_{i-2} + (m)_{i-1}ab\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b}-16(m)_{i-1}b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}=0$$

sein. Diese Gleichung, welche eine Relation zwischen den Funktionen r_i, r_{i-1}, r_{i-2} ausdrückt, mufs von der Zahl m unabhängig sein, wenn diese Funktionen selbst von m unabhängig sein sollen. In der That hat man

$$(m+1)_i=\frac{(m+1)(2m+1)}{m-i+1}(m)_i,\qquad (m)_{i-1}=\frac{i(2i-1)}{m-i+1}(m)_i,$$

also

$$(m+1)_i-(2m+2i+1)(m)_i=\frac{i(2i-1)}{m-i+1}(m)_i=(m)_{i-1},$$

überdies der zweiten dieser drei Gleichungen analog

$$(m-i+2)(m)_{i-2}=(i-1)(2i-3)(m)_{i-1}.$$

Die Gleichung (10.) verwandelt sich daher nach Division durch $(m)_{i-1}$ in die folgende:

$$(11.)\quad r_i-(i-1)(2i-3)br_{i-2}=b\left\{a\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b}-16\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}\right\},$$

in welcher m nicht mehr vorkommt. Wenn für einen gegebenen Werth von m in dem für $\frac{\partial^m\sqrt{A}}{\partial h^m}$ gefundenen Ausdruck (8.) die Zahlenfactoren $(m)_i$ die ihnen durch die Formel (9.) gegebene Bedeutung haben, und die Funktionen $r_0, r_1, r_2, r_3 \ldots r_m$ so beschaffen sind, dafs zwischen je drei auf einander folgenden die Gleichung (11.) Statt findet, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dafs die $m+1$ ersten Glieder von $\frac{\partial^{m+1}\sqrt{A}}{\partial h^{m+1}}$ die folgenden sein werden:

$$\sqrt{A^{2m+3}}\{(m+1)_0B^{m+1}+(m+1)_2r_2B^{m-1}A^2+(m+1)_3r_3B^{m-2}A^3+\cdots + (m+1)_mr_mBA^m\}.$$

Damit daher das durch die Formel (8.) gegebene Gesetz auch für den nächsten Werth von m gelte und daher allgemein gültig sei, braucht nur gezeigt zu werden, dafs der in dem Ausdrucke von $\frac{\partial^{m+1}\sqrt{A}}{\partial h^{m+1}}$ noch hinzukommende eine Term

$$\sqrt{A^{2m+3}}.(m+1)_{m+1}r_{m+1}A^{m+1}=\sqrt{A^{2m+3}}.r_{m+1}.A^{m+1}$$

dasselbe Gesetz wie die übrigen befolge, oder dafs

$$r_{m+1}=m(2m-1)br_{m-1}+b\left\{a\frac{\partial r_m}{\partial b}-16\frac{\partial r_m}{\partial a}\right\}.$$

Dieser Werth von r_{m+1} ergiebt sich aber vermöge der Formel (5.) durch die Differentiation von (8.). Es sind daher die durch die Induction gefundenen Resultate bewiesen.

Durch ein ganz ähnliches Verfahren erhält man nach und nach die nach h genommenen Differentialquotienten von

$$D = \sqrt{\left(kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\right)} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}b}\sqrt{A^3}.$$

Setzt man

$$\alpha = k'^2 - k^2 = \tfrac{1}{4}a, \qquad \beta = \sqrt{kk'} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}b},$$

so wird die Formel (5.)

$$(12.) \qquad \frac{\partial H}{\partial h} = 2A^3B\frac{\partial H}{\partial A} + 2\beta^4A^3\frac{\partial H}{\partial B} + \alpha\beta A^2\frac{\partial H}{\partial \beta} - 8\beta^4A^2\frac{\partial H}{\partial \alpha}.$$

Durch die wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man

$$D = \beta A^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial h} = 3\beta A^{\frac{5}{2}}B + \alpha\beta A^{\frac{7}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial h^2} = 15\beta A^{\frac{7}{2}}B^2 + 10\alpha\beta A^{\frac{9}{2}}B + (\alpha^2\beta - 2\beta^5)A^{\frac{11}{2}}$$

$$\frac{\partial^3 D}{\partial h^3} = 105\beta A^{\frac{9}{2}}B^3 + 105\alpha\beta A^{\frac{11}{2}}B^2 + 21(\alpha^2\beta - 2\beta^5)A^{\frac{13}{2}}B + (\alpha^3\beta - 6\alpha\beta^5)A^{\frac{15}{2}}$$

u. s. w. u. s. w.

Multiplicirt man diese Ausdrücke der Reihe nach mit

$$x, -\frac{x^3}{\Pi 3}, \qquad \frac{x^5}{\Pi 5}, -\frac{x^7}{\Pi 7} \text{ u. s. w.},$$

so erhält man durch die Addition der entstehenden Producte zufolge (3.),

$$\begin{aligned}\vartheta_1(x) = {} & \beta A^{\frac{3}{2}}x\left\{1 - \frac{ABx^2}{2} + \frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{ABx^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{\Pi 3}\left(\frac{ABx^2}{2}\right)^3 + \cdots\right\} \\ & - \frac{1}{\Pi 3}\alpha\beta A^{\frac{7}{2}}x^3\left\{1 - \frac{ABx^2}{2} + \frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{ABx^2}{2}\right)^2 - \cdots\right\} \\ & + \frac{1}{\Pi 5}(\alpha^2\beta - 2\beta^5)A^{\frac{11}{2}}x^5\left\{1 - \frac{ABx^2}{2} + \cdots\right\} \\ & - \frac{1}{\Pi 7}(\alpha^3\beta - 6\alpha\beta^5)A^{\frac{15}{2}}x^7\left\{1 - \cdots\right\} \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

oder

$$(13.) \qquad = \sqrt{A}\,e^{-\frac{1}{2}ABx^2}\left\{s_0Ax - s_1\frac{A^3x^3}{\Pi 3} + s_2\frac{A^5x^5}{\Pi 5} - s_3\frac{A^7x^7}{\Pi 7} + \cdots\right\},$$

wo

$$s_0 = \beta, \quad s_1 = \alpha\beta, \quad s_2 = \beta(\alpha^2 - 2\beta^4), \quad s_3 = \alpha\beta(\alpha^2 - 6\beta^4), \quad \text{etc.}$$

Man wird hierdurch auf den folgenden allgemeinen Ausdruck von $\frac{\partial^m D}{\partial h^m}$ geführt,

$$(14.) \quad \frac{\partial^m D}{\partial h^m} = \sqrt{A^{2m+3}}\{[m]_0 s_0 B^m + [m]_1 s_1 B^{m-1} A + [m]_2 s_2 B^{m-2} A_2 + \cdots + [m]_m s_m A_m\},$$

wo

$$(15.) \quad [m]_i = \frac{\Pi(2m+1)}{2^{m-i}\Pi(m-i)\Pi(2i+1)} = (2i+3)(2i+5)\ldots(2m+1)\frac{m.m-1\ldots m-i+1}{1.2\ldots i}.$$

Durch Differentiation von (14.) ergiebt sich vermöge (12.) zwischen den drei auf einander folgenden Funktionen s_{m-1}, s_m, s_{m+1} die Gleichung

$$(16.) \quad s_{m+1} = 2m(2m+1)\beta^4 s_{m-1} + \alpha\beta\frac{\partial s_m}{\partial\beta} - 8\beta^4\frac{\partial s_m}{\partial\alpha}.$$

Man kann diese Induction ganz auf dieselbe Art, wie im Vorhergehenden, zur allgemeinen Gültigkeit erheben. Es wird aber um so mehr genügen, dieses in dem vorigen Beispiel ausgeführt zu haben, als man auf folgende Art unmittelbar zu den gefundenen Gesetzen gelangen kann.

Es sei nämlich

$$u = Ax$$

und

$$(17.) \quad \vartheta(x) = \sqrt{A}e^{-\frac{1}{2}ABx^2}U,$$

so wird, wenn man $\vartheta(x)$ als Funktion von x und h, aber U als Funktion von u und h ansieht

$$\frac{\partial\vartheta(x)}{\partial x} = \sqrt{A}e^{-\frac{1}{2}ABx^2}\left\{A\frac{\partial U}{\partial u} - BuU\right\},$$

und durch nochmalige Differentiation

$$\frac{\partial^2\vartheta(x)}{\partial x^2} = \sqrt{A}e^{-\frac{1}{2}ABx^2}\left\{A^2\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} - 2ABu\frac{\partial U}{\partial u} + (B^2u^2 - AB)U\right\}.$$

Man erhält ferner zufolge der oben gegebenen Formeln,

$$\frac{\partial\sqrt{A}}{\partial h} = \sqrt{A^3}B, \quad \frac{\partial.AB}{\partial h} = 2A^2B^2 + bA^4,$$

und daher

$$\frac{\partial\vartheta(x)}{\partial h} = \sqrt{A}e^{-\frac{1}{2}ABx^2}\left\{(AB - B^2u^2 - \tfrac{1}{2}bA^2u^2)U + 2ABu\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial h}\right\}.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke verwandelt sich die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\vartheta(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial\vartheta(x)}{\partial h} = 0$$

in die folgende

$$A^2\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+\frac{\partial U}{\partial h}=\tfrac{1}{2}bA^2u^2U.$$

Führt man statt der Gröfse h die Gröfse a ein, so dafs U als Funktion von u und a angesehen wird, so erhält man, da zufolge (4.)

$$da=-16bA^2\,dh,$$

nach Division durch A^2,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}-16b\frac{\partial U}{\partial a}=\tfrac{1}{2}bu^2U. \qquad (18.)$$

Da die Funktion U sich in eine nach den ganzen Potenzen von u^2 aufsteigende Reihe entwickeln läfst, deren erster Term 1 ist, so setze man

$$U=1-r_1\frac{u^2}{\Pi 2}+r_2\frac{u^4}{\Pi 4}-r_3\frac{u^6}{\Pi 6}+\cdots \qquad (19.)$$

Substituirt man diese Reihe in die für U gefundene partielle Differentialgleichung (18.), so erhält man

$$r_1=0$$

und allgemein

$$r_i+16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}=(i-1)(2i-3)br_{i-2}. \qquad (20.)$$

Die Gröfsen a und b sind mit einander durch die Formel

$$a^2=16(1-2b)$$

verbunden, aus welcher

$$16\frac{\partial b}{\partial a}=-a$$

folgt. Es ist von Vortheil die Funktion r als homogene Funktion von a^2 und b auszudrücken. Man hat dann in der vorstehenden Gleichung für $16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}$ zu setzen

$$16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}+16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a}=16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}-ab\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b},$$

wodurch sich dieselbe in die oben gefundene Gleichung

$$r_i+16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}-ab\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b}=(i-1)(2i-3)br_{i-2} \qquad (21.)$$

verwandelt.

Mittelst dieser Gleichung erhält man aus dem Werthe der ersten Funktion $r_0=1$ den Werth $r_1=0$ und hieraus nach und nach die übrigen. Durch dieselbe Gleichung wird zugleich gezeigt, *dafs, wenn man für ein nicht*

negatives i

$$r_{2i+2} = bf_i(a^2, b), \qquad r_{2i+3} = ab\varphi_i(a^2, b)$$

setzt, die Funktionen f_i, φ_i ganze homogene Funktionen von a^2 und b vom i^{ten} Grade, und deren Zahlenfactoren ganze Zahlen sind.

Setzt man wieder $Ax = u$ und

$$\vartheta_1(x) = \sqrt{A}e^{-\frac{1}{2}ABx^2}U_1,$$

und sieht wieder $\vartheta_1(x)$ als Funktion von x und h aber U_1 als Funktion von u und a an, so erhält man ganz auf dieselbe Art

$$(22.) \qquad \frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2} - 16b\frac{\partial U_1}{\partial a} = \tfrac{1}{2}bu^2U_1.$$

Da die Funktion U_1, nach den ganzen positiven Potenzen von x oder von u entwickelt, nur die ungeraden Potenzen der Variablen enthält, so kann man

$$(23.) \qquad U_1 = s_0u - s_1\frac{u^3}{\Pi 3} + s_2\frac{u^5}{\Pi 5} - s_3\frac{u^7}{\Pi 7} + \text{etc.}$$

setzen.

Der Werth des ersten Coefficienten s_0 wird der Werth von $\frac{\partial U_1}{\partial a}$ für $u = 0$ oder der Werth von $\frac{\partial \vartheta_1(x)}{\sqrt{A^3}\partial x}$, welcher

$$\beta = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}b} = s_0$$

ist. Substituirt man die Reihe (23.) in die partielle Differentialgleichung (22.), so erhält man

$$(24.) \qquad s_i + 16b\frac{\partial s_{i-1}}{\partial a} = (i-1)(2i-1)bs_{i-2},$$

oder wenn man s als Funktion von a und b betrachtet,

$$(25.) \qquad s_i + 16b\frac{\partial s_{i-1}}{\partial a} - ab\frac{\partial s_{i-1}}{\partial b} = (i-1)(2i-1)bs_{i-2}.$$

Setzt man, wie oben

$$a = 4\alpha, \qquad b = 2\beta^4,$$

so erhält man hieraus die Gleichung

$$(26.) \qquad s_i + 8\beta^4\frac{\partial s_{i-1}}{\partial \alpha} - \alpha\beta\frac{\partial s_{i-1}}{\partial \beta} = 2(i-1)(2i-1)\beta^4 s_{i-2},$$

welche mit der Gleichung (16.) übereinkommt, wenn man $i = m+1$ setzt. Mittelst der Gleichung (26.) kann man aus dem Werthe der ersten Funktion $s_0 = \beta$ nach und nach die übrigen erhalten. Durch dieselbe Gleichung wird leicht gezeigt, *daſs, wenn man*

$$s_{2i} = \beta f_i'(\alpha^2, \beta^4), \qquad s_{2i+1} = \alpha\beta\varphi_i'(\alpha^2, \beta^4)$$

setzt, die Funktionen f_i' und φ_i' ganze homogene Funktionen von α^2 und β^4 vom i^{ten} Grade und deren Zahlenfactoren ganze Zahlen sind.

Die Funktionen r_{2i+2}, r_{2i+3}, s_{2i}, s_{2i+1} werden daher nur aus $i+1$ Termen bestehen, welche in möglichst kleine ganze Zahlen multiplicirt sind. Da diese algebraischen Funktionen sehr merkwürdige Eigenschaften besitzen und auf dieselben gleichsam als Elemente viele andere Bestimmungen zurückgeführt werden, so ist es von Wichtigkeit, ihre einfachsten Ausdrücke aufzustellen, wie es hier durch Einführung der Gröfsen a und b, oder α und β geschehen ist. Je nachdem man den Gröfsen a und b die Werthe

$$a = 4(k'^2-k^2), \qquad b = 2k^2k'^2;$$

$$a = -4\frac{1+k'^2}{k^2}, \qquad b = -\frac{2k'^2}{k^4};$$

$$a = 4\frac{1+k^2}{k'^2}, \qquad b = -\frac{2k^2}{k'^4};$$

oder den Gröfsen α und β die Werthe

$$\alpha = k'^2-k^2, \qquad \beta = \sqrt{(kk')};$$

$$\alpha = -\frac{1+k'^2}{k^2}, \qquad \beta = \sqrt[4]{-1}\cdot\frac{\sqrt{k'}}{k};$$

$$\alpha = \frac{1+k^2}{k'^2}, \qquad \beta = \sqrt[4]{-1}\cdot\frac{\sqrt{k}}{k'}$$

giebt, will ich die Funktionen r_i und s_i mit r_i, $\frac{r_i'}{k^{2i}}$, $\frac{r_i''}{k'^{2i}}$ und s_i, $\sqrt[4]{-1}\frac{s_i'}{k^{2i+1}}$, $\sqrt[4]{-1}\frac{s_i''}{k'^{2i+1}}$ bezeichnen.

Hiernach wird für ein nicht negatives i:

$$r_{2i+2} = 2k^2k'^2 f_i(16(k'^2-k^2)^2, 2k^2k'^2),$$
$$r_{2i+3} = 8k^2k'^2(k'^2-k^2)\varphi_i(16(k'^2-k^2), 2k^2k'^2);$$
$$r'_{2i+2} = -2k'^2 f_i(16(1+k'^2)^2, -2k'^2),$$
$$r'_{2i+3} = 8k'^2(1+k'^2)\varphi_i(16(1+k'^2)^2, -2k'^2);$$
$$r''_{2i+2} = -2k^2 f_i(16(1+k^2)^2, -2k^2),$$
$$r''_{2i+3} = -8k^2(1+k^2)\varphi_i(16(1+k^2)^2, -2k^2);$$
$$s_{2i} = \sqrt{kk'}\, f_i'((k'^2-k^2)^2, k^2k'^2),$$
$$s_{2i+1} = \sqrt{kk'}(k'^2-k^2)\varphi_i'((k'^2-k^2)^2, k^2k'^2);$$
$$s'_{2i} = \sqrt{k'}\, f_i'((1+k'^2)^2, -k'^2),$$
$$s'_{2i+1} = -\sqrt{k'}(1+k'^2)\varphi_i'((1+k'^2)^2, -k'^2);$$

$$s''_{2i} = \sqrt{k} f'_i((1+k^2)^2, -k^2),$$
$$s''_{2i+1} = \sqrt{k}(1+k^2)\varphi'_i((1+k^2)^2, -k^2).$$

In diesen Ausdrücken bedeuten f_i, φ_i, f'_i, φ'_i jede immer dieselben Funktionen der verschiedenen unter dem Funktionenzeichen befindlichen Gröfsen, und zwar homogene Ausdrücke derselben vom i^{ten} Grade, deren Zahlencoefficienten ganze Zahlen sind.

Setzt man

$$\frac{2Kx}{\pi} = u,$$

und giebt zufolge des obigen Satzes je nach den dreierlei Bestimmungen von a und b der Gröfse A die Werthe

$$\frac{2K}{\pi}, \quad \frac{2kK}{\pi}, \quad \frac{2k'K}{\pi},$$

und der Gröfse B die Werthe

$$\frac{2E}{\pi} - k'^2\frac{2K}{\pi}, \quad \frac{1}{k}\frac{2E}{\pi}, \quad \frac{1}{k'}\left(\frac{2E}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\right),$$

so erhält man aus der einen Formel (6.) die nachfolgenden Darstellungen der drei Funktionen $\vartheta(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta_3(x)$ *):

---

*) Die beiden Reihen $1 + r^2\frac{u^4}{\Pi 4} - r_3\frac{u^6}{\Pi 6} + \cdots$ und $s_0 u - s_1\frac{u^3}{\Pi 3} + \cdots$, auf welche *Jacobi* hier die Entwicklung der ϑ Funktionen zurückgeführt hat, und die sich in ihren 3 Formen nur durch den veränderten Werth des Moduls k und des Arguments u unterscheiden, stimmen genau mit den Reihen überein, welche Herr *Weierstrafs* (Bd. 52, S. 357 dieses Journals) mit $\mathrm{Al}(u)$ und $\mathrm{Al}(u)_1$ bezeichnet hat. Es ist nämlich

$$1 + r''_2\frac{u^4}{\Pi 4} - r''_3\frac{u^6}{\Pi 6} + \cdots = \mathrm{Al}(u, k)$$
$$s''_0 u - s''_1\frac{u^3}{\Pi 3} + \cdots = s''_0\,\mathrm{Al}(u, k)_1$$

und man erhält die von *Jacobi* durch diese Reihen gegebenen Entwicklungen von ϑx und $\vartheta_1 x$, wenn man in den *Weierstrafs*'schen Formeln (6, I) S. 377 und (10, I) S. 378 des 52sten Bandes den Hauptfall betrachtet, in dem $\omega = K$, $\omega' = iK'$ wird. Aehnlich ist

$$1 + r'_2\frac{u^4}{\Pi 4} - r'_3\frac{u^6}{\Pi 6} + \cdots = \mathrm{Al}(u\sqrt{-1}, k')$$
$$s'_0 u - s'_1\frac{u^3}{\Pi 3} + \cdots = \frac{s'_0}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{Al}(u\sqrt{-1}, k')_1$$

und

$$1 + r_2\frac{u^4}{\Pi 4} - r_3\frac{u^6}{\Pi 6} + \cdots = \mathrm{Al}\left(k'u, \frac{k\sqrt{-1}}{k'}\right)$$
$$s_0 u - s_1\frac{u^3}{\Pi 3} + \cdots = \frac{s_0}{k'}\mathrm{Al}\left(k'u, \frac{k\sqrt{-1}}{k'}\right)_1.$$

$$\vartheta_3(x) = \vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2K}\right) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{K}-k'^2\right)u^2}\left(1+r_2\frac{u^4}{\Pi 4}-r_3\frac{u^6}{\Pi 6}+r_4\frac{u^8}{\Pi 8}-\cdots\right),$$

$$\vartheta_2(x) = \vartheta_2\left(\frac{\pi u}{2K}\right) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\, e^{-\frac{Eu^2}{2K}}\left(1+r'_2\frac{u^4}{\Pi 4}-r'_3\frac{u^6}{\Pi 6}+r'_4\frac{u^8}{\Pi 8}-\cdots\right),$$

$$\vartheta(x) = \vartheta\left(\frac{\pi u}{2K}\right) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{K}-1\right)u^2}\left(1+r''_2\frac{u^4}{\Pi 4}-r''_3\frac{u^6}{\Pi 6}+r''_4\frac{u^8}{\Pi 8}-\cdots\right).$$

Ferner erhält man für die Funktion $\vartheta_1 x$ aus der einen Formel (13.) die drei verschiedenen Darstellungen:

$$\vartheta_1(x) = \vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2K}\right) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{K}-k'^2\right)u^2}\left(s_0 u-s_1\frac{u^3}{\Pi 3}+s_2\frac{u^5}{\Pi 5}-s_3\frac{u^7}{\Pi 7}+\cdots\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\, e^{-\frac{Eu^2}{2K}}\left(s'_0 u-s'_1\frac{u^3}{\Pi 3}+s'_2\frac{u^5}{\Pi 5}-s'_3\frac{u^7}{\Pi 7}+\cdots\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{K}-1\right)u^2}\left(s''_0 u-s''_1\frac{u^3}{\Pi 3}+s''_2\frac{u^5}{\Pi 5}-s''_3\frac{u^7}{\Pi 7}+\cdots\right).$$

Die Gröfse u hat hier nicht die dreifache Bedeutung, welche in den früheren Formeln ihr Werth Ax je nach den drei Werthen von A erhielt, sondern nur diejenige, welche dem ersten Werthe $A = \frac{2K}{\pi}$ entspricht.

Interessant ist es, dafs, während die Darstellung der Entwicklungscoefficienten $r''_2, r''_3, \ldots$, $\frac{s''_1}{s''_0}, \frac{s''_2}{s''_0}, \ldots$ in Reihen, die nach Potenzen von k geordnet sind, sehr bald zu Zahlencoefficienten von beträchtlicher Gröfse führt, wie die von Herrn *Weierstrafs* am angeführten Orte erhaltenen Resultate zeigen, die Darstellung derselben in Form von homogenen Funktionen der resp. hier mit a^2, b und α^2, β^4 bezeichneten Gröfsen niedrigere Zahlencoefficienten ergiebt. Auf diese niedrigen Werthe der Zahlencoefficienten im Vergleich zu anderen Formen der Entwicklung bezieht sich jedenfalls die Bemerkung *Jacobi*'s auf S. 95, dafs die einzelnen Terme in den Ausdrücken der Gröfsen r und s in *möglichst kleine* ganze Zahlen multiplicirt sind.

Wenn man in dem Fall, für welchen *Jacobi* die Entwicklungscoefficienten mit zwei Strichen versieht, die homogenen Funktionen resp. der Gröfsen a^2, b und α^2, β^4, denen die Gröfsen r'' und s'' gleich werden, durch eine gehörige Potenz resp. von b und β^4 dividirt, so erhält man Funktionen des Quotienten $\frac{a^2}{b}$ und $\frac{\alpha^2}{\beta^4}$, d. h. Funktionen jener Gröfse $\frac{1+k^2}{k}$, die *Jacobi* bereits im 4. Bande S. 185 dieses Journals bei Gelegenheit der partiellen Differentialgleichung eingeführt hat, durch welche er Zähler und Nenner der Transformationsformeln der elliptischen Integrale definirt. *B.*

10.

Sur les fonctions symétriques des racines des équations.

(Par M. *Henri Betti* à Florence.)

1.

La considération des fonctions génératrices des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique conduit à une expression remarquable du produit des carrés des différences de toutes les racines.

M. *Borchardt* a trouvé (vol. LIII, p. 193 de ce Journal) que la fonction symétrique

$$(1.) \qquad \Sigma x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n},$$

où

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \dots \quad x_n$$

sont les racines d'une équation

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots A_n = 0,$$

est le coefficient du terme

$$t_1^{-(a_1+1)} t_2^{-(a_2+1)} \dots t_n^{-(a_n+1)}$$

dans le développement, suivant les puissances décroissantes, de l'expression suivante

$$\theta(t_1, t_2, \dots, t_n) = (-1)^n \frac{f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n)}{\Pi(t_1, t_2, \dots, t_n)} \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} \cdots \frac{\partial}{\partial t_n} \left(\frac{\Pi(t_1, t_2, \dots, t_n)}{f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n)} \right),$$

où $\Pi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ désigne le produit des différences des variables $t_1, t_2, \dots t_n$.

J'ai remarqué que la fonction symétrique (1.) est aussi le coefficient du terme

$$t_1^{-(a_1+1)} t_2^{-(a_2+1)} \dots t_n^{-(a_n+1)}$$

dans le développement, suivant les puissances décroissantes, de l'expression

$$\frac{\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\Pi^2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{f'(t_1) f'(t_2) \dots f'(t_n) \Pi^2(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\Pi^2(x_1, x_2, \dots, x_n) f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n)}.$$

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Donc, on a deux expressions de la même quantité (1.), et en les comparant on obtient une équation, d'où l'on déduit, pour toutes les valeurs positives et entières de $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$\Pi^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\{\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)\}_{t_1^{-(a_1+1)} t_2^{-(a_2+1)} \ldots t_n^{-(a_n+1)}}}{\{\theta(t_1, t_2, \ldots, t_n)\}_{t_1^{-(a_1+1)} t_2^{-(a_2+1)} \ldots t^{-(a_n+1)}}},$$

si l'on désigne, avec ***Jacobi,*** par

$$\{F(t_1, t_2, \ldots, t_n)\}_{t_1^{m_1} t_2^{m_2} \ldots t_n^{m_n}}$$

le coefficient du terme $t_1^{m_1}, t_2^{m_2}, \ldots, t_n^{m_n}$ dans le développement de

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

2.

La fonction génératrice de toutes les fonctions symétriques des solutions communes à deux équations algébriques est donnée par le théorème suivant:

Si l'on désigne par

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3), \quad \ldots, \quad (x_\mu, y_\mu)$$

les systèmes des solutions communes aux deux équations

$$f_1(x, y) = 0, \qquad f_2(x, y) = 0;$$

si

$$\varphi(x) = 0, \qquad \psi(y) = 0$$

sont les deux équations finales résultantes, et M_1', M_2', M_1'', M_2'' les polynomes multiplicateurs qui donnent

$$M_1' f_1 + M_1'' f_2 = \varphi(x),$$
$$M_2' f_1 + M_2'' f_2 = \psi(y),$$

et que l'on pose

$$\theta(x, y) = \left(\frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dy} - \frac{df_1}{dy}\frac{df_2}{dx}\right)(M_1' M_2'' - M_1'' M_2');$$

la fonction symétrique

$$\Sigma x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_\mu^{a_\mu} y_1^{b_1} y_2^{b_2} \ldots y_\mu^{b_\mu}$$

est le coefficient du terme

$$u_1^{-(a_1+1)} u_2^{-(a_2+1)} \ldots u_\mu^{-(a_\mu+1)} v_1^{-(b_1+1)} v_2^{-(b_2+1)} \ldots v_\mu^{-(b_\mu+1)}$$

dans le développement, suivant les puissances décroissantes, de l'expression suivante:

$$\frac{\theta(u_1, v_1)\,\theta(u_2, v_2)\ldots\theta(u_\mu, v_\mu)\,\Pi^2(u_1, u_2, \ldots, u_\mu)\,\Pi^2(v_1, v_2, \ldots, v_\mu)}{\Pi^2(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)\,\Pi^2(y_1, y_2, \ldots, y_\mu)\,\varphi(u_1)\,\varphi(u_2)\ldots\varphi(u_\mu)\,\psi(v_1)\,\psi(v_2)\ldots\psi(v_\mu)}$$

On peut étendre aisément ces résultats à un plus grand nombre d'équations.

Florence, 12 Juin 1857.

11.

Allgemeine Voraussetzungen und Hülfsmittel für die Untersuchung von Functionen unbeschränkt veränderlicher Gröfsen.

(Von Herrn *B. Riemann* in Göttingen.)

Die Absicht den Lesern dieses Journals Untersuchungen über verschiedene Transcendenten, insbesondere auch über *Abel*'sche Functionen vorzulegen, macht es mir wünschenswerth, um Wiederholungen zu vermeiden, eine Zusammenstellung der allgemeinen Voraussetzungen, von denen ich bei ihrer Behandlung ausgehen werde, in einem besonderen Aufsatze voraufzuschicken.

Für die unabhängig veränderliche Gröfse setze ich stets die jetzt allgemein bekannte *Gauſs*'sche geometrische Repräsentation voraus, nach welcher eine complexe Gröfse $z = x + yi$ vertreten wird durch einen Punkt einer unendlichen Ebene, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y sind; ich werde dabei die complexen Gröfsen und die sie repräsentirenden Punkte durch dieselben Buchstaben bezeichnen. Als Function von $x+yi$ betrachte ich jede Gröfse w, die sich mit ihr der Gleichung $i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$ gemäfs ändert, ohne einen Ausdruck von w durch x und y vorauszusetzen. Aus dieser Differentialgleichung folgt nach einem bekannten Satze, dafs die Gröfse w durch eine nach ganzen Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihe von der Form $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (z-a)^n$ darstellbar ist, sobald sie in der Umgebung von a allenthalben ***einen*** bestimmten mit z stetig sich ändernden Werth hat, und dafs diese Darstellbarkeit stattfindet bis zu einem Abstande von a oder Modul von $z-a$, für welchen eine Unstetigkeit eintritt. Es ergiebt sich aber aus den Betrachtungen, welche der Methode der unbestimmten Coefficienten zu Grunde liegen, dafs die Coefficienten a_n völlig bestimmt sind, wenn w in einer endlichen übrigens beliebig kleinen von a ausgehenden Linie gegeben ist.

Beide Ueberlegungen verbindend, wird man sich leicht von der Richtigkeit des Satzes überzeugen:

Eine Function von $x+yi$, die in einem Theile der (x, y)-Ebene gegeben ist, kann darüber hinaus nur auf Eine Weise stetig fortgesetzt werden.

Man denke sich nun die zu untersuchende Function nicht durch irgend welche z enthaltende analytische Ausdrücke oder Gleichungen bestimmt, sondern dadurch, dafs der Werth der Function in einem beliebig begrenzten Theile der z-Ebene gegeben ist und sie von dort aus stetig (der partiellen Differentialgleichung $i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$ gemäfs) fortgesetzt wird. Diese Fortsetzung ist nach den obigen Sätzen eine völlig bestimmte, vorausgesezt, dafs sie nicht in blofsen Linien geschieht, wobei eine partielle Differentialgleichung nicht zur Anwendung kommen könnte, sondern durch Flächenstreifen von endlicher Breite. Je nach der Beschaffenheit der fortzusetzenden Function wird nun entweder die Function für denselben Werth von z immer wieder denselben Werth annehmen, auf welchem Wege auch die Fortsetzung geschehen sein möge, oder nicht. Im ersteren Falle nenne ich sie ***einwerthig***, sie bildet dann eine für jeden Werth von z völlig bestimmte und nicht längs einer Linie unstetige Function. Im letzteren Falle, wo sie ***mehrwerthig*** heifsen soll, hat man um ihren Verlauf aufzufassen vor Allem seine Aufmerksamkeit auf gewisse Punkte der z-Ebene zu richten, um welche herum sich die Function in eine andere fortsetzt. Ein solcher Punkt ist z. B. bei der Function $\log(z-a)$ der Punkt a. Denkt man sich von diesem Punkte a aus eine beliebige Linie gezogen, so wird man in der Umgebung von a den Werth der Function so wählen können, dafs sie sich aufser dieser Linie überall stetig ändert; zu beiden Seiten dieser Linie nimmt sie aber dann verschiedene Werthe an, auf der negativen*) einen um $2\pi i$ gröfseren, als auf der positiven. Die Fortsetzung der Function von einer Seite dieser Linie aus, z. B. von der negativen, über sie hinüber in das jenseitige Gebiet giebt dann offenbar eine von der dort schon vorhandenen verschiedene Function und zwar im hier betrachteten Falle eine allenthalben um $2\pi i$ gröfsere.

Zur bequemeren Bezeichnung dieser Verhältnisse sollen die verschiedenen Fortsetzungen *einer* Function für denselben Theil der z-Ebene ***Zweige*** dieser Function genannt werden und ein Punkt, um welchen sich ein Zweig

---

*) Im Anschlusse an die von *Gaufs* vorgeschlagene Benennung positiv laterale Einheit für $+i$ werde ich als positive Seitenrichtung zu einer gegebenen Richtung diejenige bezeichnen, welche zu ihr ebenso liegt, wie $+i$ zu 1.

einer Function in einen andern fortsetzt *eine Verzweigungsstelle* dieser Function; wo keine Verzweigung stattfindet, heifst die Function *einändrig* oder *monodrom.*

Ein Zweig einer Function von mehreren unabhängig veränderlichen Gröfsen z, s, t, ... ist *einändrig* in der Umgebung eines bestimmten Werthensystemes $z = a$, $s = b$, $t = c$, ..., wenn allen Werthencombinationen bis zu einem endlichen Abstande von demselben (oder bis zu einer bestimmten endlichen Gröfse der Moduln von $z - a$, $s - b$, $t - c$, ...) ein bestimmter mit den veränderlichen Gröfsen stetig sich ändernder Werth dieses Zweiges der Function entspricht. Eine Verzweigungsstelle oder eine Stelle, um welche sich ein Zweig in einen andern fortsetzt, wird bei einer Function von mehreren Veränderlichen durch sämmtliche einer Gleichung zwischen ihnen genügende Werthe der unabhängig veränderlichen Gröfsen gebildet.

Nach einem oben angeführten bekannten Satze ist die Einändrigkeit einer Function identisch mit ihrer Entwickelbarkeit, ihre Verzweigung mit ihrer Nichtentwickelbarkeit nach ganzen positiven oder negativen Potenzen der Aenderungen der veränderlichen Gröfsen. Es scheint aber nicht zweckmäfsig, jene von ihrer Darstellungsweise unabhängigen Eigenschaften durch diese an eine bestimmte Form ihres Ausdrucks geknüpften Merkmale auszudrücken.

Für manche Untersuchungen, namentlich für die Untersuchung algebraischer und *Abel*'scher Functionen ist es vortheilhaft, die Verzweigungsart einer mehrwerthigen Function in folgender Weise geometrisch darzustellen. Man denke sich in der (x, y)-Ebene eine andere mit ihr zusammenfallende Fläche (oder auf der Ebene einen unendlich dünnen Körper) ausgebreitet, welche sich so weit und nur so weit erstreckt, als die Function gegeben ist. Bei Fortsetzung dieser Function wird also diese Fläche ebenfalls weiter ausgedehnt werden. In einem Theile der Ebene, für welchen zwei oder mehrere Fortsetzungen der Function vorhanden sind, wird die Fläche doppelt oder mehrfach sein; sie wird dort aus zwei oder mehreren Blättern bestehen, deren jedes einen Zweig der Function vertritt. Um einen Verzweigungspunkt der Function herum wird sich ein Blatt der Fläche in ein anderes fortsetzen, so dafs in der Umgebung eines solchen Punktes die Fläche als eine Schraubenfläche mit einer in diesem Punkte auf der (x, y)-Ebene senkrechten Axe und unendlich kleiner Höhe des Schraubenganges betrachtet werden kann. Wenn die Function nach mehren Umläufen des z um den Verzweigungswerth

ihren vorigen Werth wieder erhält (wie z. B. $(z-a)^{\frac{m}{n}}$, wenn m, n relative Primzahlen sind, nach n Umläufen von z um a), mufs man dann freilich annehmen, dafs sich das oberste Blatt der Fläche durch die übrigen hindurch in das unterste fortsetzt.

Die mehrwerthige Function hat für jeden Punkt einer solchen ihre Verzweigungsart darstellenden Fläche nur *einen* bestimmten Werth und kann daher als eine völlig bestimmte Function des Orts in dieser Fläche angesehen werden.

Göttingen, 1857.

12.

Lehrsätze aus der analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialien.

(Von Herrn *B. Riemann* in Göttingen.)

Bei der Untersuchung der Functionen, welche aus der Integration vollständiger Differentialien entstehen, sind einige der analysis situs angehörige Sätze fast unentbehrlich. Mit diesem von *Leibnitz,* wenn auch vielleicht nicht ganz in derselben Bedeutung, gebrauchten Namen darf wohl ein Theil der Lehre von den stetigen Gröfsen bezeichnet werden, welcher die Gröfsen nicht als unabhängig von der Lage existirend und durch einander mefsbar betrachtet, sondern von den Mafsverhältnissen ganz absehend, nur ihre Orts- und Gebietsverhältnisse der Untersuchung unterwirft. Indem ich eine von Mafsverhältnissen ganz abstrahirende Behandlung dieses Gegenstandes mir vorbehalte, werde ich hier nur die bei der Integration zweigliedriger vollständiger Differentialien nöthigen Sätze in einem geometrischen Gewande darstellen.

Es sei eine in der (x, y)-Ebene einfach oder mehrfach ausgebreitete Fläche T gegeben *) und X, Y seien solche stetige Functionen des Orts in dieser Fläche, dafs in ihr allenthalben $Xdx + Ydy$ ein vollständiges Differential, also $\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$ ist. Bekanntlich ist dann $\int(Xdx + Ydy)$, um einen Theil der Fläche T positiv oder negativ herum — d. h. durch die ganze Begrenzung entweder allenthalben nach der positiven oder allenthalben nach der negativen Seite gegen die Richtung von Innen nach Aufsen (Siehe die Anmerkung Seite 102 der vorhergehenden Abhandlung) — erstreckt, $= 0$, da dies Integral dem über diesen Theil ausgedehnten Flächenintegrale $\int\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dT$ identisch im ersteren Falle gleich, im zweiten entgegengesetzt ist. Das Integral $\int(Xdx + Ydy)$ hat daher zwischen zwei festen Punkten auf zwei verschiedenen Wegen erstreckt denselben Werth, wenn diese beiden Wege zusammengenommen die ganze Begrenzung eines Theils der

*) Man sehe die vorhergehende Abhandlung S. 103.

Fläche T bilden. Wenn also jede im Innern von T in sich zurücklaufende Curve die ganze Begrenzung eines Theils von T bildet, so hat das Integral von einem festen Anfangspunkte bis zu einem und demselben Endpunkte erstreckt immer denselben Werth und ist eine von dem Wege der Integration unabhängige allenthalben in T stetige Function von der Lage des Endpunkts. Dies veranlafst zu einer Unterscheidung der Flächen in einfach zusammenhangende, in welchen jede geschlossene Curve einen Theil der Fläche vollständig begrenzt — wie z. B. ein Kreis —, und mehrfach zusammenhangende, für welche dies nicht stattfindet, — wie z. B. eine durch zwei concentrische Kreise begrenzte Ringfläche. Eine mehrfach zusammenhangende läfst sich durch Zerschneidung in eine einfach zusammenhangende verwandeln (S. die durch Zeichnungen erläuterten Beispiele am Schlufs dieser Abhandlung). Da diese Operation wichtige Dienste bei der Untersuchung der Integrale algebraischer Functionen leistet, so sollen die darauf bezüglichen Sätze kurz zusammengestellt werden; sie gelten für beliebig im Raume liegende Flächen.

Wenn in einer Fläche F zwei Curvensysteme a und b zusammengenommen einen Theil dieser Fläche vollständig begrenzen, so bildet jedes andere Curvensystem, das mit a zusammen einen Theil von F vollständig begrenzt, auch mit b die ganze Begrenzung eines Flächentheils, der aus den beiden ersteren Flächentheilen längs a (durch Addition oder Subtraction, jenachdem sie auf entgegengesetzten oder auf gleicher Seite von a liegen) zusammengesetzt ist. Beide Curvensysteme leisten daher für völlige Begrenzung eines Theils von F dasselbe und können für die Erfüllung dieser Forderung einander ersetzen.

Wenn in einer Fläche F sich n geschlossene Curven $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ziehen lassen, welche weder für sich noch mit einander einen Theil dieser Fläche F vollständig begrenzen, mit deren Zuziehung aber jede andere geschlossene Curve die vollständige Begrenzung eines Theils der Fläche F bilden kann, so heifst die Fläche eine $(n+1)$fach zusammenhangende.

Dieser Charakter der Fläche ist unabhängig von der Wahl des Curvensystems $a_1, a_2, \ldots, a_n$, da je n andere geschlossene Curven $b_1, b_2, \ldots, b_n$, welche zu völliger Begrenzung eines Theils dieser Fläche nicht ausreichen, ebenfalls mit jeder andern geschlossenen Curve zusammengenommen einen Theil von F völlig begrenzen.

In der That, da b_1 mit Linien a zusammengenommen einen Theil von F vollständig begrenzt, so kann eine dieser Curven a durch b_1 und die übrigen

Curven a ersetzt werden. Es ist daher mit b_1 und diesen $n-1$ Curven a jede andere Curve, und folglich auch b_2, zu völliger Begrenzung eines Theils von F ausreichend, und es kann eine dieser $n-1$ Curven a durch b_1, b_2 und die übrigen $n-2$ Curven a ersetzt werden. Dieses Verfahren kann offenbar, wenn wie vorausgesetzt die Curven b zu vollständiger Begrenzung eines Theils von F nicht ausreichen, so lange fortgesetzt werden, bis sämmtliche a durch die b ersetzt worden sind.

Eine $(n+1)$fach zusammenhangende Fläche F kann durch einen Querschnitt — d. h. eine von einem Begrenzungspunkte durch das Innere bis zu einem Begrenzungspunkte geführte Schnittlinie — in eine $n$fach zusammenhangende F' verwandelt werden. Es gelten dabei die durch die Zerschneidung entstehenden Begrenzungstheile schon während der weiteren Zerschneidung als Begrenzung, so dafs ein Querschnitt keinen Punkt mehrfach durchschneiden, aber in einem seiner früheren Punkte enden kann.

Da die Linien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zu völliger Begrenzung eines Theils von F nicht ausreichen, so mufs, wenn man sich F durch diese Linien zerschnitten denkt, sowohl das auf der rechten, als das auf der linken Seite von a_n anliegende Flächenstück noch andere von den Linien a verschiedene und also zur Begrenzung von F gehörige Begrenzungstheile enthalten. Man kann daher von einem Punkte von a_n sowohl in dem einen, als in dem andern dieser Flächenstücke eine die Curven a nicht schneidende Linie bis zur Begrenzung von F ziehen. Diese beiden Linien q' und q'' zusammengenommen bilden alsdann einen Querschnitt q der Fläche F, welcher das Verlangte leistet.

In der That sind in der durch diesen Querschnitt aus F entstehenden Fläche F'' die Linien $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ im Innern von F'' verlaufende geschlossene Curven, welche zur Begrenzung eines Theils von F, also auch von F', nicht hinreichen. Jede andere im Innern von F'' verlaufende geschlossene Curve aber bildet mit ihnen die ganze Begrenzung eines Theils von F''. Denn die Linie l bildet mit einem Complex aus den Linien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die ganze Begrenzung eines Theils f von F. Es läfst sich aber zeigen, dafs in der Begrenzung desselben a_n nicht vorkommen kann; denn dann würde, je nach dem f auf der linken oder rechten Seite von a_n läge, q' oder q'' aus dem Innern von f nach einem Begrenzungspunkte von F, also nach einem aufserhalb f gelegenen Punkte, führen und also die Begrenzung von f schneiden müssen gegen die Voraussetzung, dafs l sowohl als die Linien a,

den Durchschnittspunkt von a_n und q ausgenommen, stets im Innern von F' bleiben.

Die Fläche F', in welche F durch den Querschnitt q zerfällt, ist demnach, wie verlangt, eine $n$fach zusammenhangende.

Es soll jetzt bewiesen werden, dafs die Fläche F durch jeden Querschnitt p, welcher sie nicht in getrennte Stücke zerfället, in eine $n$fach zusammenhangende F' verwandelt wird. Wenn die zu beiden Seiten des Querschnitts p angrenzenden Flächentheile zusammenhangen, so läfst sich eine Linie b von der einen Seite desselben durch das Innere von F' auf die andere Seite zum Anfangspunkte zurück ziehen. Diese Linie b bildet eine im Innern von F' in sich zurücklaufende Linie, welche, da der Querschnitt von ihr aus nach beiden Seiten zu einem Begrenzungspunkte führt, von keinem der beiden Flächenstücke, in welche sie F zerschneidet, die ganze Begrenzung bildet. Man kann daher eine der Curven a durch die Curve b und jede der übrigen $n-1$ Curven a durch eine im Innern von F' verlaufende Curve und wenn nöthig die Curve b ersetzen, worauf der Beweis, dafs F' $n$fach zusammenhangend ist, durch dieselben Schlüsse, wie vorhin, geführt werden kann.

Eine $(n+1)$fach zusammenhangende Fläche wird daher durch jeden sie nicht in Stücke zerschneidenden Querschnitt in eine $n$fach zusammenhangende verwandelt.

Die durch einen Querschnitt entstandene Fläche kann durch einen neuen Querschnitt weiter zerlegt werden, und bei $n$maliger Wiederholung dieser Operation wird eine $(n+1)$fach zusammenhangende Fläche durch n nach einander gemachte sie nicht zerstückelnde Querschnitte in eine einfach zusammenhangende verwandelt.

Um diese Betrachtungen auf eine Fläche ohne Begrenzung, eine geschlossene Fläche, anwendbar zu machen, mufs diese durch Ausscheidung eines beliebigen Punktes in eine begrenzte verwandelt werden, so dafs die erste Zerlegung durch diesen Punkt und einen in ihm anfangenden und endenden Querschnitt, also durch eine geschlossene Curve, geschieht. Die Oberfläche eines Ringes z. B., welche eine dreifach zusammenhangende ist, wird durch eine geschlossene Curve und einen Querschnitt in eine einfach zusammenhangende verwandelt.

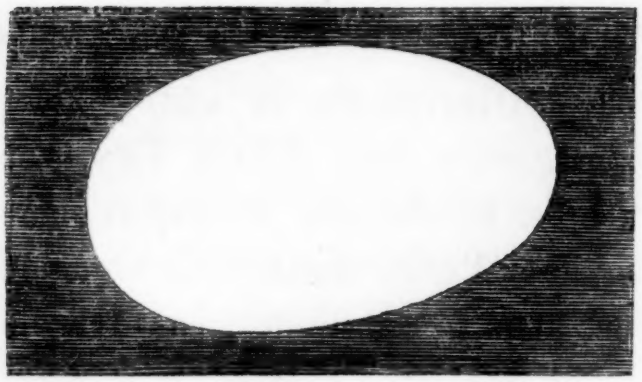
Auf das im Eingange betrachtete Integral des vollständigen Differentials $Xdx+Ydy$ wird nun die eben behandelte Zerschneidung der mehrfach zusammenhangenden Flächen in einfach zusammenhangende, wie folgt, angewandt.

Ist die die (x, y)-Ebene bedeckende Fläche T, in welcher X, Y allenthalben stetige der Gleichung $\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$ genügende Functionen des Orts sind, $n$fach zusammenhangend, so wird sie durch n Querschnitte in eine einfach zusammenhangende T' zerschnitten. Die Integration von $Xdx + Ydy$ von einem festen Anfangspunkte aus durch Curven im Innern von T' liefert dann einen nur von der Lage des Endpunkts abhängigen Werth, welcher als Function von dessen Coordinaten betrachtet werden kann. Substituirt man für die Coordinaten die Gröfsen x, y, so erhält man eine Fnnction $z = \int(Xdx + Ydy)$ von x, y, welche für jeden Punkt von T' völlig bestimmt ist und sich innerhalb T' allenthalben stetig, beim Ueberschreiten eines Querschnitts aber allgemein zu reden um eine endliche von einem Knotenpunkte des Schnittnetzes zum andern constante Gröfse ändert. Die Aenderungen beim Ueberschreiten der Querschnitte sind von einer der Zahl der Querschnitte gleichen Anzahl von einander unabhängiger Gröfsen abhängig; denn wenn man das Schnittsystem rückwärts, — die späteren Theile zuerst —, durchläuft, so ist diese Aenderung überall bestimmt, wenn ihr Werth beim Beginn jedes Querschnitts gegeben wird; letztere Werthe aber sind von einander unabhängig.

Göttingen, 1857.

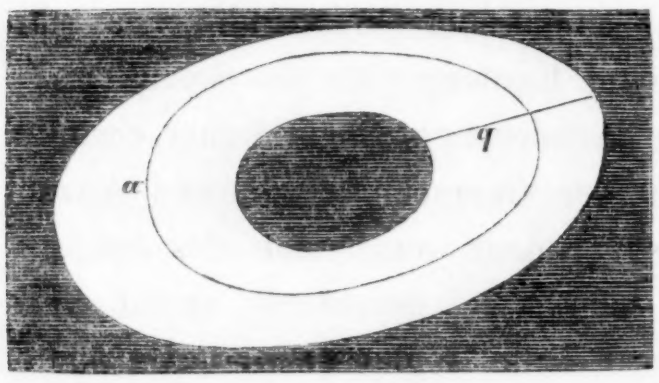
Um das, was oben (S. 106) unter einer $n$fach zusammenhangenden Fläche verstanden wird, anschaulicher zu machen, folgen in den Zeichnungen auf nachstehender Seite Beispiele von einfach, zweifach und dreifach zusammenhangenden Flächen.

Einfach zusammenhangende Fläche.



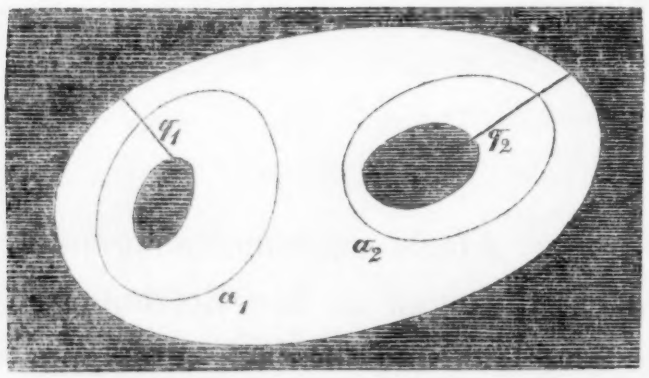
Sie wird durch jeden Querschnitt in getrennte Stücke zerfällt, und es bildet in ihr jede geschlossene Curve die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche.

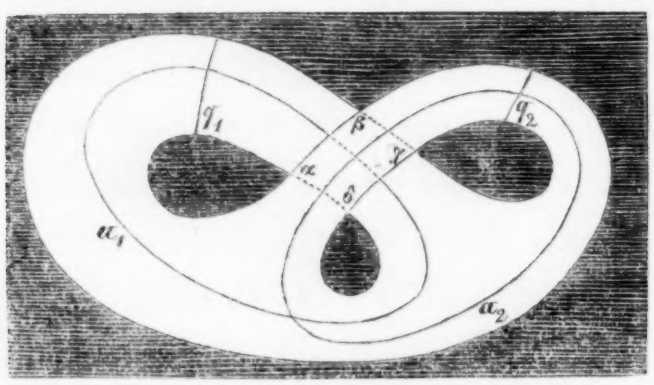
Zweifach zusammenhangende Fläche.



Sie wird durch jeden sie nicht zerstückelnden Querschnitt q in eine einfach zusammenhangende zerschnitten. Mit Zuziehung der Curve a kann in ihr jede geschlossene Curve die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche bilden.

Dreifach zusammenhangende Fläche.





In dem Theile $\alpha\beta\gamma\delta$ der Ebene ist die Fläche doppelt. Der a_1 enthaltende Arm der Fläche ist als unter dem andern fortgehend betrachtet und daher durch punktirte Linien angedeutet.

In dieser Fläche kann jede geschlossene Curve mit Zuziehung der Curven a_1 und a_2 die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche bilden. Sie zerfällt durch jeden sie nicht zerstückelnden Querschnitt in eine zweifach zusammenhangende und durch zwei solche Querschnitte, q_1 und q_2, in eine einfach zusammenhangende.

13.

Bestimmung einer Function einer veränderlichen complexen Gröfse durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen.

(Von Herrn *B. Riemann* in Göttingen.)

Wenn in einer Ebene, in welcher die rechtwinkligen Coordinaten eines Punkts x, y sind, der Werth einer Function von $x+yi$ in einer endlichen Linie gegeben ist, so kann diese von dort aus nur auf eine Weise stetig fortgesetzt werden und ist also dadurch völlig bestimmt (Siehe oben S. 101). Sie kann aber auch in dieser Linie nicht willkührlich angenommen werden, wenn sie von ihr aus einer stetigen Fortsetzung in die anstofsenden Flächentheile nach beiden Seiten hin fähig sein soll, da sie durch ihren Verlauf in einem noch so kleinen endlichen Theile dieser Linie schon für den übrigen Theil bestimmt ist. Bei dieser Bestimmungsweise einer Function sind also die zu ihrer Bestimmung dienenden Bedingungen nicht von einander unabhängig.

Als Grundlage für die Untersuchung einer Transcendenten ist es vor allen Dingen nöthig, ein System zu ihrer Bestimmung hinreichender von einander unabhängiger Bedingungen aufzustellen. Hiezu kann in vielen Fällen, namentlich bei den Integralen algebraischer Functionen und ihren inversen Functionen, ein Princip dienen, welches ***Dirichlet*** zur Lösung dieser Aufgabe für eine der ***Laplace***'schen partiellen Differentialgleichung genügende Function von drei Veränderlichen, — wohl durch einen ähnlichen Gedanken von ***Gauſs*** veranlafst — in seinen Vorlesungen über die dem umgekehrten Quadrat der Entfernung proportional wirkenden Kräfte seit einer Reihe von Jahren zu geben pflegt. Für diese Anwendung auf die Theorie von Transcendenten ist jedoch gerade ein Fall besonders wichtig, auf welchen dies Princip in seiner dortigen einfachsten Form nicht anwendbar ist, und welcher dort als von ganz untergeordneter Bedeutung unberücksichtigt bleiben kann. Dieser Fall ist der, wenn die Function an gewissen Stellen des Gebiets, wo sie zu bestimmen ist, vorgeschriebene Unstetigkeiten annehmen soll; was so zu verstehen ist, dafs sie an jeder solchen Stelle der Bedingung unterworfen ist, unstetig zu werden, wie eine dort gegebene unstetige Function, oder sich nur um eine dort stetige Funktion von ihr zu unterscheiden. Ich werde hier

das Princip in der für die beabsichtigte Anwendung erforderlichen Form darstellen und erlaube mir dabei in Betreff einiger Nebenuntersuchungen auf die in meiner Doctordissertation (Grundlagen für die allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Gröfse. Göttingen 1851) gegebene Darstellung desselben zu verweisen.

Man nehme an, dafs eine die (x, y)-Ebene einfach oder mehrfach bedeckende beliebig begrenzte Fläche T und in derselben zwei für jeden ihrer Punkte eindeutig bestimmte Functionen von x, y, die Functionen α und β, gegeben seien, und bezeichne das durch die Fläche T ausgedehnte Integral $\int\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right)dT$ durch $\Omega(\alpha)$, wobei die Functionen α und β beliebige Unstetigkeiten besitzen können, wenn nur das Integral dadurch nicht unendlich wird. Es bleibt dann auch $\Omega(\alpha-\lambda)$ endlich, wenn λ allenthalben stetig ist und endliche Differentialquotienten hat. Wird diese stetige Function λ der Bedingung unterworfen, nur in einem unendlich kleinen Theile der Fläche T von einer unstetigen Function γ verschieden zu sein, so wird $\Omega(\alpha-\lambda)$ unendlich grofs, wenn γ längs einer Linie unstetig ist oder in einem Punkte so unstetig ist, dafs $\int\left(\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2\right)dT$ unendlich wird (Meine Inaug. Diss. S. 23); es bleibt aber $\Omega(\alpha-\lambda)$ endlich, wenn γ nur in einzelnen Punkten und nur so unstetig ist, dafs

$$\int\left(\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2\right)dT$$

durch die Fläche T erstreckt endlich bleibt, wie z. B. wenn γ in der Umgebung eines Punktes im Abstande r von demselben $=(-\log r)^\varepsilon$ und $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ ist. Zur Abkürzung mögen hier die Functionen, in welche λ unbeschadet der Endlichkeit von $\Omega(\alpha-\lambda)$ übergehen kann, unstetig von der ersten Art, die Functionen, für welche dies nicht möglich ist, unstetig von der zweiten Art genannt werden. Denkt man sich nun in $\Omega(\alpha-\mu)$ für μ alle stetigen oder von der ersten Art unstetigen Functionen gesetzt, welche an der Grenze verschwinden, so erhält dies Integral immer einen endlichen, aber seiner Natur nach nie einen negativen Werth, und es mufs daher wenigstens einmal, für $\alpha-\mu=u$, ein Minimumwerth eintreten, so dafs Ω für jede Function $\alpha-\mu$, die unendlich wenig von u verschieden ist, gröfser als $\Omega(u)$ wird.

Bezeichnet daher σ eine beliebige stetige oder von erster Art unstetige Function des Orts in der Fläche T, die an der Grenze allenthalben gleich 0

ist, und h eine von x, y unabhängige Gröfse, so mufs $\Omega(u+h\sigma)$ sowohl für ein positives, als für ein negatives hinreichend kleines h gröfser als $\Omega(u)$ werden, und daher in der Entwicklung dieses Ausdrucks nach Potenzen von h der Coefficient von h verschwinden. Ist dieser 0, so ist

$$\Omega(u+h\sigma) = \Omega(u) + h^2 \int \left(\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2 \right) dT$$

und folglich Ω immer ein Minimum. Das Minimum tritt nur für eine einzige Function u ein; denn fände auch ein Minimum für $u+\sigma$ statt, so könnte $\Omega(u+\sigma)$ nicht $> \Omega(u)$ sein, weil sonst $\Omega(u+h\sigma) < \Omega(u+\sigma)$ für $h < 1$ würde; also könnte $\Omega(u+\sigma)$ nicht kleiner als die anliegenden Werthe sein. Ist aber $\Omega(u+\sigma) = \Omega(u)$, so mufs σ constant, also da es in der Begrenzung 0 ist, überall 0 sein. Es wird daher nur für eine einzige Function u das Integral Ω ein Minimum und die Variation erster Ordnung oder das h proportionale Glied in $\Omega(u+h\sigma)$,

$$2h \int dT \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial y} \right) = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dafs das Integral

$$\int \left(\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dy \right)$$

durch die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche T erstreckt stets $= 0$ ist. Zerlegt man nun (nach der vorhergehenden Abhandlung) die Fläche T, wenn sie eine mehrfach zusammenhangende ist, in eine einfach zusammenhangende T', so liefert die Integration durch das Innere von T' von einem festen Anfangspunkte bis zum Punkte (x, y) eine Function von x, y,

$$v = \int \left(\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dy \right) + \text{const.},$$

welche in T' überall stetig oder unstetig von der ersten Art ist und sich beim Ueberschreiten der Querschnitte um endliche von einem Knotenpunkte des Schnittnetzes zum andern constante Gröfsen ändert. Es genügt dann $v = \beta - v$ den Gleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

und folglich ist $u+vi$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial(u+vi)}{\partial y} - i\frac{\partial(u+vi)}{\partial x} = 0$$

oder eine Function von $x+yi$.

Man erhält auf diesem Wege den in der erwähnten Abhandlung S. 25 ausgesprochenen Satz:

Ist in einer zusammenhangenden durch Querschnitte in eine einfach zusammenhangende T' zerlegten Fläche T eine complexe Function $\alpha+\beta i$ von x, y gegeben, für welche $\int\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right)dT$ durch die ganze Fläche ausgedehnt einen endlichen Werth hat, so kann sie immer und nur auf Eine Art in eine Function von $x+yi$ verwandelt werden durch Subtraction einer Function $\mu+\nu i$ von x, y, welche folgenden Bedingungen genügt:

1) μ ist am Rande $=0$ oder doch nur in einzelnen Punkten davon verschieden, ν in Einem Punkte beliebig gegeben.

2) Die Aenderungen von μ sind in T, von ν in T' nur in einzelnen Punkten und nur so unstetig, dafs $\int\left(\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2\right)dT$ und $\int\left(\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\nu}{\partial y}\right)^2\right)dT$, durch die ganze Fläche erstreckt, endlich bleiben, und letztere längs der Querschnitte beiderseits gleich.

Wenn die Function $\alpha+\beta i$, wo ihre Differentialquotienten unendlich werden, unstetig wird, wie eine gegebene dort unstetige Function von $x+yi$, und keine durch eine Abänderung ihres Werthes in einem einzelnen Punkte hebbare Unstetigkeit besitzt, so bleibt $\Omega(\alpha)$ endlich, und es wird $\mu+\nu i$ in T' allenthalben stetig. Denn da eine Function von $x+yi$ gewisse Unstetigkeiten, wie z. B. Unstetigkeiten erster Art, gar nicht annehmen kann (Meine Diss. S. 16, Art. 12), so mufs die Differenz zweier solcher Functionen stetig sein, sobald sie nicht von der zweiten Art unstetig ist.

Nach dem eben bewiesenen Satze läfst sich daher eine Function von $x+yi$ so bestimmen, dafs sie im Innern von T, von der Unstetigkeit des imaginären Theils in den Querschnitten abgesehen, gegebene Unstetigkeiten annimmt, und ihr reeller Theil an der Grenze einen dort allenthalben beliebig gegebenen Werth erhält; wenn nur für jeden Punkt, wo ihre Differentialquotienten unendlich werden sollen, die vorgeschriebene Unstetigkeit die einer gegebenen dort unstetigen Function von $x+yi$ ist. Die Bedingung an der Grenze kann man, wie leicht zu sehen, ohne eine wesentliche Aenderung der gemachten Schlüsse durch manche andere ersetzen.

Göttingen, 1857.

14.

Theorie der *Abel*'schen Functionen.

(Von Herrn *B. Riemann*.)

In der folgenden Abhandlung habe ich die *Abel*'schen Functionen nach einer Methode behandelt, deren Principien in meiner Inauguraldissertation *) aufgestellt und in einer etwas veränderten Form in den drei vorhergehenden Aufsätzen dargestellt worden sind. Zur Erleichterung der Uebersicht schicke ich eine kurze Inhaltsangabe vorauf.

Die erste Abtheilung enthält die Theorie eines Systems von gleichverzweigten algebraischen Functionen und ihren Integralen, soweit für dieselbe nicht die Betrachtung von ϑ-Reihen mafsgebend ist, und handelt im §. 1—5 von der Bestimmung dieser Functionen durch ihre Verzweigungsart und ihre Unstetigkeiten, im §. 6—10 von den rationalen Ausdrücken derselben in zwei durch eine algebraische Gleichung verknüpfte veränderliche Gröfsen, und im §. 11—13 von der Transformation dieser Ausdrücke durch rationale Substitutionen. Der bei dieser Untersuchung sich darbietende Begriff einer *Klasse* von algebraischen Gleichungen, welche sich durch rationale Substitutionen in einander transformiren lassen, dürfte auch für andere Untersuchungen wichtig und die Transformation einer solchen Gleichung in Gleichungen niedrigsten Grades ihrer Klasse (§. 13) auch bei anderen Gelegenheiten von Nutzen sein. Diese Abtheilung behandelt endlich im §. 14—16 zur Vorbereitung der folgenden die Anwendung des *Abel*'schen Additionstheorems für ein beliebiges System allenthalben endlicher Integrale von gleichverzweigten algebraischen Functionen zur Integration eines Systems von Differentialgleichungen.

In der zweiten Abtheilung werden für ein beliebiges System von immer endlichen Integralen gleichverzweigter, algebraischer, $\overline{2p+1}$fach zusammenhangender Functionen die *Jacobi*'schen Umkehrungsfunctionen von p veränderlichen Gröfsen durch $p$fach unendliche ϑ-Reihen ausgedrückt, d. h. durch Reihen von der Form

---

*) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Gröfse. Göttingen 1851.

$$\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \left(\sum_z\right)^p e^{\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum_1^p v_\mu m_\mu},$$

worin die Summationen im Exponenten sich auf μ und μ', die äufseren Summationen auf $m_1, m_2, \ldots, m_p$ beziehen. Es ergiebt sich, dafs zur allgemeinen Lösung dieser Aufgabe eine — wenn $p > 3$, specielle — Gattung von ϑ-Reihen ausreicht, in denen zwischen den $\frac{p(p+1)}{2}$ Gröfsen a $\frac{(p-2)(p-3)}{1.2}$ Relationen stattfinden, so dafs nur $3p-3$ willkührlich bleiben. Dieser Theil der Abhandlung bildet zugleich eine Theorie dieser speciellen Gattung von ϑ-Functionen; die allgemeinen ϑ-Functionen bleiben hier ausgeschlossen, lassen sich jedoch nach einer ganz ähnlichen Methode behandeln.

Das hier erledigte *Jacobi*'sche Umkehrungsproblem ist für die hyperelliptischen Integrale schon auf mehreren Wegen durch die beharrliche mit so schönem Erfolge gekrönten Arbeiten von *Weierstrafs* gelöst worden, von denen eine Uebersicht im 47. Bande d. J. (S. 289) mitgetheilt worden ist. Es ist jedoch bis jetzt nur von dem Theile dieser Arbeiten, welcher in den §§. 1 und 2 und der ersten die elliptischen Functionen betreffenden Hälfte des §. 3 der angeführten Abhandlung skizzirt wird, die wirkliche Ausführung veröffentlicht (Bd. 52 S. 285 d. J.); in wie weit zwischen den späteren Theilen dieser Arbeiten und meinen hier dargestellten eine Uebereinstimmung nicht blofs in Resultaten, sondern auch in den zu ihnen führenden Methoden stattfindet, wird grofsentheils erst die versprochene ausführliche Darstellung derselben ergeben können.

Die gegenwärtige Abhandlung bildet mit Ausnahme der beiden letzten §§. 26 und 27, deren Gegenstand damals nur kurz angedeutet werden konnte, einen Auszug aus einem Theile meiner von Michaelis 1855 bis Michaelis 1856 zu Göttingen gehaltenen Vorlesungen. Was die Auffindung der einzelnen Resultate betrifft, so wurde ich auf das im §. 1—5, 9 und 12 Mitgetheilte und die dazu nöthigen vorbereitenden Sätze, welche später Behufs der Vorlesungen so, wie es in dieser Abhandlung geschehen ist, weiter ausgeführt wurden, im Herbste 1851 und zu Anfang 1852 durch Untersuchungen über die conforme Abbildung mehrfach zusammenhangender Flächen geführt, ward aber dann durch einen andern Gegenstand von dieser Untersuchung abgezogen. Erst um Ostern 1855 wurde sie wieder aufgenommen und in den Oster- und Michaelisferien jenes Jahres bis zu §. 21 incl. fortgeführt; das Uebrige wurde bis Michaelis 1856 hinzugefügt. Einzelne ergänzende Zusätze sind an manchen Stellen während der Ausarbeitung hinzugekommen.

Erste Abtheilung.

1.

Ist s die Wurzel einer irreductibeln Gleichung $n$ten Grades, deren Coefficienten ganze Functionen $m$ten Grades von z sind, so entsprechen jedem Werthe von z n Werthe von s, die sich mit z überall, wo sie nicht unendlich werden, stetig ändern. Stellt man daher (nach S. 103 dieses Bandes) die Verzweigungsart dieser Function durch eine in der z-Ebene ausgebreitete unbegrenzte Fläche T dar, so ist diese in jedem Theile der Ebene $n$fach, und s ist dann eine einwerthige Function des Orts in dieser Fläche. Eine unbegrenzte Fläche kann entweder als eine Fläche mit unendlich weit entfernter Begrenzung oder als eine geschlossene angesehen werden, und Letzteres soll bei der Fläche T geschehen, so dafs dem Werthe $z=\infty$ in jedem der n Blätter der Fläche *ein* Punkt entspricht, wenn nicht etwa für $z=\infty$ eine Verzweigung stattfindet.

Jede rationale Function von s und z ist offenbar ebenfalls eine einwerthige Function des Orts in der Fläche T und besitzt also dieselbe Verzweigungsart wie die Function s, und es wird sich unten ergeben, dafs auch das Umgekehrte gilt.

Durch Integration einer solchen Function erhält man eine Function, deren verschiedene Fortsetzungen für denselben Theil der Fläche T sich nur um Constanten unterscheiden, da ihre Derivirte für denselben Punkt dieser Fläche immer denselben Werth wieder annimmt.

Ein solches System von gleichverzweigten algebraischen Functionen und Integralen dieser Functionen bildet zunächst den Gegenstand unserer Betrachtung; statt aber von diesen Ausdrücken dieser Functionen auszugehen, werden wir sie mit Anwendung des *Dirichlet*'schen Princips (S. 111 dieses Bandes) durch ihre Unstetigkeiten definiren.

2.

Zur Vereinfachung des Folgenden heifse eine Function *für einen Punkt der Fläche T unendlich klein von der ersten Ordnung,* wenn ihr Logarithmus bei einem positiven Umlaufe um ein diesen Punkt umgebendes Flächenstück, in welchem sie endlich und von Null verschieden bleibt, um $2\pi i$ wächst. Es ist demnach für einen Punkt, um den die Fläche T sich μ mal windet, wenn dort z einen endlichen Werth a hat, $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$, also $(dz)^{\frac{1}{\mu}}$, wenn aber

$z = \infty$, $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{\mu}}$ unendlich klein von der ersten Ordnung. Der Fall, wo eine Function in einem Punkte der Fläche T unendlich klein oder unendlich grofs von der νten Ordnung wird, kann so betrachtet werden, als wenn die Function in ν dort zusammenfallenden (oder unendlich nahen) Punkten unendlich klein oder unendlich grofs von der ersten Ordnung wird, wie in der Folge bisweilen geschehen soll.

Die Art und Weise, wie jene hier zu betrachtenden Functionen unstetig werden, kann dann so ausgedrückt werden. Wird eine von ihnen in einem Punkte der Fläche T unendlich, so kann sie, wenn r eine beliebige Function bezeichnet, die in diesem Punkte unendlich klein von der ersten Ordnung wird, stets durch Subtraction eines endlichen Ausdrucks von der Form

$$A \log r + Br^{-1} + Cr^{-2} + \cdots$$

in eine dort stetige verwandelt werden, wie sich aus den bekannten — nach *Cauchy* oder durch die *Fourier*'sche Reihe zu beweisenden — Sätzen über die Entwicklung einer Function in Potenzreihen ergiebt.

3.

Man denke sich jetzt eine in der z-Ebene allenthalben $n$fach ausgebreitete unbegrenzte und nach dem Obigen als geschlossen zu betrachtende zusammenhangende Fläche T gegeben und diese in eine einfach zusammenhangende T' zerschnitten. Da die Begrenzung einer einfach zusammenhangenden Fläche aus *einem* Stücke besteht, eine geschlossene Fläche aber durch eine ungerade Anzahl von Schnitten eine gerade Zahl von Begrenzungsstücken, durch eine gerade eine ungerade erhält, so ist zu dieser Zerschneidung eine gerade Anzahl von Schnitten erforderlich. Die Anzahl dieser Querschnitte sei $= 2p$. Die Zerschneidung werde zur Vereinfachung des Folgenden so ausgeführt, dafs jeder spätere Schnitt von einem Punkte eines früheren bis zu dem anstofsenden Punkte auf der andern Seite desselben geht: wenn sich dann eine Gröfse längs der ganzen Begrenzung von T' stetig ändert und im ganzen Schnittsysteme zu beiden Seiten gleiche Aenderungen erleidet, so ist die Differenz der beiden Werthe, die sie in demselben Punkte des Schnittnetzes annimmt, in allen Theilen *eines* Querschnitts derselben Constanten gleich.

Man setze nun $z = x + yi$ und nehme in T eine Function $\alpha + \beta i$ von x, y folgendermafsen an:

In der Umgebung der Punkte ε_1, ε_2, ... bestimme man sie gleich gegebenen in diesen Punkten unendlich werdenden Functionen von $x + yi$, und

zwar um ε_ν, indem man eine beliebige Function von z, die in ε_ν unendlich klein von der ersten Ordnung wird, durch r_ν bezeichnet, gleich einem endlichen Ausdrucke von der Form

$$A_\nu \log r_\nu + B_\nu r_\nu^{-1} + C_\nu r_\nu^{-2} + \cdots = \varphi_\nu(r_\nu),$$

worin A_ν, B_ν, C_ν ... willkührliche Constanten sind. Man ziehe ferner nach einem beliebigen Punkte von allen Punkten ε, für welche die Gröfse A von Null verschieden ist, einander nicht schneidende Linien durch das Innere von T', von ε_ν die Linie l_ν. Man nehme endlich die Function in der ganzen noch übrigen Fläche T so an, dafs sie aufser den Linien l und den Querschnitten überall stetig, auf der positiven (linken) Seite der Linie l_ν um $-2\pi i A_\nu$ und auf der positiven Seite des νten Querschnitts um die gegebene Constante h_ν gröfser ist, als auf der andern, und dafs das Integral $\int\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right)dT$ durch die Fläche T ausgedehnt einen endlichen Werth erhält. Dies ist wie leicht zu sehen immer möglich, wenn die Summe sämmtlicher Gröfsen A gleich Null ist, aber auch nur unter dieser Bedingung, weil nur dann die Function nach einem Umlaufe um das System der Linien l den vorigen Werth wieder annehmen kann.

Die Constanten $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(2p)}$, um welche eine solche Function auf der positiven Seite der Querschnitte gröfser ist, als auf der andern, sollen die *Periodicitätsmoduln* dieser Function genannt werden.

Nach dem *Dirichlet*'schen Princip kann nun die Function $\alpha+\beta i$ in eine Function ω von $x+yi$ verwandelt werden durch Subtraction einer ähnlichen in T' allenthalben stetigen Function von x, y mit rein imaginären Periodicitätsmoduln, und diese ist bis auf eine additive Constante völlig bestimmt. Die Function ω stimmt dann mit $\alpha+\beta i$ in den Unstetigkeiten im Innern von T' und in den reellen Theilen der Periodicitätsmoduln überein. Für ω können daher die Functionen φ_ν und die reellen Theile ihrer Periodicitätsmoduln willkührlich gegeben werden. Durch diese Bedingungen ist sie bis auf eine additive Constante völlig bestimmt, folglich auch der imaginäre Theil ihrer Periodicitätsmoduln.

Es wird sich zeigen, dafs diese Function ω sämmtliche im §. 1 bezeichneten Functionen als specielle Fälle unter sich enthält.

4.

Allenthalben endliche Functionen ω. (Integrale erster Gattung.)

Wir wollen jetzt die einfachsten von ihnen betrachten und zwar zuerst diejenigen, die immer endlich bleiben und also im Innern von T' allenthalben stetig sind. Sind $w_1, w_2, \ldots, w_p$ solche Functionen, so ist auch

$$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_p w_p + \text{const.},$$

worin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ beliebige Constanten sind, eine solche Function. Es seien die Periodicitätsmoduln der Functionen $w_1, w_2, \ldots, w_p$ für den νten Querschnitt $k_1^{(\nu)}, k_2^{(\nu)}, \ldots, k_p^{(\nu)}$. Der Periodicitätsmodul von w für diesen Querschnitt ist dann $\alpha_1 k_1^{(\nu)} + \alpha_2 k_2^{(\nu)} + \cdots + \alpha_p k_p^{(\nu)} = k^{(\nu)}$; und setzt man die Gröfsen α in die Form $\gamma + \delta i$, so sind die reellen Theile der $2p$ Gröfsen $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(2p)}$ lineare Functionen der Gröfsen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$. Wenn nun zwischen den Gröfsen $w_1, w_2, \ldots, w_p$ keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten stattfindet, so kann die Determinante dieser linearen Ausdrücke nicht verschwinden; denn es liefsen sich sonst die Verhältnisse der Gröfsen α so bestimmen, dafs die Periodicitätsmoduln des reellen Theils von w sämmtlich 0 würden, folglich der reelle Theil von w und also auch w selbst nach dem *Dirichlet*'schen Princip eine Constante sein müfste. Es können daher dann die $2p$ Gröfsen α und β so bestimmt werden, dafs die reellen Theile der Periodicitätsmoduln gegebene Werthe erhalten; und folglich kann w jede immer endlich bleibende Function ω darstellen, wenn $w_1, w_2, \ldots, w_p$ keiner linearen Gleichung mit constanten Coefficienten genügen. Diese Functionen lassen sich aber immer dieser Bedingung gemäfs wählen; denn so lange $\mu < p$, finden zwischen den Periodicitätsmoduln des reellen Theils von $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_\mu w_\mu +$ const. lineare Bedingungsgleichungen statt; es ist daher $w_{\mu+1}$ nicht in dieser Form enthalten, wenn man, was nach dem Obigen immer möglich ist, die Periodicitätsmoduln des reellen Theils dieser Function so bestimmt, dafs sie diesen Bedingungsgleichungen nicht genügen.

Functionen ω, die für einen Punkt der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung werden. (Integrale zweiter Gattung.)

Es sei ω nur für einen Punkt ε der Fläche T unendlich, und für diesen seien alle Coefficienten in φ aufser B gleich 0. Eine solche Function ist dann bis auf eine additive Constante bestimmt durch die Gröfse B und die reellen Theile ihrer Periodicitätsmoduln. Bezeichnet $t^0(\varepsilon)$ irgend eine solche

Function, so können in dem Ausdrucke

$$l(\varepsilon) = \beta l^0(\varepsilon) + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_p w_p + \text{const.}$$

die Constanten β, α_1, α_2, ..., α_p immer so bestimmt werden, dafs für ihn die Gröfse B und die reellen Theile der Periodicitätsmoduln beliebig gegebene Werthe erhalten. Dieser Ausdruck stellt also jede solche Function dar.

Functionen ω, welche für zwei Punkte der Fläche T logarithmisch unendlich werden. (*Integrale dritter Gattung.*)

Betrachten wir drittens den Fall, wo die Function ω nur logarithmisch unendlich wird, so mufs dies, da die Summe der Gröfsen A gleich 0 sein mufs, wenigstens für zwei Punkte der Fläche T, ε_1 und ε_2, geschehen und $A_2 = -A_1$ sein. Ist von den Functionen, bei denen dies statt hat und die beiden letztern Gröfsen $= 1$ sind, irgend eine $\varpi^0(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, so sind nach ähnlichen Schlüssen, wie oben, alle übrigen in der Form

$$\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varpi^0(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_p w_p + \text{const.}$$

enthalten.

Für die folgenden Bemerkungen nehmen wir zur Vereinfachung an, dafs die Punkte ε keine Verzweigungspunkte sind und nicht im Unendlichen liegen. Man kann dann $r_\nu = z - z_\nu$ setzen, indem man durch z_ν den Werth von z in ε_ν bezeichnet. Wenn man dann $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ so nach z_1 differentiirt, dafs die reellen Theile der Periodicitätsmoduln (oder auch p von den Periodicitätsmoduln) und der Werth von $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ für einen beliebigen Punkt der Fläche T constant bleiben, so erhält man eine Function $t(\varepsilon_1)$, die in ε_1 unstetig wie $\frac{1}{z - z_1}$ wird. Umgekehrt ist, wenn $t(\varepsilon_1)$ eine solche Function ist, $\int_{z_2}^{z_3} t(\varepsilon_1)\, \partial z_1$, durch eine beliebige in T von ε_2 nach ε_3 führende Linie genommen, gleich einer Function $\varpi(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Auf ähnliche Art erhält man durch n successive Differentiationen eines solchen $t(\varepsilon_1)$ nach z_1 Functionen ω, welche im Punkte ε_1 wie $n!(z - z_1)^{-n-1}$ unstetig werden und übrigens endlich bleiben.

Für die ausgeschlossenen Lagen der Punkte ε bedürfen diese Sätze einer leichten Modification.

Offenbar kann nun ein mit constanten Coefficienten aus Functionen w, aus Functionen ϖ und ihren Derivirten nach den Unstetigkeitswerthen gebildeter linearer Ausdruck so bestimmt werden, dafs er im Innern von T' beliebig gegebene Unstetigkeiten von der Form, wie ω, erhält, und die reellen

Theile seiner Periodicitätsmoduln beliebig gegebene Werthe annehmen. Durch einen solchen Ausdruck kann also jede gegebene Function ω dargestellt werden.

5.

Der allgemeine Ausdruck einer Function ω, die für m Punkte der Fläche T, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ unendlich grofs von der ersten Ordnung wird, ist nach dem Obigen

$$s = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \cdots + \beta_m t_m + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_p w_p + \text{const.},$$

worin t_ν eine beliebige Function $t(\varepsilon_\nu)$ und die Gröfsen α und β Constanten sind. Wenn von den m Punkten ε eine Anzahl ϱ in denselben Punkt η der Fläche T zusammenfallen, so sind die ϱ diesen Punkten zugehörigen Functionen t zu ersetzen durch eine Function $t(\eta)$ und deren $\varrho - 1$ erste Derivirte nach ihrem Unstetigkeitswerthe (§. 2).

Die $2p$ Periodicitätsmoduln dieser Function s sind lineare homogene Functionen der $p+m$ Gröfsen α und β. Wenn $m \geqq p+1$, lassen sich also $2p$ von den Gröfsen α und β als lineare homogene Functionen der übrigen so bestimmen, dafs die Periodicitätsmoduln sämmtlich 0 werden. Die Function enthält dann noch $m-p+1$ willkührliche Constanten, von denen sie eine lineare homogene Function ist, und kann als ein linearer Ausdruck von $m-p$ Functionen betrachtet werden, deren jede nur für $p+1$ Werthe unendlich von der ersten Ordnung wird.

Wenn $m = p+1$ ist, so sind die Verhältnisse der $2p+1$ Gröfsen α und β bei jeder Lage der $p+1$ Punkte ε völlig bestimmt. Es können jedoch für besondere Lagen dieser Punkte einige der Gröfsen β gleich 0 werden. Die Anzahl dieser Gröfsen sei $= m - \mu$, so dafs die Function nur für μ Punkte unendlich von der ersten Orduung wird. Diese μ Punkte müssen dann eine solche Lage haben, dafs von den $2p$ Bedingungsgleichungen zwischen den $p+\mu$ übrigen Gröfsen β und α $p+1-\mu$ eine identische Folge der übrigen sind, und es können daher nur $2\mu - p - 1$ von ihnen beliebig gewählt werden. Aufserdem enthält die Function noch 2 willkührliche Constanten.

Es sei nun s so zu bestimmen, dafs μ möglichst klein wird. Wenn s μmal unendlich von der ersten Ordnung wird, so ist dies auch mit jeder rationalen Function ersten Grades von s der Fall; man kann daher für die Lösung dieser Aufgabe einen der μ Punkte beliebig wählen. Die Lage der übrigen mufs dann so bestimmt werden, dafs $p+1-\mu$ von den Bedingungsgleichungen zwischen den Gröfsen α und β eine identische Folge der übrigen

sind; es mufs also, wenn die Verzweigungswerthe der Fläche T nicht besondern Bedingungsgleichungen genügen, $p+1-\mu \leqq \mu-1$ oder $\mu \geqq \frac{1}{2}p+1$ sein.

Die Anzahl der in einer Function s, die nur für m Punkte der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung wird und übrigens stetig bleibt, enthaltenen willkührlichen Constanten ist in allen Fällen $= 2m-p+1$.

Eine solche Function ist die Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten ganze Functionen m^{ten} Grades von z sind.

Sind $s_1, s_2, \ldots, s_n$ die n Werthe der Function s für dassalbe z, und bezeichnet σ eine beliebige Gröfse, so ist $(\sigma-s_1)(\sigma-s_2)\ldots(\sigma-s_n)$ eine einwerthige Function von z, die nur für einen Punkt der z-Ebene, der mit einem Punkte ε zusammenfällt, unendlich wird und unendlich von einer so hohen Ordnung, als Punkte ε auf ihn fallen. In der That wird für jeden auf ihn fallenden Punkt ε, der kein Verzweigungspunkt ist, nur *ein* Factor dieses Products von einer um 1 höheren Ordnung unendlich, für einen Punkt ε, um den die Fläche T sich μ mal windet, aber μ Factoren von einer um $\frac{1}{\mu}$ höheren Ordnung. Bezeichnet man nun die Werthe von z in *den* Puukten ε, wo z nicht unendlich ist, durch $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\nu$ und $(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\ldots(z-\zeta_\nu)$ durch a_0; so ist $a_0(\sigma-s_1)\ldots(\sigma-s_n)$ eine einwerthige Function von z, die für alle endlichen Werthe von z endlich ist und für $z=\infty$ unendlich von der m^{ten} Ordnung wird, also eine ganze Function m^{ten} Grades von z. Sie ist zugleich eine ganze Function n^{ten} Grades von σ, die für $\sigma=s$ verschwindet. Bezeichnet man sie durch F und, wie wir in der Folge thun wollen, ***eine ganze Function F n^{ten} Grades von σ und m^{ten} Grades von z*** durch $F(\overset{n}{\sigma}, \overset{m}{z})$, so ist s die Wurzel der Gleichung $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z})=0$.

Diese Function F ist eine Potenz einer unzerfällbaren — d. h. nicht als ein Product aus ganzen Functionen von σ und z darstellbaren — Function. Denn jeder ganze rationale Factor von $F(\sigma, z)$ bildet, da er für einige der Wurzeln $s_1, s_2, \ldots, s_n$ verschwinden mufs, für $\sigma=s$ eine Function von z, die in einem Theile der Fläche T verschwindet und folglich, da diese Fläche zusammenhangend ist, in der ganzen Fläche 0 sein mufs. Zwei unzerfällbare Factoren von $F(\sigma, z)$ könnten aber nur für eine endliche Anzahl von Werthenpaaren zugleich verschwinden, wenn die eine nicht durch Multiplication mit einer Constanten aus der andern erhalten werden könnte. Folglich mufs F eine Potenz einer unzerfällbaren Function sein.

Wenn der Exponent ν dieser Potenz >1 ist, so wird die Verzweigungsart der Function s nicht dargestellt durch die Fläche T, sondern durch eine in der z-Ebene allenthalben $\frac{n}{\nu}$fach ausgebreitete Fläche τ, in welcher die Fläche T allenthalben νfach ausgebreitet ist. Es kann dann zwar s als eine wie T verzweigte Function betrachtet werden, nicht aber umgekehrt T als verzweigt, wie s.

Eine solche nur in einzelnen Punkten von T unstetige Function, wie s, ist auch $\frac{\partial\omega}{\partial z}$. Denn diese Function nimmt zu beiden Seiten der Querschnitte und der Linien l denselben Werth an, da die Differenz der beiden Werthe von ω in diesen Linien längs denselben constant ist; sie kann nur unendlich werden, wo ω unendlich wird, und in den Verzweigungspunkten der Fläche und ist sonst allenthalben stetig, da die Derivirte einer einändrig und endlich bleibenden Function ebenfalls einändrig und endlich bleibt.

Es sind daher sämmtliche Functionen ω algebraische wie T verzweigte Functionen von z oder Integrale solcher Functionen. Dieses System von Functionen ist bestimmt, wenn die Fläche T gegeben ist und hängt nur von der Lage ihrer Verzweigungspunkte ab.

6.

Es sei jetzt die irreductible Gleichung $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$ gegeben und die Art der Verzweigung der Function s oder der sie darstellenden Fläche T zu bestimmen. Wenn für einen Werth β von z μ Zweige der Function zusammenhangen, so dafs einer dieser Zweige sich erst nach μ Umläufen des z um β wieder in sich selbst fortsetzt, so können diese μ Zweige der Function (wie nach *Cauchy* oder durch die *Fourier*'sche Reihe leicht bewiesen werden kann) dargestellt werden durch eine Reihe nach steigenden rationalen Potenzen von $z-\beta$ mit Exponenten vom kleinsten gemeinschaftlichen Nenner μ, und umgekehrt.

Ein Punkt der Fläche T, in welchem nur zwei Zweige einer Function zusammenhangen, so dafs sich um diesen Punkt der erste in den zweiten und dieser in jenen fortsetzt, heifse ein *einfacher Verzweigungspunkt.*

Ein Punkt der Fläche, um welchen sie sich $(\mu+1)$mal windet, kann dann angesehen werden als μ zusammengefallene (oder unendlich nahe) einfache Verzweigungspunkte.

Um dies zu zeigen, seien in einem diesen Punkt umgebenden Stücke der z-Ebene $s_1, s_2, \ldots, s_\mu$, einändrige Zweige der Function s und in der

Begrenzung desselben, bei positiver Umschreibung auf einander folgend, a_1, a_2, ..., a_μ einfache Verzweigungspunkte. Durch einen positiven Umlauf um a_1 werde s_1 mit s_2, um a_2 s_1 mit s_3, ..., um a_μ s_1 mit s_μ vertauscht. Es gehen dann nach einem positiven Umlaufe um ein alle diese Punkte (und keinen andern Verzweigungspunkt) enthaltendes Gebiet

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_\mu, \quad s_{\mu+1}$$
$$\text{in} \quad s_2, \quad s_3, \quad \ldots, \quad s_{\mu+1}, \quad s_1, \quad \text{über,}$$

und es entsteht daher, wenn sie zusammenfallen, ein $(\mu+1)$facher Windungspunkt.

Die Eigenschaften der Functionen ω hangen wesentlich davon ab, wie vielfach zusammenhangend die Fläche T ist. Um dies zu entscheiden, wollen wir zunächst die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte der Function s bestimmen.

In einem Verzweigungspunkte nehmen die dort zusammenhangenden Zweige der Function denselben Werth an, und es werden daher zwei oder mehrere Wurzeln der Gleichung

$$F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

einander gleich. Dies kann nur geschehen, wenn

$$F'(s) = a_0 n s^{n-1} + a_1 \overline{n-1}\, s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$$

oder die einwerthige Function von z, $F'(s_1) F'(s_2) \ldots F'(s_n)$, verschwindet. Diese Function wird für endliche Werthe von z nur unendlich, wenn $s = \infty$, also $a_0 = 0$ ist und mufs, um endlich zu bleiben, mit a_0^{n-2} multiplicirt werden. Sie wird dann eine einwerthige, für ein endliches z endliche Function von z, welche für $z = \infty$ unendlich von der $2m(n-1)$ten Ordnung wird, also eine ganze Function $2m(n-1)$ten Grades. Die Werthe von z, für welche $F'(s)$ und $F(s)$ gleichzeitig verschwinden, sind also die Wurzeln der Gleichung $2m(n-1)$ten Grades

$$Q(z) = a_0^{n-2} \prod_i F'(s_i) = 0 \text{ oder auch, da } F'(s_i) = a_0 \prod_{i'} (s_i - s_{i'}), \quad (i \gtrless i')$$
$$= a_0^{2(n-1)} \prod_{i,\, i'} (s_i - s_{i'}) = 0, \quad (i \gtrless i'),$$

welche durch Elimination von s aus $F'(s) = 0$ und $F(s) = 0$ gebildet werden kann.

Wird $F(s, z) = 0$ für $s = \alpha$, $z = \beta$, so ist

$$F(s,z) = \frac{\partial F}{\partial s}(s-\alpha)+\frac{\partial F}{\partial z}(z-\beta)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s-\alpha)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial s\,\partial z}(s-\alpha)(z-\beta)+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(z-\beta)^2\right\}$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,$$
$$F'(s) = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s-\alpha)+\frac{\partial^2 F}{\partial s\,\partial z}(z-\beta)+\cdots$$

Ist also für $(s=\alpha, z=\beta)$ $\frac{\partial F}{\partial s}=0$ und verschwinden $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}$ dann nicht, so wird $s-\alpha$ unendlich klein, wie $(z-\beta)^{\frac{1}{2}}$, und findet also ein einfacher Verzweigungspunkt statt. Es werden zugleich in dem Producte $\Pi F'(s_i)$ zwei Factoren unendlich klein wie $(z-\beta)^{\frac{1}{2}}$, und $Q(z)$ erhält dadurch den Factor $(z-\beta)$. In dem Falle, dafs $\frac{\partial F}{\partial z}$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}$ nie verschwinden, wenn gleichzeitig $F=0$ und $\frac{\partial F}{\partial s}=0$ werden, entspricht demnach jedem linearen Factor von $Q(z)$ *ein* einfacher Verzweigungspunkt, und die Anzahl dieser Punkte ist also $=2m(n-1)$.

Die Lage der Verzweigungspunkte hängt von den Coefficienten der Potenzen von z in den Functionen a ab und ändert sich stetig mit denselben.

Wenn diese Coefficienten solche Werthe annehmen, dafs zwei demselben Zweigepaar angehörige einfache Verzweigungspunkte zusammenfallen, so heben diese sich auf, und es werden zwei Wurzeln von $F(s)$ einander gleich, ohne dafs eine Verzweigung stattfindet. Setzt sich nun jeder von ihnen s_1 in s_2 und s_2 in s_1 fort, so geht durch einen Umlauf um ein beide enthaltendes Stück der z-Ebene s_1 in s_1 und s_2 in s_2 über, und beide Zweige werden einändrig, wenn sie zusammenfallen. Es bleibt dann also auch ihre Derivirte $\frac{\partial s}{\partial z}$ einändrig und endlich, und folglich wird $\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial s}=0$.

Wird $F=\frac{\partial F}{\partial s}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$ für $s=\alpha$, $z=\beta$, so ergeben sich aus den drei folgenden Gliedern der Entwicklung von $F(s,z)$ zwei Werthe für $\frac{s-\alpha}{z-\beta}=\frac{\partial s}{\partial z}$, $(s=\alpha, z=\beta)$. Sind diese Werthe ungleich und endlich, so können die beiden Zweige der Function s, denen sie angehören, dort nicht zusammenhangen und sich nicht verzweigen. Es wird dann $\frac{\partial F}{\partial s}$ für beide unendlich klein wie $z-\beta$, und $Q(z)$ erhält dadurch den Factor $(z-\beta)^2$; es fallen also nur zwei einfache Verzweigungspunkte zusammen.

Um in jedem Falle, wenn für $z=\beta$ mehrere Wurzeln der Gleichung $F(s)=0$ gleich α werden, zu entscheiden, wie viele einfache Verzweigungspunkte für $(s=\alpha, z=\beta)$ zusammenfallen, und wie viele von diesen sich aufheben, mufs man diese Wurzeln (nach dem Verfahren von *Lagrange*) soweit nach steigenden Potenzen von $z-\beta$ entwickeln, bis diese Entwicklungen sämmtlich von einander verschieden werden; wodurch sich die wirklich noch stattfindenden Verzweigungen ergeben. Und man mufs dann untersuchen, von welcher Ordnung $F'(s)$ für jede dieser Wurzeln unendlich klein wird, um die Anzahl der ihnen zugehörigen linearen Factoren von $Q(z)$ oder der für $(s=\alpha, z=\beta)$ zusammengefallenen einfachen Verzweigungspunkte zu bestimmen.

Bezeichnet die Zahl ϱ, wie oft sich die Fläche T um den Punkt (s, z) windet, so wird im Punkte (z) $F'(s)$ so oft unendlich klein von der ersten Ordnung, als dort einfache Verzweigungspunkte zusammenfallen, $dz^{1-\frac{1}{\varrho}}$ so oft, als deren wirklich stattfinden, folglich $F'(s)\,dz^{\frac{1}{\varrho}-1}$ so oft, als von ihnen sich aufheben.

Ist die Anzahl der wirklich stattfindenden einfachen Verzweigungen w, die Anzahl der sich aufhebenden $2r$, so ist

$$w+2r = 2(n-1)m.$$

Nimmt man an, dafs die Verzweigungspunkte nur paarweise und sich aufhebend zusammenfallen, so ist für r Werthenpaare $(s=\gamma_\varrho, z=\delta_\varrho)$ $F=\frac{\partial F}{\partial s}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial z}\right)^2$ nicht Null und für w Werthenpaare von s und z $F=0$, $\frac{\partial F}{\partial s}=0$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ nicht Null und $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}$ nicht Null.

Wir beschränken uns meistens auf die Behandlung dieses Falles, da sich die Resultate auf die übrigen als Grenzfälle desselben leicht ausdehnen lassen, und wir können dies hier um so mehr thun, da wir die Theorie dieser Functionen auf eine von der Ausdrucksform unabhängige, keinen Ausnahmefällen unterworfene Grundlage gestützt haben.

7.

Es findet nun bei einer einfach zusammenhangenden, über einen endlichen Theil der z-Ebene ausgebreiteten Fläche zwischen der Anzahl ihrer einfachen Verzweigungspunkte und der Anzahl der Umdrehungen, welche die Richtung ihrer Begrenzungslinie macht, die Relation statt, dafs die letztere um

eine Einheit gröfser ist, als die erstere; und aus dieser ergiebt sich für eine mehrfach zusammenhangende Fläche eine Relation zwischen diesen Anzahlen und der Anzahl der Querschnitte, welche sie in eine einfach zusammenhangende verwandeln. Wir können diese Relation, welche im Grunde von Mafsverhältnissen unabhängig ist und der *analysis situs* angehört, hier für die Fläche T so ableiten.

Nach dem *Dirichlet*'schen Princip läfst sich in der einfach zusammenhangenden Fläche T' die Function $\log\zeta$ von z so bestimmen, dafs ζ für einen beliebigen Punkt im Innern derselben unendlich klein von der ersten Ordnung wird, und $\log\zeta$ längs einer beliebigen sich nicht schneidenden, von dort nach der Begrenzung führenden Linie auf der positiven Seite um $-2\pi i$ gröfser, als auf der negativen, übrigens aber allenthalben stetig und längs der Begrenzung von T' rein imaginär ist. Es nimmt dann die Function ζ jeden Werth, dessen Modul <1, einmal an; die Gesammtheit ihrer Werthe wird folglich durch eine über einen Kreis in der ζ-Ebene einfach ausgebreitete Fläche vertreten. Jedem Punkte von T' entspricht ein Punkt des Kreises, und umgekehrt. Es wird daher für einen beliebigen Punkt der Fläche, wo $z=z'$, $\zeta=\zeta'$, die Function $\zeta-\zeta'$ unendlich klein von der ersten Ordnung, und folglich bleibt dort, wenn die Fläche T' sich $(\mu+1)$mal um ihn windet, bei endlichem z'

$$\frac{z-z'}{(\zeta-\zeta')^{\mu+1}} = \frac{\partial z}{\partial\zeta(\zeta-\zeta')^{\mu}},$$

bei unendlichem z' aber

$$\frac{z^{-1}}{(\zeta-\zeta')^{\mu+1}} = -\frac{\partial z}{zz\,\partial\zeta(\zeta-\zeta')^{\mu}}$$

endlich. Das Integral $\int\partial\log\frac{\partial z}{\partial\zeta}$, um den ganzen Kreis positiv herumgenommen, ist gleich der Summe der Integrale um die Punkte, wo $\frac{\partial z}{\partial\zeta}$ unendlich oder Null wird, und also $=2\pi i(w-2n)$. Bezeichnet s ein Stück der Begrenzung von T' von einem und demselben bestimmten Punkte bis zu einem veränderlichen Punkte der Begrenzung, und σ das entsprechende Stück auf dem Kreisumfange, so ist

$$\log\frac{\partial z}{\partial\zeta} = \log\frac{\partial z}{\partial s} + \log\frac{\partial s}{\partial\sigma} - \log\frac{\partial\zeta}{\partial\sigma},$$

und, durch die ganze Begrenzung ausgedehnt,

$$\int\partial\log\frac{\partial z}{\partial s} = (2p-1)2\pi i, \quad \int\partial\log\frac{\partial s}{\partial\sigma} = 0, \quad -\int\partial\log\frac{\partial\zeta}{\partial\sigma} = -2\pi i,$$

also $$\int \partial \log \frac{\partial z}{\partial \zeta} = (2p-2)2\pi i.$$

Es ergiebt sich demnach $w - 2n = 2(p-1)$. Da nun $w = 2((n-1)m-r)$, so ist $p = (n-1)(m-1)-r$.

8.

Der allgemeine Ausdruck der wie T verzweigten Functionen s' von z, die für m' beliebig gegebene Punkte von T unendlich von der ersten Ordnung werden und übrigens stetig bleiben, enthält nach dem Obigen $m'-p+1$ willkührliche Constanten und ist eine lineäre Function derselben (§. 5). Lassen sich also, wie jetzt gezeigt werden soll, rationale Ausdrücke von s und z bilden, die für m' beliebig gegebene, der Gleichung $F=0$ genügende Werthenpaare von s und z unendlich von der ersten Ordnung werden und lineare Functionen von $m'-p+1$ willkührlichen Constanten sind, so kann durch diese Ausdrücke jede Function s' dargestellt werden.

Damit der Quotient zweier ganzen Functionen $\chi(s,z)$ und $\psi(s,z)$ für $s=\infty$ und $z=\infty$ beliebige endliche Werthe annehmen kann, müssen beide von gleichem Grade sein; der Ausdruck, durch welchen s' dargestellt werden soll, sei daher von der Form $\frac{\overset{\nu}{\psi}(s,\overset{\mu}{z})}{\overset{\nu}{\chi}(s,\overset{\mu}{z})}$, und überdies sei $\nu \geqq n-1$, $\mu \geqq m-1$.

Wenn zwei Zweige der Function s ohne zusammenzuhangen einander gleich werden, also für zwei verschiedene Punkte der Fläche T $z=\gamma$ und $s=\delta$ wird, so wird s' allgemein zu reden in diesen beiden Punkten verschiedene Werthe annehmen; soll also $\psi - s'\chi$ allenthalben $=0$ sein, so mufs für zwei verschiedene Werthe von s' $\psi(\gamma,\delta) - s'\chi(\gamma,\delta)=0$ sein, folglich $\chi(\gamma,\delta)=0$ und $\psi(\gamma,\delta)=0$. Es müssen also die Functionen χ und ψ für die r Werthenpaare $s=\gamma_\varrho$, $z=\delta_\varrho$ (S. 127) verschwinden *).

Die Function χ verschwindet für einen Werth von z, für welchen die einwerthige und für ein endliches z endliche Function von z

$$K(z) = a_0^\nu \chi(s_1)\chi(s_2)\dots\chi(s_n) = 0$$

ist; diese Function wird für ein unendliches z unendlich von der Ordnung

*) Es ist hier, wie gesagt, nur der Fall berücksichtigt, wo die Verzweigungspunkte der Function s nur paarweise und sich aufhebend zusammenfallen. Im Allgemeinen müssen in einem Punkte von T, wo nach der Auffassung im §. 6 sich aufhebende Verzweigungspunkte zusammenfallen, χ und ψ, wenn T sich um diesen Punkt ϱmal windet, unendlich klein werden, wie $F'(s)dz^{\frac{1}{\varrho}-1}$, damit die ersten Glieder in der Entwicklung der darzustellenden Function nach ganzen Potenzen von $(\Delta z)^{\frac{1}{\varrho}}$ beliebige Werthe annehmen können.

$m\nu+n\mu$ und ist also eine ganze Function $(m\nu+n\mu)$ten Grades. Da für die Werthenpaare (γ, δ) zwei Factoren des Prodncts $\Pi_i \chi(s_i)$ unendlich klein von der ersten Ordnung werden, also $K(z)$ unendlich klein von der zweiten Ordnung, so wird χ aufserdem noch unendlich klein von der ersten Ordnung für

$$i = m\nu+n\mu-2r$$

Werthenpaare von s und z oder Punkte von T.

Ist $\nu > n-1$, $\mu > m-1$, so bleibt der Werth der Function χ ungeändert, wenn man

$$\chi(\overset{\nu}{s}, \overset{\mu}{z})+\varrho(\overset{\nu-n}{s}, \overset{\mu-m}{z})F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}),$$

worin ϱ beliebig ist, für $\chi(\overset{\nu}{s}, \overset{\mu}{z})$ setzt; es können also $(\nu-n+1)(\mu-m+1)$ von den Coefficienten dieses Ausdrucks willkührlich angenommen werden. Werden nun von den $(\mu+1)(\nu+1)-(\nu-n+1)(\mu-m+1)$ noch übrigen r als lineare Functionen der übrigen so bestimmt, dafs χ für die r Werthenpaare (γ, δ) verschwindet, so enthält die Function χ noch

$$\begin{aligned}\varepsilon &= (\mu+1)(\nu+1)-(\nu-n+1)(\mu-m+1)-r \\ &= n\mu+m\nu-(n-1)(m-1)-r+1\end{aligned}$$

willkührliche Constanten. Es ist also $i-\varepsilon=(n-1)(m-1)-r-1=p-1$.

Nimmt man μ und ν so an, dafs $\varepsilon > m'$ ist, so kann man χ so bestimmen, dafs es für m' beliebig gegebene Werthenpaare unendlich klein von der ersten Ordnung wird, und dann, wenn $m' > p$, ψ so einrichten, dafs $\frac{\psi}{\chi}$ für alle übrigen Werthe endlich bleibt. In der That ist ψ ebenfalls eine lineare homogene Function von ε willkührlichen Constanten, und es lassen sich also, wenn $\varepsilon-i+m' > 1$ ist, $i-m'$ von ihnen als lineare Functionen der übrigen so bestimmen, dafs ψ für die $i-m'$ Werthenpaare von s und z, für welche χ noch unendlich klein von der ersten Ordnung wird, ebenfalls verschwindet. Die Function ψ enthält demnach $\varepsilon-i+m'=m'-p+1$ willkührliche Constanten, und $\frac{\psi}{\chi}$ kann also jede Function s' darstellen.

9.

Da die Functionen $\frac{\partial\omega}{\partial z}$ algebraische wie s verzweigte Functionen von z sind (§. 5), so lassen sie sich zufolge des eben bewiesenen Satzes rational in s und z ausdrücken, und sämmtliche Functionen ω als Integrale rationaler Functionen von s und z.

Ist w eine allenthalben endliche Function ω, so wird $\frac{\partial w}{\partial z}$ unendlich von der ersten Ordnung für jeden einfachen Verzweigungspunkt der Fläche T, da dw und $(dz)^{\frac{1}{2}}$ dort unendlich klein von der ersten Ordnung sind, bleibt aber sonst allenthalben stetig und wird für $z = \infty$ unendlich klein von der zweiten Ordnung. Umgekehrt bleibt das Integral einer Function, die sich so verhält, allenthalben endlich.

Um diese Function $\frac{\partial w}{\partial z}$ als Quotient zweier ganzen Functionen von s und z auszudrücken, mufs man (nach §. 8) zum Nenner eine Function nehmen, die verschwindet in den Verzweigungspunkten und für die r Werthenpaare (γ, δ). Dieser Bedingung genügt man am einfachsten durch eine Function, die nur für diese Werthe 0 wird. Eine solche ist

$$\frac{\partial F}{\partial s} = a_0 n s^{n-1} + a_1 \overline{n-1}\, s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

Diese wird für ein unendliches s unendlich von der $n-2$ten Ordnung (da a_0 dann unendlich klein von der ersten Ordnung wird) und für ein unendliches z unendlich von der $m$ten Ordnung. Damit $\frac{\partial w}{\partial z}$ aufser den Verzweigungspunkten endlich und für ein nnendliches z unendlich klein von der zweiten Ordnung ist, mufs also der Zähler eine ganze Function $\varphi(s, z)^{n-2\ m-2}$ sein, die für die r Werthenpaare (γ, δ) (S. 127) verschwindet. Demnach ist

$$w = \int \frac{\varphi(s, z)^{n-2\ m-2} \partial z}{\frac{\partial F}{\partial s}} = -\int \frac{\varphi(s, z)^{n-2\ m-2} \partial s}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

worin $\varphi = 0$ für $s = \gamma_\varrho$, $z = \delta_\varrho$, $\varrho = 1, 2, \ldots, r$.

Die Function φ enthält $(n-1)(m-1)$ constante Coefficienten, und wenn r von ihnen als lineare Functionen der übrigen so bestimmt werden, dafs $\varphi = 0$ für die r Werthenpaare $s = \gamma$, $z = \delta$, so bleiben noch $(m-1)(n-1)-r$ oder p willkührlich, und es erhält φ die Form

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \cdots + \alpha_p \varphi_p,$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ besondere Functionen φ, von denen keine eine lineare Function der übrigen ist, und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ beliebige Constanten sind. Als allgemeiner Ausdruck von w ergiebt sich, wie oben auf anderem Wege

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_p w_p + \text{const.}$$

Die nicht allenthalben endlich bleibenden Functionen ω und also die Integrale zweiter und dritter Gattung lassen sich nach denselben Principien

rational in s und z ausdrücken, wobei wir indefs hier nicht verweilen, da die allgemeinen Regeln des vorigen §. keiner weitern Erläuterung bedürfen und zur Betrachtung bestimmter Formen dieser Integrale erst die Theorie der ϑ-Functionen Anlafs giebt.

10.

Die Function φ wird aufser für die r Werthenpaare (γ, δ) noch für $m(n-2)+n(m-2)-2r$ oder $2(p-1)$ der Gleichung $F=0$ genügende Werthenpaare von s und z unendlich klein von der ersten Ordnung. Sind nun

$$\varphi^{(1)} = \alpha_1^{(1)}\varphi_1 + \alpha_2^{(1)}\varphi_2 + \cdots + \alpha_p^{(1)}\varphi_p$$

und

$$\varphi^{(2)} = \alpha_1^{(2)}\varphi_1 + \alpha_2^{(2)}\varphi_2 + \cdots + \alpha_p^{(2)}\varphi_p$$

zwei beliebige Functionen φ, so kann man in dem Ausdrucke $\frac{\varphi^{(2)}}{\varphi^{(1)}}$ den Nenner so bestimmen, dafs er für $p-1$ beliebig gegebene der Gleichung $F=0$ genügende Werthenpaare von s und z gleich Null wird, und dann den Zähler so, dafs er für $p-2$ von den übrigen Werthenpaaren, für welche $\varphi^{(1)}$ noch gleich 0 wird, gleichfalls verschwindet. Er ist dann noch eine lineare Function von zwei willkührlichen Constanten und folglich ein allgemeiner Ausdruck einer Function, die nur für p Punkte der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung wird. Eine Function, die für weniger als p Punkte unendlich wird, bildet einen speciellen Fall dieser Function; es lassen sich daher alle Functionen, die für weniger als $p+1$ Punkte der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung werden, in der Form $\frac{\varphi^{(2)}}{\varphi^{(1)}}$ oder in der Form $\frac{dw^{(2)}}{dw^{(1)}}$, wenn $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ zwei allenthalben endliche Integrale rationaler Functionen von s und z sind, darstellen.

11.

Eine wie T verzweigte Function z_1 von z, die für n_1 Punkte dieser Fläche unendlich von der ersten Ordnung wird, ist nach dem Früheren (S. 123) die Wurzel einer Gleichung von der Form $G(z_1^{n}, z^{n_1}) = 0$ und nimmt daher jeden Werth für n_1 Punkte der Fläche T an. Wenn man sich also jeden Punkt von T durch einen den Werth von z_1 in diesem Punkte geometrisch repräsentirenden Punkt einer Ebene abgebildet denkt, so bildet die Gesammtheit dieser Punkte eine in der z_1-Ebene allenthalben n_1 fach ausgebreitete und die Fläche T — bekanntlich in den kleinsten Theilen ähnlich — abbildende Fläche T_1. Jedem Punkt in der einen Fläche entspricht dann *ein* Punkt in der an-

dern. Die Functionen ω oder die Integrale wie T verzweigter Functionen von z gehen daher, wenn man für z als unabhängig veränderliche Gröfse z_1 einführt, in Functionen über, welche in der Fläche T_1 allenthalben *einen* bestimmten Werth und dieselben Unstetigkeiten haben, wie die Functionen ω in den entsprechenden Punkten von T, und welche folglich Integrale wie T_1 verzweigter Functionen von z_1 sind.

Bezeichnet s_1 irgend eine andere wie T verzweigte Function von z, die für m_1 Punkte von T und also auch von T_1 unendlich von der ersten Ordnung wird, so findet (§. 5) zwischen s_1 und z_1 eine Gleichung von der Form

$$F_1(\overset{n_1}{s_1}, \overset{m_1}{z_1}) = 0$$

statt, worin F_1 eine Potenz einer unzerfällbaren ganzen Function von s_1 und z_1 ist; und es lassen sich, wenn diese Potenz die erste ist, alle wie T_1 verzweigten Functionen von z_1, folglich alle rationalen Functionen von s und z rational in s_1 und z_1 ausdrücken (§. 8).

Die Gleichung $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$ kann also durch eine rationale Substitution in $F_1(\overset{n_1}{s_1}, \overset{m_1}{z_1})$ und diese in jene transformirt werden.

Die Gröfsengebiete (s, z) und (s_1, z_1) sind gleichvielfach zusammenhangend, da jedem Punkte des einen *ein* Punkt des andern entspricht. Bezeichnet daher r_1 die Anzahl der Fälle, in welchen s_1 und z_1 für zwei verschiedene Punkte des Gröfsengebiets (s_1, z_1) beide denselben Werth annehmen und folglich gleichzeitig F_1, $\frac{\partial F_1}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial F_1}{\partial z_1}$ gleich 0 und $\frac{\partial^2 F_1}{\partial s_1^2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1^2} - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial s_1 \partial z_1}\right)^2$ nicht Null ist, so mufs $(n_1-1)(m_1-1) - r_1 = p = (n-1)(m-1) - r$ sein.

12.

Man betrachte nun als zu Einer *Klasse* gehörend *alle irreductiblen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Gröfsen, welche sich durch rationale Substitutionen in einander transformiren lassen,* so dafs $F(s, z) = 0$ und $F_1(s_1, z_1) = 0$ zu derselben Klasse gehören, wenn sich für s und z solche rationale Functionen von s_1 und z_1 setzen lassen, dafs $F(s, z) = 0$ in $F_1(s_1, z_1) = 0$ übergeht und zugleich s_1 und z_1 rationale Functionen von s und z sind.

Die rationalen Functionen von s und z bilden, als Functionen von irgend einer von ihnen ζ betrachtet, ein System gleichverzweigter algebraischer Functionen. Auf diese Weise führt jede Gleichung offenbar zu einer Klasse von Systemen gleichverzweigter algebraischer Functionen, welche sich durch

Einführung einer Function des Systems als unabhängig veränderlicher Gröfse in einander transformiren lassen und zwar alle Gleichungen Einer Klasse zu derselben Klasse von Systemen algebraischer Functionen, und umgekehrt führt (§. 11) jede Klasse von solchen Systemen zu Einer Klasse von Gleichungen.

Ist das Gröfsengebiet (s, z) $\overline{2p+1}$fach zusammenhangend und die Function ζ in μ Punkten desselben unendlich von der ersten Ordnung, so ist die Anzahl der Verzweigungswerthe der gleichverzweigten Functionen von ζ, welche durch die übrigen rationalen Functionen von s und z gebildet werden, $2(\mu+p-1)$, und die Anzahl der willkührlichen Constanten in der Function ζ $2\mu-p+1$ (§. 5). Diese lassen sich so bestimmen, dafs $2\mu-p+1$ Verzweigungswerthe gegebene Werthe annehmen, wenn diese Verzweigungswerthe von einander unabhängige Functionen von ihnen sind; und zwar nur auf eine endliche Anzahl Arten, da die Bedingungsgleichungen algebraisch sind. In jeder Klasse von Systemen gleichverzweigter $\overline{2p+1}$fach zusammenhangender Functionen giebt es daher eine endliche Anzahl von Systemen μwerthiger Functionen, in welchen $2\mu-p+1$ Verzweigungswerthe gegebene Werthe annehmen. Wenn andererseits die $2(\mu+p-1)$ Verzweigungspunkte einer die ζ-Ebene allenthalben μfach bedeckenden, $\overline{2p+1}$fach zusammenhangenden Fläche beliebig gegeben sind, so giebt es (§§. 3—5) immer ein System wie diese Fläche verzweigter algebraischer Functionen von ζ. Die $3p-3$ übrigen Verzweigungswerthe in jenen Systemen gleichverzweigter μwerthiger Functionen können daher beliebige Werthe annehmen; und es hängt also eine Klasse von Systemen gleichverzweigter $\overline{2p+1}$fach zusammenhangender Functionen und die zu ihr gehörende Klasse algebraischer Gleichungen von $3p-3$ stetig veränderlichen Gröfsen ab, welche die Moduln dieser Klasse genannt werden sollen.

Diese Bestimmung der Anzahl der Moduln einer Klasse $\overline{2p+1}$fach zusammenhangender algebraischer Functionen gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, dafs es $2\mu-p+1$ Verzweigungswerthe giebt, welche von einander unabhängige Functionen der willkührlichen Constanten in der Function ζ sind. Diese Voraussetzung trifft nur zu, wenn $p>1$, und die Anzahl der Moduln ist nur dann $=3p-3$, für $p=1$ aber $=1$. Die directe Untersuchung derselben wird indefs schwierig durch die Art und Weise, wie die willkührlichen Constanten in ζ enthalten sind. Man führe deshalb in einem Systeme gleichverzweigter $\overline{2p+1}$fach zusammenhangender Functionen, um die Anzahl der

Moduln zu bestimmen, als unabhängig veränderliche Gröfse nicht eine dieser Functionen, sondern ein allenthalben endliches Integral einer solchen Function ein.

Die Werthe, welche die Function w von z innnerhalb der Fläche T' annimmt, werden geometrisch repräsentirt durch eine einen endlichen Theil der w-Ebene einfach oder mehrfach bedeckende und die Fläche T' (in den kleinsten Theilen ähnlich) abbildende Fläche, welche durch S bezeichnet werden soll. Da w auf der positiven Seite des ν^{ten} Querschnitts um die Constante $k^{(\nu)}$ gröfser ist, als auf der negativen, so besteht die Begrenzung von S aus Paaren von parallelen Curven, welche denselben Theil des T' begrenzenden Schnittsystems abbilden, und es wird die Ortsverschiedenheit der entsprechenden Punkte in den parallelen, den ν^{ten} Querschnitt abbildenden Begrenzungstheilen von S durch die complexe Gröfse $k^{(\nu)}$ ausgedrückt. Die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte der Fläche S ist $2p-2$, da dw in $2p-2$ Punkten der Fläche T unendlich klein von der zweiten Ordnung wird. Die rationalen Functionen von s und z sind dann Functionen von w, welche für jeden Punkt von S Einen bestimmten, wo sie nicht unendlich werden, stetig sich ändernden Werth haben und in den entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungstheile denselben Werth annehmen. Sie bilden daher ein System gleichverzweigter und $2p$fach periodischer Functionen von w. Es läfst sich nun (auf ähnlichem Wege, wie in den §§. 3—5) zeigen, dafs, die $2p-2$ Verzweigungspunkte und die $2p$ Ortsverschiedenheiten paralleler Begrenzungstheile der Fläche S als willkührlich gegeben vorausgesetzt, immer ein System wie diese Fläche verzweigter Functionen existirt, welche in den entsprechenden Punkten paralleler Begrenznngstheile denselben Werth annehmen und also $2p$fach periodisch sind, und die, als Functionen von einer von ihnen betrachtet, ein System gleichverzweigter $\overline{2p+1}$fach zusammenhangender algebraischer Functionen bilden, folglich zu einer Klasse von $\overline{2p+1}$fach zusammenhangenden algebraischen Functionen führen. In der That ergiebt sich nach dem *Dirichlet*schen Princip, dafs in der Fläche S eine Function von w bis auf eine additive Constante bestimmt ist durch die Bedingungen, im Innern von S beliebig gegebene Unstetigkeiten von der Form wie ω in T' anzunehmen und in den entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungstheile um Constanten, deren reeller Theil gegeben ist, verschiedene Werthe zu erhalten. Hieraus schliefst man, ähnlich wie im §. 5, die Möglichkeit von Functionen, welche nur in einzelnen Punkten von S unstetig werden und in den entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungstheile denselben Werth annehmen. Wird eine solche

Function z in n Punkten von S unendlich von der ersten Ordnung und sonst nicht unstetig, so nimmt sie jeden complexen Werth in n Punkten von S an; denn, wenn a eine beliebige Constante ist, so ist $\int \partial \log(z-a)$, um S erstreckt, $=0$, da die Integration durch parallele Begrenzungstheile sich aufhebt, und es wird daher $z-a$ in S ebenso oft unendlich klein, als unendlich von der ersten Ordnung. Die Werthe, welche z annimmt, werden folglich durch eine über die z-Ebene allenthalben $n$fach ausgebreitete Fläche repräsentirt, und die übrigen ebenso verzweigten und periodischen Functionen von w bilden daher ein System wie diese Fläche verzweigter $\overline{2p+1}$fach zusammenhangender algebraischer Functionen von z, w. z. b. w.

Für eine beliebig gegebene Klasse $\overline{2p+1}$fach zusammenhangender algebraischer Functionen kann man nun in dem als unabhängig veränderliche Gröfse einzuführenden

$$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_p w_p + c$$

die Gröfsen α so bestimmen, dafs p von den $2p$ Periodicitätsmoduln gegebene Werthe annehmen, und c wenn $p > 1$ so, dafs einer von den $2p-2$ Verzweigungswerthen der periodischen Functionen von w einen gegebenen Werth erhält. Dadurch ist w völlig bestimmt, und also sind es auch die $3p-3$ übrigen Gröfsen, von denen die Verzweigungsart und Periodicität jener Functionen von w abhängt; und da jedweden Werthen dieser $3p-3$ Gröfsen eine Klasse von $\overline{2p+1}$fach zusammenhangenden algebraischen Functionen entspricht, so hängt eine solche von $3p-3$ unabhängig veränderlichen Gröfsen ab.

Wenn $p=1$ ist, so ist kein Verzweigungspunkt vorhanden, und es läfst sich in

$$w = \alpha_1 w_1 + c$$

die Gröfse α_1 so bestimmen, dafs *ein* Periodicitätsmodul einen gegebenen Werth erhält, und dadurch ist der andere Periodicitätsmodul bestimmt. Die Anzahl der Moduln einer Klasse ist also dann $=1$.

13.

Nach den obigen (im §. 11 entwickelten) Principien der Transformation mufs man, um eine beliebig gegebene Gleichung $F(s,z)=0$ durch eine rationale Substitution in eine Gleichung derselben Klasse $F_1(\overset{n_1}{s_1}, \overset{m_1}{z_1})=0$ von möglichst niedrigem Grade zu transformiren, zuerst für z_1 einen rationalen Ausdruck in s und z, $r(s,z)$, so bestimmen, dafs n_1 möglichst klein wird, und

dann s_1 gleich einem andern rationalen Ausdrucke $r'(s, z)$ so, dafs m_1 möglichst klein wird und zugleich die zu einem beliebigen Werthe von z_1 gehörigen Werthe von s_1 nicht in Gruppen unter einander gleicher zerfallen, so dafs $F_1(\overset{n_1}{s_1}, \overset{m_1}{z_1})$ nicht eine höhere Potenz einer unzerfällbaren Function sein kann.

Wenn das Gröfsengebiet (s, z) $\overline{2p+1}$fach zusammenhangend ist, so ist der kleinste Werth, den n_1 annehmen kann, allgemein zu reden, $\geqq \frac{p}{2}+1$ (§. 5) und die Anzahl der Fälle, in denen s_1 und z_1 für zwei verschiedene Punkte des Gröfsengebiets beide denselben Werth annehmen,

$$= (n_1-1)(m_1-1)-p.$$

In einer Klasse von algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Gröfsen haben demnach, wenn ihre Moduln nicht besonderen Bedingungsgleichungen genügen, die Gleichungen niedrigsten Grades folgende Form:

für $p=1$, $F(\overset{2}{s}, \overset{2}{z})=0$, $r=0$

$p=2$, $F(\overset{2}{s}, \overset{3}{z})=0$, $r=0$

$p=2\mu-3$, $F(\overset{\mu}{s}, \overset{\mu}{z})=0$, $r=(\mu-2)^2$

$p>2$

$p=2\mu-2$, $F(\overset{\mu}{s}, \overset{\mu}{z})=0$, $r=(\mu-1)(\mu-3)$.

Von den Coefficienten der Potenzen von s und z in den ganzen Functionen F müssen r als lineare homogene Functionen der übrigen so bestimmt werden, dafs $\frac{\partial F}{\partial s}$ und $\frac{\partial F}{\partial z}$ für r der Gleichung $F=0$ genügende Werthenpaare gleichzeitig verschwinden. Die rationalen Functionen von s und z, als Functionen von einer von ihnen betrachtet, stellen dann alle Systeme $\overline{2p+1}$fach zusammenhangender algebraischer Functionen dar.

14.

Ich benutze nun nach *Jacobi* (dieses Journal Bd. 9 Nr. 32 §. 8) das *Abel*'sche Additionstheorem zur Integration eines Systems von Differentialgleichungen; ich werde mich dabei auf das beschränken, was in dieser Abhandlung später nöthig ist.

Führt man in einem allenthalben endlichen Integrale w einer rationalen Function von s und z als unabhängig veränderliche Gröfse eine rationale Function von s und z, ζ, ein, die für m Werthenpaare von s und z unend-

lich von der ersten Ordnung wird, so ist $\frac{\partial w}{\partial z}$ eine einwerthige Function von ζ. Bezeichnet man die m Werthe von w für dasselbe ζ durch $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(m)}$, so ist

$$\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \zeta} + \cdots + \frac{\partial w^{(m)}}{\partial \zeta}$$

eine einwerthige Function von ζ, deren Integral allenthalben endlich bleibt, und folglich ist auch $\int \partial (w^{(1)} + w^{(2)} + \cdots + w^{(m)})$ allenthalben einwerthig und endlich, mithin constant. Auf ähnliche Weise findet sich, wenn $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(m)}$ die demselben ζ entsprechenden Werthe eines beliebigen Integrals ω einer rationalen Function von s und z bezeichnen, $\int \partial (\omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \cdots + \omega^{(m)})$ bis auf eine additive Constante aus den Unstetigkeiten von ω und zwar als Summe von einer rationalen Function und mit constanten Coefficienten versehenen Logarithmen rationaler Functionen von ζ.

Mittelst dieses Satzes lassen sich, wie jetzt gezeigt werden soll, folgende p gleichzeitige Differentialgleichungen zwischen den $p+1$ der Gleichung $F(s, z) = 0$ genügenden Werthenpaaren von s und z, $(s_1, z_1), (s_2, z_2), \ldots, (s_{p+1}, z_{p+1})$

$$\frac{\varphi_\pi(s_1, z_1)\partial z_1}{\frac{\partial F(s_1, z_1)}{\partial s_1}} + \frac{\varphi_\pi(s_2, z_2)\partial z_2}{\frac{\partial F(s_2, z_2)}{\partial s_2}} + \cdots + \frac{\varphi_\pi(s_{p+1}, z_{p+1})\partial z_{p+1}}{\frac{\partial F(s_{p+1}, z_{p+1})}{\partial s_{p+1}}} = 0$$

für $\pi = 1, 2, \ldots, p$, allgemein oder vollständig (complete) integriren.

Durch diese Differentialgleichungen sind p von den Gröfsenpaaren (s_μ, z_μ) als Functionen des einen noch übrigen völlig bestimmt, wenn für einen beliebigen Werth des letzteren die Werthe der übrigen gegeben werden. Wenn man also diese $p+1$ Gröfsenpaare als Functionen *einer* veränderlichen Gröfse ζ so bestimmt, dafs sie für denselben Werth 0 dieser Gröfse *beliebig* gegebene Anfangswerthe $(s_1^0, z_1^0), (s_2^0, z_2^0), \ldots, (s_{p+1}^0, z_{p+1}^0)$ annehmen und den Differentialgleichungen genügen, so hat man dadurch die Differentialgleichungen allgemein integrirt. Nun läfst sich die Gröfse $\frac{1}{\zeta}$ als einwerthige und folglich rationale Function von (s, z) immer so bestimmen, dafs sie nur für alle oder einige von den $p+1$ Werthenpaaren (s_μ^0, z_μ^0) unendlich und für diese nur unendlich von der ersten Ordnung wird, da sich in dem Ausdrucke

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p+1} \beta_\mu t(s_\mu^0, z_\mu^0) + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \alpha_\mu w_\mu + \text{const.}$$

die Verhältnisse der Gröfsen α und β immer so bestimmen lassen, dafs die

Periodicitätsmoduln sämmtlich 0 werden. Es genügen dann, wenn kein $\beta = 0$ ist, den zu lösenden Differentialgleichungen die $p+1$ Zweige der $\overline{p+1}$werthigen gleichverzweigten Functionen s und z von ζ, (s_1, z_1), (s_2, z_2), ..., (s_{p+1}, z_{p+1}), welche für $\zeta = 0$ die Werthe (s_1^0, z_1^0), (s_2^0, z_2^0), ..., (s_{p+1}^0, z_{p+1}^0) annehmen. Wenn aber von den Gröfsen β einige, etwa die $p+1-m$ letzten, gleich 0 werden, so werden die zu lösenden Differentialgleichungen befriedigt durch die m Zweige der $m$werthigen Functionen s und z von ζ, (s_1, z_1), (s_2, z_2), ..., (s_m, z_m), welche für $\zeta = 0$ gleich (s_1^0, z_1^0), (s_2^0, z_2^0), ..., (s_m^0, z_m^0) werden, und durch constante also ihren Anfangswerthen s_{m+1}^0, ..., z_{p+1}^0 gleiche Werthe der Gröfsen s_{m+1}, z_{m+1}; ...; s_{p+1}, z_{p+1}. Im letzteren Falle sind von den p linearen homogenen Gleichungen $\sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{\varphi_\pi(s_\mu, z_\mu)\partial z_\mu}{\frac{\partial F(s_\mu, z_\mu)}{\partial s_\mu}} = 0$ für $\pi = 1, 2, \ldots, p$ zwischen den Gröfsen $\frac{\partial z_\mu}{\frac{\partial F(s_\mu, z_\mu)}{\partial s_\mu}}$ $p+1-m$ eine Folge der übrigen; es ergeben sich hieraus $p+1-m$ Bedingungsgleichungen, welche, damit dieser Fall eintritt, zwischen den Functionen (s_1, z_1), ..., (s_m, z_m) und also auch zwischen ihren Anfangswerthen (s_1^0, z_1^0), ..., (s_m^0, z_m^0) erfüllt sein müssen, und es können daher von diesen, wie oben (§. 5) gefunden, nur $2m-p-1$ beliebig gegeben werden.

15.

Es sei nun $\int \frac{\varphi_\pi(s, z)\partial z}{\frac{\partial F(s, z)}{\partial s}} + \text{const.}$, durch das Innere von T' integrirt, gleich w_π und der Periodicitätsmodul von w_π für den νten Querschnitt gleich $k_\pi^{(\nu)}$, so dafs sich die Functionen $w_1, w_2, \ldots, w_p$ des Gröfsenpaars (s, z) beim Uebertritt des Punkts (s, z) von der negativen auf die positive Seite des νten Querschnitts gleichzeitig um $k_1^{(\nu)}, k_2^{(\nu)}, \ldots, k_p^{(\nu)}$ ändern. Zur Abkürzung mag ein System von p Gröfsen $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ einem andern $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ ***congruent nach 2p Systemen zusammengehöriger Moduln*** genannt werden, wenn es aus ihm durch gleichzeitige Aenderungen sämmtlicher Gröfsen um zusammengehörige Moduln erhalten werden kann. Ist der Modul der πten Gröfse im νten Systeme $= k_\pi^{(\nu)}$, so heifst demnach

$$(b_1, b_2, \ldots, b_p) \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_p),$$

wenn $b_\pi = a_\pi + \sum_{\nu=1}^{\nu=2p} m_\nu k_\pi^{(\nu)}$ für $\pi = 1, 2, \ldots, p$ und $m_1, m_2, \ldots, m_{2p}$ ganze Zahlen sind.

Da sich p beliebige Gröfsen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ immer und nur auf eine Weise in die Form $a_\pi = \sum_{\nu=1}^{\nu=2p} \xi_\nu k_\pi^{(\nu)}$ setzen lassen, so dafs die $2p$ Gröfsen ξ reell sind, und durch Aenderung dieser Gröfsen ξ um ganze Zahlen alle congruenten Systeme und nur diese sich ergeben, so erhält man aus jeder Reihe congruenter Systeme eins und nur eins, wenn man in diesen Ausdrücken jede Gröfse ξ alle Werthe von einem beliebigen Werthe bis zu einem um 1 gröfseren, einen der beiden Grenzwerthe eingeschlossen, stetig durchlaufen läfst.

Dieses festgesetzt, folgt aus den obigen Differentialgleichungen oder aus den p Gleichungen $\sum_{\mu=1}^{\mu=p+1} dw_\pi^{(\mu)} = 0$ für $\pi = 1, 2, \ldots, p$ durch Integration

$$(\Sigma w_1^{(\mu)}, \Sigma w_2^{(\mu)}, \ldots, \Sigma w_p^{(\mu)}) \equiv (c_1, c_2, \ldots, c_p),$$

worin $c_1, c_2, \ldots, c_p$ constante von den Werthen (s^0, z^0) abhängige Gröfsen sind.

16.

Drückt man ζ als Quotienten zweier ganzen Functionen von s und z, $\frac{\chi}{\psi}$, aus, so sind die Gröfsenpaare $(s_1, z_1), \ldots, (s_m, z_m)$ die gemeinschaftlichen Wurzeln der Gleichungen $F = 0$ und $\frac{\chi}{\psi} = \zeta$. Da die ganze Function

$$\chi - \zeta\psi = f(s, z)$$

für alle Werthenpaare, für welche χ und ψ gleichzeitig verschwinden, ebenfalls, was auch ζ sei, verschwindet, so können die Gröfsenpaare $(s_1, z_1), \ldots, (s_m, z_m)$ auch definirt werden als gemeinschaftliche Wurzeln der Gleichung $F = 0$ und einer Gleichung $f(s, z) = 0$, deren Coefficienten so sich ändern, dafs alle übrigen gemeinschaftlichen Wurzeln constant bleiben. Wenn $m < p+1$, kann ζ in der Form $\frac{\varphi^{(1)}}{\varphi^{(2)}}$ dargestellt werden (§. 10) und f in der Form

$$\varphi^{(1)} - \zeta\varphi^{(2)} = \varphi^{(3)}.$$

Die allgemeinsten Werthe der den p Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} dw_\pi^{(\mu)} = 0 \quad \text{für} \quad \pi = 1, 2, \ldots, p$$

genügenden Functionenpaare $(s_1, z_1), \ldots, (s_p, z_p)$ werden daher gebildet durch p gemeinschaftliche Wurzeln der Gleichungen $F = 0$ und $\varphi = 0$, welche so sich ändern, dafs die übrigen gemeinschaftlichen Wurzeln constant bleiben. Hieraus folgt leicht der später nöthige Satz, dafs die Aufgabe, $p-1$ von den $2p-2$ Gröfsenpaaren $(s_1, z_1), \ldots, (s_{2p-2}, z_{2p-2})$ als Functionen der $p-1$ übrigen so zu bestimmen, dafs die p Gleichungen $\sum_{\mu=1}^{\mu=2p-2} dw_\pi^{(\mu)} = 0$ für $\pi = 1, 2, \ldots, p$

erfüllt werden, völlig allgemein gelöst wird, wenn man für diese $2p-2$ Gröfsenpaare die von den r Wurzeln $s=\gamma_\varrho$, $z=\delta_\varrho$ (§. 6) verschiedenen gemeinschaftlichen Wurzeln der Gleichungen $F=0$ und $\varphi=0$ oder die $2p-2$ Werthenpaare nimmt, für welche dw unendlich klein von der zweiten Ordnung wird, und dafs diese Aufgabe daher nur *eine* Lösung zuläfst. Solche Gröfsenpaare sollen ***durch die Gleichung*** $\varphi=0$ ***verknüpft*** heifsen. In Folge der Gleichungen $\sum_1^{2p-2} dw_\pi^{(\mu)}=0$ wird $(\sum_1^{2p-2} w_1^{(\mu)}, \sum_1^{2p-2} w_2^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^{2p-2} w_p^{(\mu)})$, die Summen über solche Gröfsenpaare ausgedehnt, congruent einem constanten Gröfsensysteme $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$, worin c_π nur von der additiven Constante in der Function w_π oder dem Anfangswerthe des sie ausdrückenden Integrals abhängt.

Zweite Abtheilung.

17.

Für die ferneren Untersuchungen über Integrale von algebraischen, $\overline{2p+1}$fach zusammenhangenden Functionen ist die Betrachtung einer $p$fach unendlichen ϑ-Reihe von grofsem Nutzen, d. h. einer $p$fach unendlichen Reihe, in welcher der Logarithmus des allgemeinen Gliedes eine ganze Function zweiten Grades der Stellenzeiger ist. Es sei in dieser Function für ein Glied, dessen Stellenzeiger $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sind, der Coefficient des Quadrats m_μ^2 gleich $a_{\mu,\mu}$, des doppelten Products $m_\mu m_{\mu'}$ gleich $a_{\mu,\mu'}=a_{\mu',\mu}$, der doppelten Gröfse m_μ gleich v_μ, und das constante Glied $=0$. Die Summe der Reihe, über alle ganzen positiven oder negativen Werthe der Gröfsen m ausgedehnt, werde als Function der p Gröfsen v betrachtet und durch $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ bezeichnet, so dafs

$$(1.)\qquad \vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty}\right)^p e^{\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum_1^p v_\mu m_\mu},$$

worin die Summationen im Exponenten sich auf μ und μ', die äufseren Summationen auf $m_1, m_2, \ldots, m_p$ beziehen. Damit diese Reihe convergirt, mufs der reelle Theil von $\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'}$ wesentlich negativ sein oder, als eine Summe von positiven oder negativen Quadraten reeller linearer von einander unabhängiger Functionen der Gröfsen m dargestellt, aus p negativen Quadraten zusammengesetzt sein.

Die Function ϑ hat die Eigenschaft, dafs es Systeme von gleichzeitigen Aenderungen der p Gröfsen v giebt, durch welche $\log\vartheta$ nur um eine lineare

Function der Gröfsen v geändert wird, und zwar $2p$ von einander unabhängige Systeme (d. h. von denen keins eine Folge der übrigen ist). Denn man hat, die ungeändert bleibenden Gröfsen v unter dem Functionszeichen ϑ weglassend, für $\mu = 1, 2, \ldots, p$

$$(2.) \qquad \vartheta = \vartheta(v_\mu + \pi i) \quad \text{und}$$

$$(3.) \qquad \vartheta = e^{2v_\mu + a_{\mu,\mu}} \vartheta(v_1 + a_{1,\mu}, v_2 + a_{2,\mu}, \ldots, v_p + a_{p,\mu}),$$

wie sich sofort ergiebt, wenn man in der Reihe für ϑ den Stellenzeiger m_μ in $m_\mu + 1$ verwandelt, wodurch sie, während ihr Werth ungeändert bleibt, in den Ausdruck zur Rechten übergeht.

Die Function ϑ ist durch diese Relationen und durch die Eigenschaft, allenthalben endlich zu bleiben, bis auf einen constanten Factor bestimmt. Denn in Folge der letzteren Eigenschaft und der Relationen (2.) ist sie eine einwerthige für endliche v endliche Function von $e^{2v_1}, e^{2v_2}, \ldots, e^{2v_p}$ und folglich in eine $p$fach unendliche Reihe von der Form

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\right)^p A_{m_1, m_2, \ldots, m_p} e^{2\sum_1^p v_\mu m_\mu}$$

mit den constanten Coefficienten A entwickelbar. Aus den Relationen (3.) ergiebt sich aber

$$A_{m_1, \ldots, m_\nu + 1, \ldots, m_p} = A_{m_1, \ldots, m_\nu, \ldots, m_p} e^{2\sum_1^p a_{\mu,\nu} m_\mu + a_{\nu,\nu}}$$

folglich

$$A_{m_1, \ldots, m_p} = \text{const.} e^{\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'}}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Man kann daher diese Eigenschaften der Function zu ihrer Definition verwenden. Die Systeme gleichzeitiger Aenderungen der Gröfsen v, durch welche sich $\log\vartheta$ nur um eine lineare Function von ihnen ändert, sollen ***Systeme zusammengehöriger Periodicitätsmoduln der unabhängig veränderlichen Gröfsen*** in dieser ϑ-Function genannt werden.

18.

Ich substituire nun für die p Gröfsen $v_1, v_2, \ldots, v_p$ p immer endlich bleibende Integrale $u_1, u_2, \ldots, u_p$ rationaler Functionen einer veränderlichen Gröfse z und einer $\overline{2p+1}$fach zusammenhangenden algebraischen Function s dieser Gröfse, und für die zusammengehörigen Periodicitätsmoduln der Gröfsen v zusammengehörige (d. h. an demselben Querschnitte stattfindende) Periodicitäts-

moduln dieser Integrale, so dafs $\log\vartheta$ in eine Function *einer* Veränderlichen z übergeht, welche sich, wenn s und z nach beliebiger stetiger Aenderung von z den vorigen Werth wieder annehmen, um lineare Functionen der Gröfsen u ändert.

Es soll zunächst gezeigt werden, dafs eine solche Substitution für jede $\overline{2p+1}$fach zusammenhangende Function s möglich ist. Die Zerschneidung der Fläche T mufs zu diesem Zwecke so durch $2p$ in sich zurücklaufende Schnitte $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$ geschehen, dafs folgende Bedingungen erfüllt werden. Wenn man $u_1, u_2, \ldots, u_p$ so wählt, dafs der Periodicitätsmodul von u_μ an dem Schnitte a_μ gleich πi, an den übrigen Schnitten a gleich 0 ist, und man den Periodicitätsmodul von u_μ an dem Schnitte b_ν durch $a_{\mu,\nu}$ bezeichnet, so mufs $a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}$ und der reelle Theil von $\sum_{\mu,\mu'} a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'}$ für alle reellen (ganzen) Werthe der p Gröfsen m negativ sein.

19.

Die Zerlegung der Fläche T werde nicht wie bisher nur durch in sich zurücklaufende Querschnitte, sondern folgendermafsen ausgeführt. Man mache zuerst einen in sich zurücklaufenden die Fläche nicht zerstückelnden Schnitt a_1 und führe dann einen Querschnitt b_1 von der positiven Seite von a_1 auf die negative zum Anfangspunkte zurück, worauf die Begrenzung aus *einem* Stücke bestehen wird. Einen dritten die Fläche nicht zerstückelnden Querschnitt kann man demzufolge (wenn die Fläche noch nicht einfach zusammenhangend ist) von einem beliebigen Punkte dieser Begrenzung bis zu einem beliebigen Begrenzungspunkte, also auch zu einem früheren Punkte dieses Querschnitts führen. Man thue das Letztere, so dafs dieser Querschnitt aus einer in sich zurücklaufenden Linie a_2 und einem dieser Linie voraufgehenden Theile c_1 besteht, welcher das frühere Schnittsystem mit ihr verbindet. Den folgenden Querschnitt b_2 ziehe man von der positiven Seite von a_2 auf die negative zum Anfangspunkte zurück, worauf die Begrenzung wieder aus *einem* Stücke besteht. Die weitere Zerschneidung kann daher, wenn nöthig, wieder durch zwei in demselben Punkte anfangende und endende Schnitte a_3 und b_3 und eine das System der Linien a_2 und b_2 mit ihnen verbindende Linie c_2 geschehen. Wird dieses Verfahren fortgesetzt, bis die Fläche einfach zusammenhangend ist, so erhält man ein Schnittnetz, welches aus p Paaren von zwei in einem und demselben Punkte anfangenden und endenden Linien a_1 und b_1, a_2 und $b_2, \ldots, a_p$ und b_p besteht und aus $p-1$ Linien $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$,

welche jedes Paar mit dem folgenden verbinden. Es möge c_ν von einem Punkte von b_ν nach einem Punkte von $a_{\nu+1}$ gehen. Das Schnittnetz wird als so entstanden betrachtet, dafs der $\overline{2\nu-1}$te Querschnitt aus $c_{\nu-1}$ und der von dem Endpunkte von $c_{\nu-1}$ zu diesem zurückgezogenen Linie a_ν besteht, und der 2νte durch die von der *positiven* auf die *negative* Seite von a_ν gezogene Linie b_ν gebildet wird. Die Begrenzung der Fläche besteht bei dieser Zerschneidung nach einer geraden Anzahl von Schnitten aus *einem*, nach einer ungeraden aus zwei Stücken.

Ein allenthalben endliches Integral w einer rationalen Function von s und z nimmt dann zu beiden Seiten einer Linie c denselben Werth an. Denn die ganze früher entstandene Begrenzung besteht, wie bemerkt, aus *einem* Stücke und bei der Integration längs derselben von der einen Seite der Linie c bis auf die andere wird $\int \partial w$ durch jedes früher entstandene Schnittelement zweimal, in entgegengesetzter Richtung, erstreckt. Eine solche Function ist daher in T allenthalben aufser den Linien a und b stetig. Die durch diese Linien zerschnittene Fläche T möge durch T''' bezeichnet werden.

20.

Es seien nun $w_1, w_2, \ldots, w_p$ von einander unabhängige solche Functionen, und der Periodicitätsmodul von w_μ an dem Querschnitte a_ν gleich $A_\mu^{(\nu)}$ und an dem Querschnitte b_ν gleich $B_\mu^{(\nu)}$. Es ist dann das Integal $\int w_\mu \, dw_{\mu'}$, um die Fläche T''' positiv herum ausgedehnt, $= 0$, da die Function unter dem Integralzeichen allenthalben endlich ist. Bei dieser Integration wird jede der Linien a und b zweimal, einmal in positiver und einmal in negativer Richtung durchlaufen, und es mufs während jener Integration, wo sie als Begrenzung des positiverseits gelegenen Gebiets dient, für w_μ der Werth auf der positiven Seite oder w_μ^+, während dieser der Werth auf der negativen oder w_μ^- genommen werden. Es ist also dies Integral gleich der Summe aller Integrale $\int (w_\mu^+ - w_\mu^-) \, dw_{\mu'}$ durch die Linien a und b. Die Linien b führen von der positiven zur negativen Seite der Linien a, und folglich die Linien a von der negativen zur positiven Seite der Linien b. Das Integral durch die Linie a_ν ist daher $= \int A_\mu^{(\nu)} \, dw_{\mu'} = A_\mu^{(\nu)} \int dw_{\mu'} = A_\mu^{(\nu)} B_{\mu'}^{(\nu)}$, und das Integral durch die Linie $b_\nu = \int B_\mu^{(\nu)} \, dw_{\mu'} = -B_\mu^{(\nu)} A_{\mu'}^{(\nu)}$. Das Integral $\int w \, dw_{\mu'}$, um die Fläche T''' positiv herum erstreckt, ist also $= \sum_\nu (A_\mu^{(\nu)} B_{\mu'}^{(\nu)} - B_\mu^{(\nu)} A_{\mu'}^{(\nu)})$, und diese Summe

folglich $=0$. Diese Gleichung gilt für je zwei von den Functionen $w_1, w_2, \ldots, w_p$ und liefert also $\frac{p(p-1)}{1.2}$ Relationen zwischen deren Periodicitätsmoduln.

Nimmt man für die Functionen w die Functionen u oder wählt man sie so, dafs $A_\mu^{(\nu)}$ für ein von μ verschiedenes ν gleich 0 und $A_\nu^{(\nu)} = \pi i$ ist, so gehen diese Relationen über in $B_{\mu'}^{\mu} \pi i - B_{\mu}^{\mu'} \pi i = 0$ oder in $a_{\mu,\mu'} = a_{\mu',\mu}$.

21.

Es bleibt noch zu zeigen, dafs die Gröfsen a die zweite oben nöthig gefundene Eigenschaft besitzen.

Man setze $w = \mu + \nu i$ und den Periodicitätsmodul dieser Function an dem Schnitte a_ν gleich $A^{(\nu)} = \alpha_\nu + \gamma_\nu i$ und an dem Schnitte b_ν gleich $B^{(\nu)} = \beta_\nu + \delta_\nu i$. Es ist dann das Integral $\int \left(\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2 \right) dT$ oder $\int \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial \nu}{\partial x} \right) dT$*) durch die Fläche T'' gleich dem Begrenzungsintegral $\int \mu \, d\nu$ um T'' positiv herum erstreckt, also gleich der Summe der Integrale $\int (\mu^+ - \mu^-) \, d\nu$ durch die Linien a und b. Das Integral durch die Linie a_ν ist $= \alpha_\nu \int d\nu = \alpha_\nu \delta_\nu$, das Integral durch die Linie b_ν gleich $\beta_\nu \int d\nu = -\beta_\nu \gamma_\nu$ und folglich

$$\int \left(\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2 \right) dT = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} (\alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu).$$

Diese Summe ist daher stets positiv.

Hieraus ergiebt sich die zu beweisende Eigenschaft der Gröfsen a, wenn man für w setzt $u_1 m_1 + u_2 m_2 + \cdots + u_p m_p$. Denn es ist dann $A_\nu = m_\nu \pi i$, $B_\nu = \sum_\mu a_{\mu,\nu} m_\mu$, folglich α_ν stets $=0$ und $\int \left(\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2 \right) dT = -\Sigma \beta_\nu \gamma_\nu$ $= -\pi \Sigma m_\nu \beta_\nu$ oder gleich dem reellen Theile von $-\pi \sum_{\mu,\nu} a_{\mu,\nu} m_\mu m_\nu$, welcher also für alle reellen Werthe der Gröfsen m positiv ist.

22.

Setzt man nun in der ϑ-Reihe (1.) §. 16 für $a_{\mu,\mu'}$ den Periodicitätsmodul der Function u_μ an dem Schnitt $b_{\mu'}$ und, durch $e_1, e_2, \ldots, e_p$ beliebige Constanten bezeichnend, $u_\mu - e_\mu$ für v_μ, so erhält man eine in jedem Punkte

*) Dies Integral drückt den Inhalt der Fläche aus, welche die Gesammtheit der Werthe, die w innerhalb T'' annimmt, auf der w-Ebene repräsentirt.

von T eindeutig bestimmte Function von z,

$$\vartheta(u_1 - e_1,\ u_2 - e_2,\ \ldots,\ u_p - e_p),$$

welche aufser den Linien b stetig und endlich und auf der positiven Seite der Linie b_ν $(e^{-2(u_\nu - e_\nu)})$ mal so grofs, als auf der negativen, ist, wenn man den Functionen u in den Linien b selbst den Mittelwerth von den Werthen zu beiden Seiten beilegt. Für wie viele Punkte von T' oder Werthenpaare von s und z diese Function unendlich klein von der ersten Ordnung wird, kann durch Betrachtung des Begrenzungsintegrals $\int d \log \vartheta$, um T' positiv herum erstreckt, gefunden werden; denn dieses Integral ist gleich der Anzahl dieser Punkte multiplicirt mit $2\pi i$. Andererseits ist dies Integral gleich der Summe der Integrale $\int (d \log \vartheta^+ - d \log \vartheta^-)$ durch sämmtliche Schnittlinien a, b und c. Die Integrale durch die Linien a und c sind $= 0$, das Integral durch b_ν aber gleich $-2\int du_\nu = 2\pi i$, die Summe aller also $= p\, 2\pi i$. Die Function ϑ wird daher unendlich klein von der ersten Ordnung in p Punkten der Fläche T', welche durch $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ bezeichnet werden mögen.

Durch einen positiven Umlauf des Punktes (s, z) um einen dieser Punkte wächst $\log \vartheta$ um $2\pi i$, durch einen positiven Umlauf um das Schnittepaar a_ν und b_ν um $-2\pi i$. Um daher die Function $\log \vartheta$ allenthalben eindeutig zu bestimmen, führe man von jedem Punkte η einen Schnitt durch das Innere nach je einem Linienpaar, von η_ν den Schnitt l_ν nach a_ν und b_ν, und zwar nach ihrem gemeinschaftlichen Anfangs- und Endpunkte, und nehme in der dadurch entstandenen Fläche T^* die Function allenthalben stetig an. Sie ist dann auf der positiven Seite der Linien l um $-2\pi i$, auf der positiven Seite der Linie a_ν um $g_\nu 2\pi i$ und auf der positiven Seite der Linie b_ν um $-2(u_\nu - e_\nu) - h_\nu 2\pi i$ gröfser, als auf der negativen, wenn g_ν und h_ν ganze Zahlen bezeichnen.

Die Lage der Punkte η und die Werthe der Zahlen g und h hangen von den Gröfsen e ab, und diese Abhängigkeit läfst sich auf folgendem Wege näher bestimmen. Das Integral $\int \log \vartheta\, du_\mu$, um T^* positiv herum erstreckt, ist $= 0$, da die Function $\log \vartheta$ in T^* stetig bleibt. Dieses Integral ist aber auch gleich der Summe der Integrale $\int (\log \vartheta^+ - \log \vartheta^-)\, du_\mu$ durch sämmtliche Schnittlinien l, a, b und c und findet sich, wenn man den Werth von u_μ im Punkte η_ν durch $\alpha_\mu^{(\nu)}$ bezeichnet, $= 2\pi i \left(\sum_\nu \alpha_\mu^{(\nu)} + h_\mu \pi i + \sum_\nu g_\nu a_{\nu,\mu} - e_\mu + k_\mu\right)$,

worin k_μ von den Gröfsen e, g, h und der Lage der Punkte η unabhängig ist. Dieser Ausdruck ist also $=0$.

Die Gröfse k_μ hängt von der Wahl der Function u_μ ab, welche durch die Bedingung, an dem Schnitte a_μ den Periodicitätsmodul πi, an den übrigen Schnitten a den Periodicitätsmodul 0 anzunehmen, nur bis auf eine additive Constante bestimmt ist. Nimmt man für u_μ eine um die Constante c_μ gröfsere Function und zugleich e_μ um c_μ gröfser, so bleiben die Function ϑ und folglich die Punkte η und die Gröfsen g, h ungeändert, der Werth von u_μ im Punkte η_ν aber wird $\alpha_\mu^{(\nu)}+c_\mu$. Es geht daher k_μ in $k_\mu-(p-1)c_\mu$ über und verschwindet, wenn $c_\mu=\frac{k_\mu}{p-1}$ genommen wird.

Man kann folglich, wie für die Folge geschehen soll, die additiven Constanten in den Functionen u oder die Anfangswerthe in den sie ausdrückenden Integralen so bestimmen, dafs man durch die Substitution von $u_\mu-\Sigma\alpha_\mu^{(\nu)}$ für v_μ in $\log\vartheta(v_1,\ldots,v_p)$ eine Function erhält, welche in den Punkten η logarithmisch unendlich wird und, durch T^* stetig fortgesetzt, auf der positiven Seite der Linien l um $-2\pi i$, der Linien a um 0 und der Linie b_ν um $-2(u_\nu-\sum_1^p\alpha_\nu^{(\mu)})$ gröfser wird, als auf der negativen. Zur Bestimmung dieser Anfangswerthe werden sich später leichtere Mittel darbieten, als der obige Integralausdruck für k_μ.

23.

Setzt man $(u_1,u_2,\ldots,u_p)\equiv(\alpha_1^{(p)},\alpha_2^{(p)},\ldots,\alpha_p^{(p)})$ nach den $2p$ Modulsystemen der Functionen u (§. 15), also

$$(v_1,v_2,\ldots,v_p)\equiv(-\sum_1^{p-1}\alpha_1^{(\nu)},-\sum_1^{p-1}\alpha_2^{(\nu)},\ldots,-\sum_1^{p-1}\alpha_p^{(\nu)}),$$

so wird $\vartheta=0$. Wird umgekehrt $\vartheta=0$ für $v_\mu=r_\mu$, so ist $(r_1,r_2,\ldots,r_p)$ einem Gröfsensysteme von der Form $(-\sum_1^{p-1}\alpha_1^{(\nu)}\ -\sum_1^{p-1}\alpha_2^{(\nu)},\ldots,-\sum_1^{p-1}\alpha_p^{(\nu)})$ congruent. Denn setzt man $v_\mu=u_\mu-\alpha_\mu^{(p)}+r_\mu$, indem man η_p beliebig wählt, so wird die Function ϑ aufser in η_p noch in $p-1$ andern Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung, und bezeichnet man diese durch $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{p-1}$, so ist $(-\sum_1^{p-1}\alpha_1^{(\nu)},-\sum_1^{p-1}\alpha_2^{(\nu)},\ldots,-\sum_1^{p-1}\alpha_p^{(\nu)})\equiv(r_1,r_2,\ldots,r_p)$.

Die Function ϑ bleibt ungeändert, wenn man sämmtliche Gröfsen v in's Entgegengesetzte verwandelt; denn verwandelt man in der Reihe für $\vartheta(v_1,v_2,\ldots,v_p)$ sämmtliche Indices m in's Entgegengesetzte, wodurch der

Werth der Reihe ungeändert bleibt, da $-m_\nu$ dieselben Werthe wie m_ν durchläuft, so geht $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ über in $\vartheta(-v_1, -v_2, \ldots, -v_p)$.

Nimmt man nun die Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$ beliebig an, so wird $\vartheta(-\sum_1^{p-1}\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1}\alpha_p^{(\nu)}) = 0$ und folglich, da die Function ϑ wie eben bemerkt gerade ist, auch $\vartheta(\sum_1^{p-1}\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{p-1}\alpha_p^{(\nu)}) = 0$. Es lassen sich also die $p-1$ Punkte $\eta_p, \eta_{p-1}, \ldots, \eta_{2p-2}$ so bestimmen, dafs

$$(\sum_1^{p-1}\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{p-1}\alpha_p^{(\nu)}) \equiv (-\sum_p^{2p-2}\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_p^{2p-2}\alpha_p^{(\nu)})$$

und folglich

$$(\sum_1^{2p-2}\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{2p-2}\alpha_p^{(\nu)}) \equiv (0, 0, \ldots, 0)$$

ist. Die Lage der $p-1$ letzten Punkte hängt dann von der Lage der $p-1$ ersten so ab, dafs bei beliebiger stetiger Aenderung derselben $\sum_1^{2p-2} d\alpha_\pi^{(\nu)} = 0$ für $\pi = 1, 2, \ldots, p$, und folglich sind (§. 16) die Punkte η solche $2p-2$ Punkte, für welche ein dw unendlich klein von der zweiten Ordnung wird, oder wenn man den Werth des Gröfsenpaars (s, z) im Punkte η_ν durch (σ_ν, ζ_ν) bezeichnet, so sind $(\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_{2p-2}, \zeta_{2p-2})$ durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpfte Werthenpaare (§. 16).

Bei den hier gewählten Anfangswerthen der Integrale u wird also

$$(\sum_1^{2p-2}u_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{2p-2}u_p^{(\nu)}) \equiv (0, 0, \ldots, 0)$$

wenn die Summationen über sämmtliche von den Gröfsenpaaren $(\gamma_\varrho, \delta_\varrho)$ **(§. 6.)** ***verschiedene gemeinschaftliche Wurzeln der Gleichung*** $F = 0$ ***und der Gleichung*** $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_p\varphi_p = 0$ ***erstreckt werden, wobei die Constanten Gröfsen c beliebig sind.***

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ m Punkte, für welche eine rationale Function ξ von s und z, die $m$mal unendlich von der ersten Ordnung wird, denselben Werth annimmt, und $u_\pi^{(\mu)}, s_\mu, z_\mu$ die Werthe von u_π, s, z im Punkte ε_μ, so ist (§. 15) $(\sum_1^m u_1^{(\mu)}, \sum_1^m u_2^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^m u_p^{(\mu)})$ congruent einem constanten, d. h. vom Werthe der Gröfse ξ unabhängigen Gröfsensysteme $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$, und es kann dann für jede beliebige Lage eines Punktes ε die Lage der übrigen so bestimmt werden, dafs $(\sum_1^m u_1^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^m u_p^{(\mu)}) \equiv (b_1, \ldots, b_p)$. Man kann daher, wenn $m = p$,

$(u_1-b_1,\ldots,u_p-b_p)$ und, wenn $m<p$, $(u_1-\sum_1^{p-m}\alpha_1^{(\nu)}-b_1,\ldots,u_p-\sum_1^{p-m}\alpha_p^{(\nu)}-b_p)$ für jede beliebige Lage des Punkts (s,z) und der $p-m$ Punkte η auf die Form $(-\sum_1^{p-1}\alpha_1^{(\nu)},\ldots,-\sum_1^{p-1}\alpha_p^{(\nu)})$ bringen, indem man einen der Punkte ε mit (s,z) zusammenfallen läfst, und folglich ist

$$\vartheta(u_1-\sum_1^{p-m}\alpha_1^{(\nu)}-b_1,\ldots,u_p-\sum_1^{p-m}\alpha_p^{(\nu)}-b_p)$$

für jedwede Werthe des Gröfsenpaars (s,z) und der $p-m$ Gröfsenpaare (σ_ν,ζ_ν) gleich 0.

24.

Aus der Untersuchung des §. 22 folgt als Corollar, dafs ein beliebig gegebenes Gröfsensystem $(e_1,\ldots,e_p)$ immer einem und nur einem Gröfsensysteme von der Form $(\sum_1^p\alpha_1^{(\nu)},\ldots,\sum_1^p\alpha_p^{(\nu)})$ congruent ist, wenn die Function $\vartheta(u_1-e_1,\ldots,u_p-e_p)$ nicht identisch verschwindet; denn es müssen dann die Punkte η die p Punkte sein, für welche diese Function 0 wird. Wenn aber $\vartheta(u_1^{(\rho)}-e_1,\ldots,u_p^{(\rho)}-e_p)$ für jeden Werth von (s_ρ,z_ρ) verschwindet, so läfst sich $(u_1^{(\rho)}-e_1,\ldots,u_p^{(\rho)}-e_p)\equiv(-\sum_1^{p-1}u_1^{(\nu)},\ldots,-\sum_1^{p-1}u_p^{(\nu)})$ setzen (§.23), und es lassen sich also für jeden Werth des Gröfsenpaars (s_p,z_p) die Gröfsenpaare $(s_1,z_1),\ldots,(s_{p-1},z_{p-1})$ so bestimmen, dafs

$$(\sum_1^p u_1^{(\nu)},\ldots,\sum_1^p u_p^{(\nu)})\equiv(e_1,\ldots,e_p)$$

und folglich, bei stetiger Aenderung von (s_p,z_p), $\sum_1^p du_\pi^{(\nu)}=0$ ist für $\pi=1,2,\ldots,p$. Die p Gröfsenpaare (s_ν,z_ν) sind daher p von den Gröfsenpaaren $(\gamma_\varrho,\delta_\varrho)$ verschiedene Wurzeln einer Gleichung $\varphi=0$, deren Coefficienten so sich ändern, dafs die übrigen $p-2$ Wurzeln constant bleiben. Bezeichnet man die Werthe von u_π für diese $p-2$ Werthenpaare von s und z durch $u_\pi^{(p+1)}$, $u_\pi^{(p+2)},\ldots,u_\pi^{2p-2}$, so ist $(\sum_1^{2p-2}u_1^{(\nu)},\ldots,\sum_1^{2p-2}u_p^{(\nu)})\equiv(0,0,\ldots,0)$ und folglich $(e_1,\ldots,e_p)\equiv(-\sum_{p+1}^{2p-2}u_1^{(\nu)},\ldots,-\sum_{p+1}^{2p-2}u_p^{(\nu)})$. Umgekehrt ist, wenn diese Congruenz stattfindet,

$$\vartheta(u_1^{(\rho)}-e_1,\ldots,u_p^{(\rho)}-e_p)=\vartheta(\sum_p^{2p-2}u_1^{(\nu)},\ldots,\sum_p^{2p-2}u_p^{(\nu)})=0.$$

Ein beliebig gegebenes Gröfsensystem $(e_1, \ldots, e_p)$ ***ist also nur einem Gröfsensysteme von der Form*** $(\sum_1^p \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\nu)})$ ***congruent, wenn es nicht einem Gröfsensysteme von der Form*** $(-\sum_1^{p-2} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-2} \alpha_p^{(\nu)})$ ***congruent ist, und unendlich vielen, wenn dieses statt findet.***

Da $\vartheta(u_1 - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \ldots, u_p - \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}) = \vartheta(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)} - u_1, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)} - u_p)$, so ist ϑ eine ganz ähnliche Function wie von $(s, \mathfrak{z})$ auch von jedem der p Gröfsenpaare (σ_μ, ζ_μ). Diese Function von (σ_μ, ζ_μ) wird $= 0$ für das Werthenpaar $(s, \mathfrak{z})$ und für die den übrigen $p-1$ Gröfsenpaaren (σ, ζ) durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpften $p-1$ Punkte. Denn bezeichnet man den Werth von u_π in diesen Punkten mit $\beta_\pi^{(1)}, \beta_\pi^{(2)}, \ldots, \beta_\pi^{p-1}$, so ist

$$(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}) \equiv (\alpha_1^{(\mu)} - \sum_1^{p-1} \beta_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_p^{(\mu)} - \sum_1^{p-1} \beta_p^{(\nu)})$$

und folglich $\vartheta = 0$, wenn η_μ mit einem dieser Punkte oder mit dem Punkte $(s, \mathfrak{z})$ zusammenfällt.

25.

Aus den bisher entwickelten Eigenschaften der Function ϑ ergiebt sich der Ausdruck von $\log\vartheta$ durch Integrale algebraischer Functionen von $(s, \mathfrak{z})$, $(\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_p, \zeta_p)$.

Die Gröfse $\log\vartheta(u_1^{(2)} - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \ldots) - \log\vartheta(u_1^{(1)} - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \ldots)$ ist, als Function von (σ_μ, ζ_μ) betrachtet, eine Function von der Lage des Punkts η_μ, welche im Punkte ε_1, wie $-\log(\zeta_\mu - \mathfrak{z}_1)$, im Punkte ε_2, wie $\log(\zeta_\mu - \mathfrak{z}_2)$ unstetig wird und auf der positiven Seite einer von ε_1 nach ε_2 zu ziehenden Linie um $2\pi i$, auf der positiven Seite der Linie b_ν um $2(u_\nu^{(1)} - u_\nu^{(2)})$ gröfser ist, als auf der negativen, aufser den Linien b und der Verbindungslinie von ε_1 und ε_2 aber allenthalben stetig bleibt. Bezeichnet nun $\pi^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ irgend eine Function von (σ_μ, ζ_μ), welche aufser den Linien b ebenso unstetig ist und auf der einen Seite einer solchen Linie ebenfalls um eine Constante gröfser ist, als auf der andern, so unterscheidet sie sich (§. 3) von dieser nur um eine von (σ_μ, ζ_μ) unabhängige Gröfse, und folglich ist sie von $\sum_1^p \pi^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ nur um eine von sämmtlichen Gröfsen (σ, ζ) unabhängige und also blofs von $(s_1, \mathfrak{z}_1)$ und $(s_2, \mathfrak{z}_2)$ abhangende Gröfse verschieden. $\pi^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ drückt den Werth einer Function $\pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ des §. 4 für $(s, \mathfrak{z}) = (\sigma_\mu, \zeta_\mu)$ aus, deren Periodicitätsmoduln an den Schnitten a gleich 0 sind. Aendert man diese Function

um die Constante c, so ändert sich $\sum_1^p \pi^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ um pc; man kann daher, wie für die Folge geschehen soll, die additive Constante in der Function $\pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ oder den Anfangswerth in dem sie darstellenden Integrale dritter Gattung so bestimmen, dafs $\log\vartheta^{(2)} - \log\vartheta^{(1)} = \sum_1^p \pi^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Da ϑ von jedem der Gröfsenpaare (σ, ζ) auf ähnliche Art, wie von (s, z) abhängt, so kann die Aenderung von $\log\vartheta$, wenn irgend eins der Gröfsenpaare (s, z), (σ_1, ζ_1), ..., (σ_p, ζ_p) eine endliche Aenderung erleidet, während die übrigen constant bleiben, durch eine Summe von Functionen π ausgedrückt werden. Offenbar kann man also, indem man nach und nach die einzelnen Gröfsenpaare (s, z), (σ_1, ζ_1), ..., (σ_p, ζ_p) ändert, $\log\vartheta$ ausdrücken durch eine Summe von Functionen π und $\log\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ oder dem Werth von $\log\vartheta$ für ein beliebiges anderes Werthensystem. Die Bestimmung von $\log\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ als Function der $3p-3$ Moduln des Systems rationaler Functionen von s und z (§. 12) erfordert ähnliche Betrachtungen, wie sie von *Jacobi* in seinen Arbeiten über elliptische Functionen zur Bestimmung von $\Theta(0)$ angewandt worden sind. Man kann dazu gelangen, indem man mit Hülfe der Gleichungen

$$4\frac{\partial\vartheta}{\partial a_{\mu,\mu}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial v_\mu^2} \quad \text{und} \quad 2\frac{\partial\vartheta}{\partial a_{\mu,\mu'}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial v_\mu \partial v_{\mu'}},$$

wenn μ von μ' verschieden ist, die Differentialquotienten von $\log\vartheta$ nach den Gröfsen a in

$$d\log\vartheta = \Sigma \frac{\partial\log\vartheta}{\partial a_{\mu,\mu'}} da_{\mu,\mu'}$$

durch Integrale algebraischer Functionen ausdrückt. Für die Ausführung dieser Rechnung scheint jedoch eine ausführlichere Theorie der Functionen, welche einer linearen Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten genügen, nöthig, die ich nach den hier angewandten Principien nächstens zu liefern beabsichtige.

Ist (s_2, z_2) unendlich wenig von (s_1, z_1) verschieden, so geht $\pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ über in $\partial z_1 t(\varepsilon_1)$, worin $t(\varepsilon_1)$ ein Integral zweiter Gattung einer rationalen Function von s und z ist, welches in ε_1 wie $\frac{1}{z-z_1}$ unstetig wird und an den Schnitten a den Periodicitätsmodul 0 hat; und es ergiebt sich, dafs der Periodicitätsmodul eines solchen Integrals an dem Schnitte b_ν gleich $2\frac{\partial u_\nu^{(1)}}{\partial z_1}$ ist und die Integrationsconstante sich so bestimmen läfst, dafs die Summe der

Werthe von $t(\varepsilon_1)$ für die p Werthenpaare $(\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_p, \zeta_p)$ gleich $\frac{\partial \log \vartheta^{(1)}}{\partial z_1}$ wird. Es ist dann $\frac{\partial \log \vartheta^{(1)}}{\partial \zeta_\mu}$ gleich der Summe der Werthe von $t(\eta_\mu)$ für die den $p-1$ von (σ_μ, ζ_μ) verschiedenen Gröfsenpaaren (σ, ζ) durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpften $p-1$ Werthenpaare und für das Werthenpaar (s, z), und man erhält für

$$\frac{\partial \log \vartheta^{(1)}}{\partial z_1} \partial z_1 + \sum_1^p \frac{\partial \log \vartheta^{(1)}}{\partial \zeta_\mu} d\zeta_\mu = d \log \vartheta^{(1)},$$

einen Ausdruck, welchen ***Weierstrafs*** für den Fall, wenn s nur eine zweiwerthige Function von z ist, gegeben hat (d. J. Bd. 47 S. 300 Form. 35).

Die Eigenschaften von $\pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ und $t(\varepsilon_1)$ als Functionen von (s_1, z_1) und (s_2, z_2) ergeben sich aus den Gleichungen

$$\pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{p} (\log \vartheta(u_1^{(2)} - pu_1, \ldots) - \log \vartheta(u_1^{(1)} - pu_1, \ldots))$$

und

$$t(\varepsilon_1) = \frac{1}{p} \frac{\partial \log \vartheta(u_1^{(1)} - pu_1, \ldots)}{\partial z_1},$$

welche in den obigen Ausdrücken für $\log \vartheta^{(2)} - \log \vartheta^{(1)}$ und $\frac{\partial \log \vartheta^{(1)}}{\partial z_1}$ als specielle Fälle enthalten sind.

26.

Es soll jetzt die Aufgabe behandelt werden, algebraische Functionen von z als Quotienten zweier Producte von gleichvielen Functionen $\vartheta(u_1 - e_1, \ldots)$ und Potenzen der Gröfsen e^u darzustellen.

Ein solcher Ausdruck erlangt bei den Uebergängen von (s, z) über die Querschnitte constante Factoren, und diese müssen Wurzeln der Einheit sein, wenn er algebraisch von z abhangen und also bei steliger Fortsetzung für dasselbe z nur eine endliche Anzahl von Werthen annehmen soll. Sind alle diese Factoren μte Wurzeln der Einheit, so ist die μte Potenz des Ausdrucks eine einwerthige und folglich rationale Function von s und z.

Umgekehrt läfst sich leicht zeigen, dafs jede algebraische Function r von z, die innerhalb der ganzen Fläche T' stetig fortgesetzt, allenthalben nur ***einen*** bestimmten Werth annimmt und beim Ueberschreiten eines Querschnitts einen constanten Factor erlangt, sich auf mannigfaltige Art als Quotient zweier Producte von ϑ-Functionen und Potenzen der Göfsen e^u ausdrücken läfst. Man bezeichne einen Werth von u_μ für $r = \infty$ durch β_μ und für $r = 0$ durch γ_μ und nehme $\log r$, indem man von jedem Punkte, wo r unendlich von

der ersten Ordnung wird, nach je einem Punkte, wo r unendlich klein von der ersten Ordnung wird, eine Linie durch das Innere von T' zieht, aufser diesen Linien in T' allenthalben stetig an. Ist dann $\log r$ auf der positiven Seite der Linie a_ν um $g_\nu 2\pi i$ und auf der positiven Seite der Linie b_ν um $-h_\nu 2\pi i$ gröfser, als auf der negativen, so ergiebt sich durch die Betrachtung des Begrenzungsintegrals $\int \log r \, du_\mu$

$$\Sigma\gamma_\mu - \Sigma\beta_\mu = g_\mu \pi i + \sum_\nu h_\nu a_{\mu,\nu}$$

für $\mu = 1, 2, \ldots, p$, worin g_ν und h_ν nach dem oben Bemerkten rationale Zahlen sein müssen und die Summen auf der linken Seite der Gleichung über sämmtliche Punkte, wo r unendlich klein oder unendlich grofs von der ersten Ordnung wird, auszudehnen sind, indem man einen Punkt, wo r unendlich klein oder unendlich grofs von einer höheren Ordnung wird, als aus mehreren solchen Punkten bestehend betrachtet (§. 2). Wenn diese Punkte bis auf p gegeben sind, so lassen sich diese p immer und allgemein zu reden nur auf eine Weise so bestimmen, dafs die $2p$ Factoren $e^{g_\nu 2\pi i}$, $e^{-h_\nu 2\pi i}$ gegebene Werthe annehmen (§§. 15, 24).

Wenn man nun in dem Ausdrucke

$$\frac{P}{Q} e^{-2\Sigma h_\nu u_\nu},$$

worin P und Q Producte von gleichvielen Functionen $\vartheta(u_1 - \Sigma a_1^{(\nu)}, \ldots)$ mit demselben (s, z) und verschiedenen (σ, ζ) sind, die Werthenpaare von s und z, für welche r unendlich wird, für Gröfsenpaare (σ, ζ) in den ϑ-Functionen des Nenners und die Werthenpaare, für welche r verschwindet, für Gröfsenpaare (σ, ζ) in den ϑ-Functionen des Zählers substituirt und die übrigen Gröfsenpaare (σ, ζ) im Nenner und im Zähler gleich annimmt, so stimmt der Logarithme dieses Ausdrucks in Bezug auf die Unstetigkeiten im Innern von T' mit $\log r$ überein und ändert sich beim Ueberschreiten der Linien a und b, wie $\log r$, nur um rein imaginäre längs diesen Linien constante Gröfsen; er unterscheidet sich also von $\log r$ nach dem *Dirichlet*'schen Princip nur um eine Constante und der Ausdruck selbst von r nur durch einen constanten Factor. Bei dieser Substitution darf selbstredend keine der ϑ-Functionen identisch, für jeden Werth von z, verschwinden. Dieses würde geschehen (§. 23), wenn sämmtliche Werthenpaare, für welche eine einwerthige Function von (s, z) verschwindet, für Gröfsenpaare (σ, ζ) in einer und derselben ϑ-Function substituirt würden.

27.

Als Quotient *zweier* ϑ-Functionen, multiplicirt mit Potenzen der Gröfsen e^{u}, läfst sich demnach eine einwerthige oder rationale Function von (s, z) nicht darstellen. Alle Functionen r aber, die für dasselbe Werthenpaar von s und z mehrere Werthe annehmen und nur für p oder weniger Werthenpaare unendlich von der ersten Ordnung werden, sind in dieser Form darstellbar und umfassen alle in dieser Form darstellbaren algebraischen Functionen von z. Man erhält, abgesehen von einem constanten Factor, jede und jede nur einmal, wenn man in

$$\frac{\vartheta(v_1 - g_1\pi i - \sum_\nu h_\nu a_{1,\nu}, \ldots)}{\vartheta(v_1, \ldots, v_p)} e^{-2\sum_\nu v_\nu h_\nu}$$

für h_ν und g_ν rationale ächte Brüche und $u_\nu - \sum_1^p \alpha_\nu^{(\mu)}$ für v_ν setzt.

Diese Gröfse ist zugleich eine algebraische Function von jeder der Gröfsen ζ und die (im vor. §.) entwickelten Principien reichen völlig hin, um sie durch die Gröfsen z, $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ algebraisch auszudrücken.

In der That: Als Function von (s, z) nimmt sie, durch die ganze Fläche T' stetig fortgesetzt, allenthalben *einen* bestimmten Werth an, wird unendlich von der ersten Ordnung für die Werthenpaare $(\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_p, \zeta_p)$ und erlangt an dem Schnitte a_ν beim Uebergange von der positiven zur negativen Seite den Factor $e^{g_\nu 2\pi i}$, an dem Schnitte b_ν den Factor $e^{-h_\nu 2\pi i}$; und jede andere dieselben Bedingungen erfüllende Function von (s, z) unterscheidet sich von ihr nur durch einen von (s, z) unabhängigen Factor. Als Function von (σ_μ, ζ_μ) nimmt sie, durch die ganze Fläche T' stetig fortgesetzt, allenthalben *einen* bestimmten Werth an, wird unendlich von der ersten Ordnung für das Werthenpaar (s, z) und für die den übrigen $p-1$ Gröfsenpaaren (σ, ζ) durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpften $p-1$ Werthenpaare $(\sigma_1^{(\mu)}, \zeta_1^{(\mu)}), \ldots, (\sigma_{p-1}^{(\mu)}, \zeta_{p-1}^{(\mu)})$ und erlangt an dem Schnitte a_ν den Factor $e^{-g_\nu 2\pi i}$, an dem Schnitte b_ν den Factor $e^{h_\nu 2\pi i}$; und jede andere dieselben Bedingungen erfüllende Function von (σ_μ, ζ_μ) unterscheidet sich von ihr nur durch einen von (σ_μ, ζ_μ) unabhängigen Factor. Bestimmt man also eine algebraische Function von z, $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$

$$f((s, z); (\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_p, \zeta_p))$$

so, dafs sie als Function von jeder dieser Gröfsen dieselben Eigenschaften besitzt, so unterscheidet sie sich von dieser nur durch einen von sämmtlichen

Gröfsen $z, \zeta_1, \ldots, \zeta_p$ unabhängigen Factor und wird also $= Af$, wenn A diesen Factor bezeichnet. Um diesen Factor zu bestimmen, drücke man in f die von (σ_μ, ζ_μ) verschiedenen Gröfsenpaare (σ, ζ) durch $(\sigma_1^{(\mu)}, \zeta_1^{(\mu)}), \ldots, (\sigma_{p-1}^{(\mu)}, \zeta_{p-1}^{(\mu)})$ aus, wodurch er in

$$g((\sigma_\mu, \zeta_\mu); (s, z), (\sigma_1^{(\mu)}, \zeta_1^{(\mu)}), \ldots, (\sigma_{p-1}^{(\mu)}, \zeta_{p-1}^{(\mu)}))$$

übergehe; offenbar erhält man dann den inversen Werth der darzustellenden Function und also einen Ausdruck, welcher $= \frac{1}{Af}$ sein mufs, wenn man in Ag für (σ_μ, ζ_μ) das Gröfsenpaar (s, z) und für die Gröfsenpaare (s, z), $(\sigma_1^{(\mu)}, \zeta_1^{(\mu)}), \ldots, (\sigma_{p-1}^{(\mu)}, \zeta_{p-1}^{(\mu)})$ die Werthenpaare von (s, z) substituirt, für welche die darzustellende Function und also $f = 0$ wird. Hieraus ergiebt sich A^2 und also A bis auf das Vorzeichen, welches durch directe Betrachtung der ϑ-Reihen in dem darzustellenden Ausdrucke gefunden werden kann.

Göttingen, 1857.

15.

Deuxième note sur une formule pour la réversion des séries.

(Pour faire suite à la note t. LII, p. 276.)

(Par M. *Cayley*.)

Je me propose de montrer, dans cette deuxième note, de quelle manière le théorème de *Jacobi* conduit à une formule donnée sans démonstration par M. *Sylvester* dans son mémoire intitulé „on the change of systems of independent variables" Quarterly Math. Journal t. I, pag. 42 à 56 et 126 à 134. Pour fixer les idées je prends le cas de trois variables, et je suppose que $f(x, y, z)$ soit une fonction rationnelle et entière de x, y, z, et que ces variables soient données en fonction de u, v, w au moyen des équations $u = X$, $v = Y$, $w = Z$, où X, Y, Z sont des fonctions rationnelles et entières de x, y, z. Mais ces fonctions ne sont plus assujéties à la condition (admise dans ma première note) d'être telles que $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ ne contiennent que les puissances et les produits du deuxième ordre et des ordres supérieurs des variables, et il s'agit de déterminer dans le cas général le développement de $f(x, y, z)$ en termes de u, v, w.

Pour résoudre ce problème j'écris

$$\begin{aligned}
X &= A_{100}\,x + A_{010}\,y + A_{001}\,z + \cdots + A_{f,g,h,}\,x^f y^g z^h + \text{etc.}\\
Y &= B_{100}\,x + B_{010}\,y + B_{001}\,z + \cdots + B_{i,j,k}\,x^i y^j z^k + \text{etc.}\\
Z &= C_{100}\,x + C_{010}\,y + C_{001}\,z + \cdots + C_{l,m,n}\,x^l y^m z^n + \text{etc.}\\
f(x, y, z) &= \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad \Theta_{P,Q,R}\,x^P y^Q z^R + \text{etc.};
\end{aligned}$$

dans ces expressions et partout dans la suite les etc. représentent des termes qu'on obtient en donnant des accents en nombre quelconque aux symboles indéterminés. Je dois faire observer relativement au coefficient $A_{f,g,h}$ et aux coefficients semblables, que les termes qui correspondent à $f + g + h = 1$ sont écrits à part; on doit donc prendre pour les nombres f, g, h seulement les valeurs qui rendent $f + g + h > 1$.

Je pose

$$\begin{aligned}
x' &= A_{100}\,x + A_{010}\,y + A_{001}\,z\\
y' &= B_{100}\,x + B_{010}\,y + B_{001}\,z\\
z' &= C_{100}\,x + C_{010}\,y + C_{001}\,z
\end{aligned}$$

et en représentant par

$$\begin{vmatrix} a_{100} & b_{100} & c_{100} \\ a_{010} & b_{010} & c_{010} \\ a_{001} & b_{001} & c_{001} \end{vmatrix}$$

la *matrice inverse* de

$$\begin{vmatrix} A_{100} & A_{010} & A_{001} \\ B_{100} & B_{010} & B_{001} \\ C_{100} & C_{010} & C_{001} \end{vmatrix}$$

on obtient les équations

$$\begin{aligned} x &= a_{100}x' + b_{100}y' + c_{100}z' \\ y &= a_{010}x' + b_{010}y' + c_{010}z' \\ z &= a_{001}x' + b_{001}y' + c_{001}z'. \end{aligned}$$

Il est presque superflu de faire observer qu'en représentant par ∇ le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_{100} & A_{010} & A_{001} \\ B_{100} & B_{010} & B_{001} \\ C_{100} & C_{010} & C_{001} \end{vmatrix}$$

on a

$$a_{100} = \frac{1}{\nabla}\frac{d\nabla}{dA_{100}}, \qquad a_{010} = \frac{1}{\nabla}\frac{d\nabla}{dA_{010}} \text{ etc.}$$

A présent, en supposant chacune des quantités u', v', w' égale à zéro, on a le système d'équations

$$\begin{aligned} u - X &= 0, & v - Y &= 0, & w - Z &= 0 \\ u' - X' &= 0, & v' - Y' &= 0, & w' - Z' &= 0 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} X &= x' \cdots + A_{f,g,h}x^f y^g z^h + \text{etc.} \\ Y &= y' \cdots + B_{i,j,k}x^i y^j z^k + \text{etc.} \\ Z &= z' \cdots + C_{l,m,n}x^l y^m z^n + \text{etc.} \\ X' &= x - a_{100}x' - b_{100}y' - c_{100}z' \\ Y' &= y - a_{010}x' - b_{010}y' - c_{010}z' \\ Z' &= z - a_{001}x' - b_{001}y' - c_{001}z' \end{aligned}$$

et comme auparavant

$$f(x, y, z) = \cdots + \Theta_{P,Q,R}x^P y^Q z^R + \text{etc.}$$

Or, en appliquant à ce nouveau système la formule de *Jacobi*, et en remarquant qu'il est permis de poser tout de suite $u' = 0$, $v' = 0$, $w' = 0$, cette

formule donne

$$f(x, y, z) =$$

$$\left[f(x, y, z)\frac{\partial(X, Y, Z, X', Y', Z')}{\partial(x, y, z, x', y', z')}\frac{1}{(X-u)(Y-v)(Z-w)X'Y'Z'}\right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}x'^{-1}y'^{-1}z'^{-1}}$$

équation dans laquelle on doit d'abord développer le dernier facteur de l'expression renfermée entre crochets suivant les puissances ascendantes de u, v, w, et ensuite développer les puissances de X, Y, Z, X', Y', Z' suivant les puissances descendantes de x', y', z', x, y, z respectivement. On obtient ainsi

$$\text{coeff. de } u^a v^b w^c \text{ dans le développement de } f(x, y, z)$$

$$= \left[f(x, y, z)\frac{\partial(X, Y, Z, X', Y', Z')}{\partial(x, y, z, x', y', z')}\frac{1}{X^{a+1}Y^{b+1}Z^{c+1}X'Y'Z'}\right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}x'^{-1}y'^{-1}z'^{-1}}$$

ou ce qui est la même chose

$$\text{coeff. de } u^a v^b w^c \text{ dans le développement de } f(x, y, z) =$$

$$\left[f(x, y, z)\frac{\partial\left(-\frac{1}{a}X^{-a}, -\frac{1}{b}Y^{-b}, -\frac{1}{c}Z^{-c}, \log X', \log Y', \log Z'\right)}{\partial(x, y, z, x', y', z')}\right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}x'^{-1}y'^{-1}z'^{-1}}$$

Or, en posant $\Pi a = 1.2.3\ldots a$ etc., le terme général de $-\frac{1}{a}X^{-a}$ est

$$(-1)^{r-1}\frac{\Pi(a+r-1)}{\Pi a\,\Pi\alpha \text{ etc.}}A^{\alpha}_{f,g,h} \text{ etc. } x'^{-a-r}x^F y^G z^H$$

où

$$\alpha + \text{etc.} = r, \quad f\alpha + \text{etc.} = F, \quad g\alpha + \text{etc.} = G, \quad h\alpha + \text{etc.} = H,$$

de même le terme général de $-\frac{1}{b}Y^{-b}$ est

$$(-1)^{s-1}\frac{\Pi(b+s-1)}{\Pi b\,\Pi\beta \text{ etc.}}B^{\beta}_{i,j,k} \text{ etc. } y'^{-b-s}x^I y^J z^K$$

où

$$\beta + \text{etc.} = s, \quad i\beta + \text{etc.} = I, \quad j\beta + \text{etc.} = J, \quad k\beta + \text{etc.} = K$$

et le terme général de $-\frac{1}{c}Z^{-c}$ est

$$(-1)^{t-1}\frac{\Pi(c+t-1)}{\Pi c\,\Pi\gamma \text{ etc.}}C^{\gamma}_{l,m,n} \text{ etc. } z'^{-c-t}x^L y^M z^N$$

où

$$\gamma + \text{etc.} = t, \quad l\gamma + \text{etc.} = L, \quad m\gamma + \text{etc.} = M, \quad n\gamma + \text{etc.} = N.$$

Le terme général du développement de $\log X'$ est

$$-\frac{\Pi(r'-1)}{\Pi\alpha'\,\Pi\delta'\,\Pi\iota'}a^{\alpha'}_{100}b^{\delta'}_{100}c^{\iota'}_{100}x^{-r'}x'^{\alpha'}y'^{\delta'}z'^{\iota'}$$

où $$r' = \alpha' + \delta' + \iota',$$

et je fais observer que pour tenir compte du terme $\log x$ que contient $\log X'$, il suffit d'attribuer à α', δ', ι', r' les valeurs $\alpha' = \delta' = \iota' = r' = 0$. En effet on n'a besoin que des coefficients différentiels de $\log X'$, et, en gardant pour le moment r' au lieu de zéro, le terme dont il s'agit sera $-\Pi(r'-1)x^{-r'}$, ce qui différentié par rapport à x donne $\Pi r' x^{-r'-1}$. En faisant $r' = 0$ cela devient $\frac{1}{x}$, ce qui est en effet la valeur du coefficient différentiel de $\log x$ par rapport à x.

De même le terme général de $\log Y'$ est

$$-\frac{\Pi(s'-1)}{\Pi\beta'\,\Pi\varepsilon'\,\Pi\varkappa'} a_{010}^{\beta'} b_{010}^{\varepsilon'} c_{010}^{\varkappa'} y^{-s'} x'^{\beta'} y'^{\varepsilon'} z'^{\varkappa'}$$

où

$$s' = \beta' + \varepsilon' + \varkappa',$$

et le terme général de $\log Z'$ est

$$-\frac{\Pi(t'-1)}{\Pi\gamma'\,\Pi\zeta'\,\Pi\lambda'} a_{001}^{\gamma'} b_{001}^{\zeta'} c_{001}^{\lambda'} z^{-t'} x'^{\gamma'} y'^{\zeta'} z'^{\lambda'}$$

où

$$t' = \gamma' + \zeta' + \lambda'.$$

Donc, en formant le terme général du ***Jacobien*** et en multipliant par le terme général de $f(x, y, z)$, on obtient pour le terme général de l'expression placée entre crochets la valeur suivante

$$(-1)^{r+s+t} \frac{\Pi(\mathrm{a}+r-1)\,\Pi(\mathrm{b}+s-1)\,\Pi(\mathrm{c}+t-1)}{\Pi\mathrm{a}\,\Pi\mathrm{b}\,\Pi\mathrm{c}\,\Pi\alpha\,\mathrm{etc.}\,\Pi\beta\,\mathrm{etc.}\,\Pi\gamma\,\mathrm{etc.}} \frac{\Pi(r'-1)\,\Pi(s'-1)\,\Pi(t'-1)}{\Pi\alpha'\,\Pi\delta'\,\Pi\iota'\,\Pi\beta'\,\Pi\varepsilon'\,\Pi\varkappa'\,\Pi\gamma'\,\Pi\zeta'\,\Pi\lambda'}$$

$$\times A_{f,g,h}^{\alpha}\,\mathrm{etc.}\; B_{i,j,k}^{\beta}\,\mathrm{etc.}\; C_{l,m,n}^{\gamma}\,\mathrm{etc.}\; a_{100}^{\alpha'} b_{100}^{\delta'} c_{100}^{\iota'} a_{010}^{\beta'} b_{010}^{\varepsilon'} c_{010}^{\varkappa'} a_{001}^{\gamma'} b_{001}^{\zeta'} c_{001}^{\lambda'}$$

$$\times \Omega$$

$$\times x^{F+I+L+P-r'-1} y^{G+J+M+Q-s'-1} z^{H+K+N+R-t'-1} x'^{-\mathrm{a}-r+\alpha'+\beta'+\gamma'-1} y'^{-\mathrm{b}-s+\delta'+\varepsilon'+\zeta'-1}$$

$$\times z'^{-\mathrm{c}-t+\iota'+\varkappa'+\lambda'-1}$$

où le facteur Ω représente le déterminant numérique suivant

$$\Omega = \begin{vmatrix} F & G & H & -\mathrm{a}-r & 0 & 0 \\ I & J & K & 0 & -\mathrm{b}-s & 0 \\ L & M & N & 0 & 0 & -\mathrm{c}-t \\ -r' & 0 & 0 & \alpha' & \delta' & \iota' \\ 0 & -s' & 0 & \beta' & \varepsilon' & \varkappa' \\ 0 & 0 & -t' & \gamma' & \zeta' & \lambda' \end{vmatrix}$$

Pour trouver le terme qui contient $x^{-1}y^{-1}z^{-1}x'^{-1}y'^{-1}z'^{-1}$ on n'a qu'à poser

$$F+I+L+P-r'=0, \quad G+J+M+Q-s'=0, \quad H+K+N+R-t'=0$$
$$-\mathrm{a}-r+\alpha'+\beta'+\gamma'=0, \quad -\mathrm{b}-s+\delta'+\varepsilon'+\zeta'=0, \quad -\mathrm{c}-t+\iota'+\varkappa'+\lambda'=0.$$

En faisant cela, et en tenant compte des formules précédentes on obtient le théorème suivant: savoir en posant

$$\begin{aligned} X &= A_{100}x + A_{010}y + A_{001}z \cdots + A_{f,g,h}x^f y^g z^h + \text{etc.} = u \\ Y &= B_{100}x + B_{010}y + B_{001}z \cdots + B_{i,j,k}x^i y^j z^k + \text{etc.} = v \\ Z &= C_{100}x + C_{010}y + C_{001}z \cdots + C_{l,m,n}x^l y^m z^n + \text{etc.} = w \\ f(x,y,z) &= \cdots + \Theta^{P,Q,R}x^P y^Q z^R + \text{etc.} \end{aligned}$$

on trouve pour le terme général du coeff. de $u^{\mathrm{a}}v^{\mathrm{b}}w^{\mathrm{c}}$ dans le développement de $f(x,y,z)$ l'expression

$$(-1)^{r+s+t}\frac{\Pi(\mathrm{a}+r-1)\,\Pi(\mathrm{b}+s-1)\,\Pi(\mathrm{c}+t-1)}{\Pi\mathrm{a}\,\Pi\mathrm{b}\,\Pi\mathrm{c}\,\Pi\alpha\,\text{etc.}\,\Pi\beta\,\text{etc.}\,\Pi\gamma\,\text{etc.}}\,\frac{\Pi(r'-1)}{\Pi\alpha'\,\Pi\delta'\,\Pi\iota'}\,\frac{\Pi(s'-1)}{\Pi\beta'\,\Pi\varepsilon'\,\Pi\varkappa'}\,\frac{\Pi(t'-1)}{\Pi\gamma'\,\Pi\zeta'\,\Pi\lambda'}$$
$$\times A^{\alpha}_{f,g,h}\,\text{etc.}\,B^{\beta}_{i,j,k}\,\text{etc.}\,C^{\gamma}_{l,m,n}\,\text{etc.}\,a^{\alpha'}_{100}\,b^{\delta'}_{100}\,c^{\iota'}_{100}\,a^{\beta'}_{010}\,b^{\varepsilon'}_{010}\,c^{\varkappa'}_{010}\,a^{\gamma'}_{001}\,b^{\zeta'}_{001}\,c^{\lambda'}_{001}$$
$$\times \Omega,$$

formule dans laquelle les a_{100} etc. sont les coefficients inverses des A_{100} etc. c'est à dire

$$\begin{vmatrix} a_{100} & b_{100} & c_{100} \\ a_{010} & b_{010} & c_{010} \\ a_{001} & b_{001} & c_{001} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{100} & A_{010} & A_{001} \\ B_{100} & B_{010} & B_{001} \\ C_{100} & C_{010} & C_{001} \end{vmatrix}^{-1};$$

le déterminant numérique Ω a la valeur qui vient d'être donnée, en supposant seulement que les nombres α, β etc. qui y entrent, satisfassent aux conditions suivantes

$$\begin{aligned} \alpha+\text{etc.} &= r, & \beta+\text{etc.} &= s, & \gamma+\text{etc.} &= t, \\ f\alpha+\text{etc.} &= F, & g\alpha+\text{etc.} &= G, & h\alpha+\text{etc.} &= H, \\ i\beta+\text{etc.} &= I, & j\beta+\text{etc.} &= J, & k\beta+\text{etc.} &= K, \\ l\gamma+\text{etc.} &= L, & m\gamma+\text{etc.} &= M, & n\gamma+\text{etc.} &= N, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \alpha'+\delta'+\iota' &= r', \\ \beta'+\varepsilon'+\varkappa' &= s', \\ \gamma'+\zeta'+\lambda' &= t', \end{aligned}$$

$$P+F+I+L=r', \quad Q+G+J+M=s', \quad R+H+K+N=t',$$
$$\alpha'+\beta'+\gamma'=\mathrm{a}+r, \quad \delta'+\varepsilon'+\zeta'=\mathrm{b}+s, \quad \iota'+\varkappa'+\lambda'=\mathrm{c}+t.$$

De ces équations on tire

$$P+Q+R+F+G+H+I+J+K+L+M+N=\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+r+s+t,$$

ou, en substituant pour F etc. leurs valeurs,

$$(f+g+h-1)\alpha+\text{etc.}+(i+j+k-1)\beta+\text{etc.}+(l+m+n-1)\gamma+\text{etc.}$$
$$=\text{a}+\text{b}+\text{c}-P-Q-R,$$

les nombres $f+g+h-1$, $i+j+k-1$, $l+m+n-1$ etc. étant positifs. Il n'y a donc qu'un nombre fini de solutions des équations indéterminées, comme cela doit être.

On peut encore modifier un peu la forme du déterminant Ω; on voit d'abord que l'on peut changer les signes des quantités $-\text{a}-r$, $-\text{b}-s$, $-\text{c}-t$, $-r'$, $-s'$, $-t'$: en faisant cela et en substituant pour ces quantités et aussi pour F, G etc. les valeurs ci-dessus données, on obtient

$$\Omega=\begin{vmatrix} f\alpha+\text{etc.} & g\alpha+\text{etc.} & h\alpha+\text{etc.} & \alpha'+\beta'+\gamma' & 0 & 0 \\ i\beta+\text{etc.} & j\beta+\text{etc.} & k\beta+\text{etc.} & 0 & \delta'+\varepsilon'+\zeta' & 0 \\ l\gamma+\text{etc.} & m\gamma+\text{etc.} & n\gamma+\text{etc.} & 0 & 0 & \iota'+\varkappa'+\lambda' \\ \alpha'+\delta''+\iota' & 0 & 0 & \alpha' & \delta' & \iota' \\ 0 & \beta'+\varepsilon'+\varkappa' & 0 & \beta' & \varepsilon' & \varkappa' \\ 0 & 0 & \gamma'+\zeta'+\lambda' & \gamma' & \zeta' & \lambda' \end{vmatrix}$$

Ainsi se trouve démontré le théorème général de M. ***Sylvester*** relatif à la réversion des séries, car il est évident que les formules s'appliquent sans difficulté à un nombre quelconque de variables.

Londres, le 30 septembre 1856.

16.

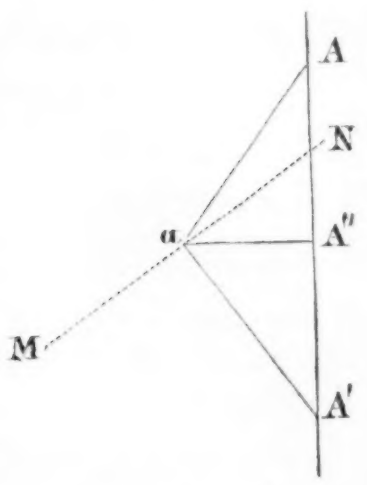
Über eine Reihe von Sätzen, die Durchschnitte von Cylindern und Kegeln durch Kugeln betreffend.

(Von Herrn *R. Baltzer* zu Dresden.)

In *Möbius'* Abhandlung über die Kreisverwandtschaft der Figuren findet man bemerkt, dafs wenn von den zwei Schnitten eines Kegels mit einer Kugel der eine ein Kreis ist, der andre auch ein Kreis sein müsse, und dafs zwei nicht parallele Kreise auf einer Kugel liegen, wenn sie auf einem Kegel liegen, und umgekehrt. Von diesen fundamentalen und einigen andern damit in Verbindung stehenden Sätzen will ich einfache Beweise mittheilen, um die elementare Natur und den Zusammenhang derselben näher zu beleuchten.

1. Wenn der Durchschnitt von zwei Ebenen, welche ein Prisma schneiden, zu den Kanten des Prisma normal ist, und die Ebenen mit einem Normalschnitte des Prisma entgegengesetzt gleiche Winkel bilden, so sind die Prismenschnitte gleich und ähnlich.

Fig. 1



Beweis: Ist MN (Fig. 1) normal zu den Kanten des Prisma, und legt man durch MN sowohl die Normalebene zu den Kanten, welche dieselben in A'', B'', C'', .. schneidet, als auch zwei andre Ebenen, welche mit der Normalebene MNA'' entgegengesetzt gleiche Winkel bilden und die Kanten des Prisma in A, B, C, .. und in A', B', C', .. schneiden, so ist $ABC..\cong A'B'C'...$ Denn auf jedem Normalschnitt des Flächenwinkels $A(MN)A'$ z. B. $AA'a$ hat man $aA''A \cong aA''A'$, so dafs A und A' symmetrisch zu der Ebene MNA'' liegen, u. s. w.

Die Kreisschnitte eines schiefen Cylinders kommen im Alterthum vor, z. B. bei *Serenus*, dessen Schrift über den Cylinder als Anhang zu Apollonius' Conica von Halley herausgegeben worden ist. Der zweite Kreis heifst nach dem Vorgange von *Apollonius* (Con. I, 5) *τομὴ ὑπεναντία*, *sectio subcontraria*, *Wechselschnitt*, auch *antiparalleler Schnitt* des Kreiscylinders,

obwohl *Leibnitz* ursprünglich zwei Gerade antiparallel genannt hatte, wenn sie mit einer dritten complementäre (nicht supplementäre) Winkel bilden (Acta Erudit. 1691 p. 279). Der obige allgemeinere Satz ist in *Brettschneiders* Geometrie §. 467 anzutreffen.

2. Wenn zwei nicht parallele Prismenschnitte gleich und ähnlich sind, so schneiden sie sich auf einem Normalschnitte des Prisma und bilden mit demselben entgegengesetzt gleiche Winkel.

Beweis: Ist $ABC.. \cong A'B'C'..$, sind AA', BB', CC', . . parallel, sind A'', B'', C'', . . die Mitten von AA', BB', CC', . ., so sind $A''B''$, $A''C''$, . . normal zu AA', und es schneiden sich AB und $A'B'$ auf $A''B''$, AC und $A'C'$ auf $A''C''$, . . . Also liegen A'', B'', C'', . . auf einem Normalschnitte des Prisma, welcher zugleich den Durchschnitt der Ebenen ABC und $A'B'C'$ enthält, u. s. w.

3. Die Schnitte eines Prisma durch eine Kugel sind gleiche und ähnliche Figuren.

Beweis: Werden die Kanten des Prisma von der Kugel in A und A', B und B', . . geschnitten, so liegen A und A', B und B', . . symmetrisch zu der Ebene, die durch das Centrum der Kugel geht und zu den Kanten normal ist.

4. Ist von den Schnitten eines Cylinders mit einer Kugel der eine ein Kreis, so ist der andre ein gleicher Kreis (3.). Die Ebenen der Kreise sind entweder Normalschnitte des Cylinders, oder sie schneiden sich auf einem Normalschnitte des Cylinders und bilden mit demselben entgegengesetzt gleiche Winkel (2.).

Ein Büschel von Kugeln, welche einen Kreis gemein haben, wird von einem Cylinder, auf welchem der gemeinschaftliche Kreis liegt, zum zweitenmale in Kreisen geschnitten, welche parallel und dem gemeinschaftlichen Kreise gleich sind.

5. Liegen zwei gleiche aber nicht parallele Kreise k, k' auf einem Cylinder (perspectivisch), so liegen sie auch auf einer Kugel.

Beweis: Die Ebenen der Kreise schneiden sich auf einem Normalschnitte des Cylinders und bilden mit demselben entgegengesetzt gleiche Winkel (2.). Die Kugel, welche man durch den Kreis k und einen Punct des Kreises k' beschreiben kann, schneidet den Cylinder in einem Kreise k''. Die Kreise k' und k'' liegen auf dem Cylinder und haben einen Punct gemein, ihre Ebenen sind parallel (4.), also fällt k' mit k'' zusammen.

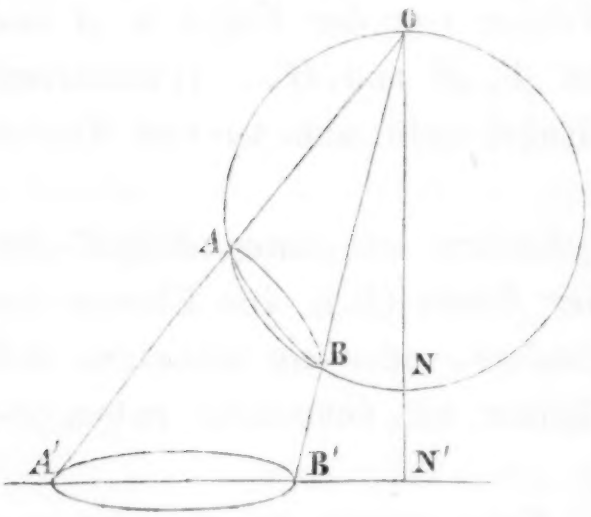
6. Liegen zwei gleiche Kreise k, k′ auf einer Kugel, so liegen sie auch auf einem Cylinder.

Beweis: Die Ebene, welche durch den Durchschnitt der Kreisebenen und durch das Centrum der Kugel geht, halbirt den Winkel der Kreisebenen. Der Cylinder, auf welchem der Kreis k liegt und dessen Kanten zu der genannten Diametralebene normal sind, wird von der Kugel in einem Kreise k'' geschnitten, der den Kreisen k und k' gleich und dem letzteren parallel ist. Also fällt k' mit k'' zusammen.

---

7. Die stereographische Projection eines Kreises ist ein Kreis (*Ptolemäus* Planisphaerium). ***Beide Kreise liegen auf einer Kugel. Das Centrum dieser Kugel, die Centren der Kreise und das Projectionscentrum liegen auf einer Ebene, zu welcher der Durchschnitt der Kreisebene normal ist.***

Fig. 2



Beweis: Wenn O (Fig. 2) das Projectionscentrum, $A, B, C, \ldots$ Puncte des Kreises k bedeuten; wenn ON Diameter der dem Kreise k und dem Punct O umschriebenen Kugel ist; wenn ferner $A', B', C', \ldots, N'$ stereographische Projectionen von $A, B, C, \ldots, N$ aus O, mithin die Centralprojectionen derselben auf eine Ebene sind, welche mit der die Kugel in O berührenden Ebene parallel ist; so sind die Dreiecke ONA und $OA'N'$, ONB und $OB'N', \ldots$ ähnlich, folglich

$$ON.ON' = OA.OA' = OB.OB' = \ldots,$$

d. h. $B', C', \ldots$ liegen auf der Kugel $ABCA'$. Die Puncte $A', B', C', \ldots$ liegen aber auch auf einer Ebene, folglich auf einem Kreise k'.

Sind K, L, M die Centren der Kreise k, k' und der Kugel $ABCA'$, so ist die Ebene KLM normal zu den Kreisebenen, also auch normal zu ihrem Durchschnitte. Auf der Ebene KLM liegt ferner das Centrum der Kugel $ABCO$, folglich auch die Normale ON zur Ebene $A'B'C'$ durch das Centrum der Kugel $ABCO$.

Schneidet die Ebene KLM den projicirenden Kegel in den Geraden OAA', OBB', so ist $OAB \sim OB'A'$; wodurch der zu KLM normale Kreisschnitt k' als *Wechselschnitt* des Kegels erscheint (*Apollonius* Conica I, 5).

8. Ist von den Schnitten eines Kegels und einer Kugel der eine ein Kreis, so ist auch der andre ein Kreis, und zwar einer von dem andern eine stereographische Projection aus dem Centrum des Kegels. (*Möbius* Kreisverw. 31. In *Liouville's* Journal Bd. 11 pag. 70 hat *Miquel* einen elementaren Beweis dieses „bekannten" Satzes gegeben).

Beweis: Wenn der Kegel und die Kugel den Kreis ABC.. gemein haben, und die Kanten des Kegels OA, OB, OC, .. von der Kugel zum zweitenmale in A', B', C', .. geschnitten werden, so ist

$$OA.OA' = OB.OB' = OC.OC' = \cdots$$

Beschreibt man die Kugel $OABC$ und legt durch den Punct A' die Ebene, welche mit der Ebene parallel ist, von der die Kugel $OABC$ in O berührt wird, so erhält man stereographische Projectionen A', B'', C'', .. der Puncte A, B, C, .. aus O. Die Puncte A', B'', C'', .. liegen auf einem Kreise (7.), so dafs

$$OA.OA' = OB.OB'' = OC.OC'' = \cdots$$

Folglich fällt B' mit B'', C' mit C'', .. zusammen, d. h. A', B', C', .. liegen auf einem Kreise.

9. Wenn ein Büschel von Kugeln, die einen Kreis gemein haben, von den Kanten einer Ecke auf dem gemeinschaftlichen Kreise in A, B, C,.., und zum zweitenmale die erste Kugel in A', B', C', .., die zweite in A'', B'', C'', .. u. s. f. geschnitten werden, so sind die Figuren A'B'C' .., A''B''C'' .., .. plan, parallel, ähnlich.

Beweis: $A'B'C'$ .., $A''B''C''$ .., .. liegen einzeln auf Kreisen, welche stereogruphische Projectionen des gemeinschaftlichen Kreises aus dem Scheitel der Ecke O sind (8.). Die Ebenen dieser Kreise sind also mit der Ebene parallel, von welcher die Kugel $OABC$ in O berührt wird.

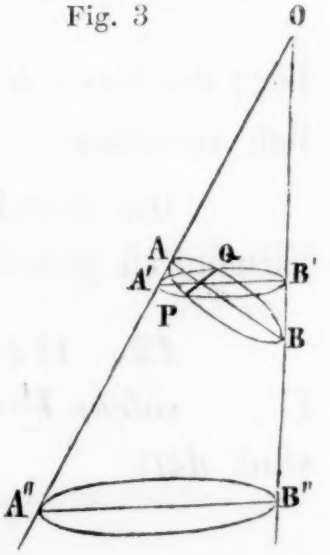
10. Liegen zwei nicht parallele Kreise auf einem Kegel (perspectivisch), so liegen sie auch auf einer Kugel (*Möbius* l. c.).

Beweis: Haben die perspectivischen Kreise ABC.., $A'B'C'$ .. eine reelle gemeinschaftliche Sehne PQ (Fig. 3), so liegen die Normalen durch die Centren zu ihren Ebenen auf der Ebene, von welcher PQ normal halbirt wird. Ist M der Durchschnitt jener Normalen, so hat man

$$MP = MA = MB = \cdot\cdot$$
$$= MA' = MB' = \cdots$$

Daher ist M das Centrum der Kugel, auf welcher die Kreise liegen.

Fig. 3



Haben die perspectivischen Kreise $ABC..$, $A''B''C''..$ keine reelle gemeinschaftliche Sehne, so ziehe man eine Sehne PQ des Kreises $ABC..$ parallel mit dem Durchschnitte der Kreisebenen, und durch PQ den Kegelschnitt $A'B'C'..$ parallel mit $A''B''C''...$ Nun ist $A'B'C'..$ ein Kreis, der mit $ABC..$ auf einer Kugel liegt, folglich hat man zugleich

$$OA.OA' = OB.OB' = OC.OC' = ..,$$
$$OA' : OB' : OC' : \cdot\cdot = OA'' : OB'' : OC'' : \cdot\cdot,$$

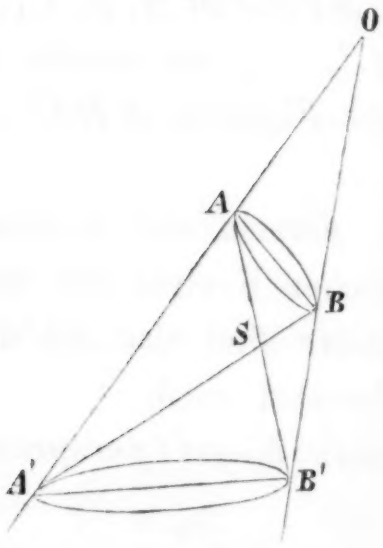
also auch

$$OA.OA'' = OB.OB'' = OC.OC'' = ..,$$

d. h. B'', C'', .. liegen auf der Kugel $ABCA''$.

11. Liegen zwei Kreise auf einer Kugel, so sind sie doppelt perspectivisch. Die Centren der Kegel, deren Schnitte die Kreise sind, liegen auf der Ebene, welche durch die Centren der Kreise und der Kugel geht, und werden von den beiden Kreisebenen harmonisch getrennt. Vergl. *Möbius* l. c.

Fig. 4



Beweis: Sind K, L, M die Centren der Kreise k, k' und der Kugel kk', so ist die Ebene KLM normal zu den Kreisebenen und schneidet den Kreis k in A und B, den Kreis k' in A' und B'. Wenn nun AA' und BB' sich in O schneiden, AB' und $A'B$ in S (Fig. 4), so sind O und S die Centren von Kegeln, auf denen die Kreise k und k' liegen. Denn der Kegel, dessen Centrum O oder S, und auf dem der Kreis k liegt, wird von der Kugel kk' in einem Kreise k'' geschnitten (8.), der durch A' und B' geht, und dessen Fbene normal zu der Ebene KMO oder KMS ist. Daher liegt der Kreis k' mit k'' auf einer Ebene und auf einer Kugel, und fällt mit ihm zusammen.

Die Strecke OS wird bekanntlich von den Geraden AB und $A'B'$ harmonisch getheilt.

12. Wenn $ABCD..$ eine beliebige Figur bedeutet, wenn A', B', C', .. solche Projectionen von A, B, C, .. aus einem beliebigen Puncte O sind, dafs

$$OA.OA' = OB.OB' = OC.OC' = \cdot\cdot,$$

so hat man

$$\frac{AB}{OA.OB} : \frac{BC}{OB.OC} : \frac{CD}{OC.OD} : \cdot\cdot = A'B' : B'C' : C'D' : \cdot\cdot\cdot$$

Vergl. *Liouville* in seinem Journ. 12 p. 265.

Beweis: Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke (7.) OAB und $OB'A'$, OBC und $OC'B'$, .. folgt

$$\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OB'}, \qquad \frac{AB}{OA.OB} = \frac{A'B'}{OB.OB'},$$

$$\frac{BC}{OB} = \frac{B'C'}{OC'}, \qquad \frac{BC}{OB.OC} = \frac{B'C'}{OC.OC'},$$

u. s. f. Nun ist $OA.OA' = OB.OB' = OC.OC' = \cdot\cdot$, folglich u. s. w.

13. Bei 4 beliebigen Puncten A, B, C, D verhalten sich die Producte der gegenüberliegenden Strecken

$$AB.CD, \quad AC.DB, \quad AD.BC$$

wie die Seiten eines Dreiecks, welches dadurch gefunden wird, dafs man 3 unter den gegebenen Puncten aus dem vierten auf eine den ersteren 3 Puncten umschriebene Kugel projicirt. Vergl. *Bretschneider* (Grunert's Archiv 2 pag. 240, Geometrie §. 616) und *Möbius* (Berichte der sächs. Ges. 1852 pag. 49, Kreisverwandtschaft 16 und 45).

Beweis: Legt man z. B. durch B, C, D eine Kugel, welche nicht durch A geht, sondern von AB, AC, AD zum zweitenmale in B', C', D' geschnitten wird, so hat man wie in (12.)

$$\frac{BC}{AB.AC} : \frac{CD}{AC.AD} : \frac{DB}{AD.AB} = B'C' : C'D' : D'B'$$

oder

$$AD.BC : AB.CD : AC.DB = B'C' : C'D' : D'B'$$

Coroll.: Wenn man bei einem Tetraeder um die einzelnen Flächen beliebige Kugeln beschreibt und jede Kugel mit den 3 Kanten, welche nicht Sehnen derselben sind, durchschneidet, so erhält man Dreiecke, die sämmtlich einander ähnlich sind. Ebenso bei einem planen Viereck.

14. Liegen die Puncte A, B, C, D auf einem Kreise (oder auf einer Geraden d. i. einem Kreise, dessen Centrum auf einer Normale zur Geraden unendlich fern ist), so ist

$$AB.CD + AC.DB + AD.BC = 0,$$

indem die Producte als Gröfsen von einerlei oder entgegengesetzten Zei-

chen genommen werden, je nachdem die Dreiecke ACD, ADB, ABC einerlei Sinnes sind oder nicht (*Ptolemaeus* Almagest. I. 9, *Möbius* Kreisverw. 26 und 44).

Beweis: Sind B', C', D' stereographische Projectionen von B, C, D aus A, d. h. die Centralprojectionen dieser Puncte aus A auf eine Gerade der Kreisebene, welche mit der den Kreis in A berührenden Geraden parallel ist, so hat man wie in (12.)

$$\frac{CD}{AC.AD}:\frac{DB}{AD.AB}:\frac{BC}{AB.AC} = C'D':D'B':B'C'.$$

Nun ist $C'D'+D'B'+B'C'=0$, wofern die Strecken als Gröfsen von gleichen Zeichen oder als entgegengesetzt genommen werden, je nachdem ihre Richtungen übereinstimmen oder nicht, je nachdem also die Dreiecke $AC'D'$, $AD'B'$, $AB'C'$ einerlei Sinnes sind oder nicht. Die Dreicke ACD, ADB, ABC sind aber mit den genannten Dreiecken der Reihe nach einerlei Sinnes, also ist unter der angegebenen Voraussetzung

$$\frac{CD}{AC.AD}+\frac{DB}{AD.AB}+\frac{BC}{AB.AC}=0$$

oder

$$AB.CD+AC.DB+AD.BC=0.$$

Wenn die Puncte A, B, C, D auf einer Geraden liegen, so ist

$$AB.CD+AC.DB+AD.BC$$
$$= AB(AD-AC)+AC(AB-AD)+AD(AC-AB)$$

und verschwindet identisch.

Zusatz: Wenn 5 Puncte A, B, C, D, E auf einem Kreise oder auf einer Geraden liegen, so ist auf analoge Weise

$$\frac{BC}{AB.AC}+\frac{CD}{AC.AD}+\frac{DE}{AD.AE}+\frac{EB}{AE.AB}=0$$

u. s. f., wie *Carnot* géom. de pos. 215 bemerkt hat.

15. Wenn die Strecken, welche 4 Punkte A, B, C, D verbinden, der Gleichung

$$AB.CD+AC.DB+AD.BC=0$$

genügen, so liegen die Punkte A, B, C, D auf einem Kreise (einer Geraden). Diese Umkehrung des Ptolemäischen Satzes ist von *Förstemann* dieses Journals Bd. 13 p. 233, *Kunze* Planimetrie §. 166, *Möbius* Kreis-

verw. 26 behandelt worden und zwar von dem Letzteren zuerst in ihrem ganzen Umfange.

Beweis: Lägen die Puncte A, B, C, D nicht auf einem Kreise, so verhielten sich die Producte $AB.CD, AC.DB, AD.BC$ wie die Seiten eines Dreiecks, dessen Fläche von Null verschieden (13.). Da in einem solchen Dreiecke eine Seite der Summe der beiden andern nicht gleich ist, so kann auch eines jener Producte der Summe der beiden andern nicht gleich sein, was der Voraussetzung widerstreitet.

Dresden, im Februar 1857.

17.

Exposition d'une théorie analytique générale propre à exprimer les lois des divers ordres de phénoménes qui dépendent d'équations linéaires aux différences partielles, tels que ceux des vibrations et de la propagation de la chaleur.

(Par M. *L. F. Ménabréa*).

L'écrit que je publie aujourd'hui est le résumé d'un mémoire que j'ai lu devant l'Académie des sciences de Turin *) dans la séance du 15 avril 1855 et dans lequel j'ai eu pour but de réunir, dans une même analyse, les théories qui se rapportent à divers ordres de phénomènes dont les lois dépendent d'équations linéaires aux différences partielles. Plusieurs géomètres et entr'autres ***Poisson,*** dans sa ***Théorie de la chaleur,*** avaient déjà exposé quelques vues générales sur les rapports qui existent entre l'analyse relative aux problèmes des petites oscillations et celle de la propagation de la chaleur dans les corps solides; toutefois ces aperçus profonds et ingénieux laissent encore beaucoup à désirer et sont loin d'avoir la généralité et la simplicité qu'on peut concevoir. C'est pourquoi je me suis proposé une question beaucoup plus étendue que les questions analogues traitées, que je sache, jusqu'à ce jour; c'est de résoudre par une seule et même analyse tous les problèmes qui dépendent d'équations linéaires aux différences partielles d'un ordre n quelconque, en déduisant des principes les plus élémentaires et par un mécanisme de la plus grande simplicité, des formules générales applicables à tous ces divers ordres de problèmes.

On sait que les problèmes relatifs à la distribution de la chaleur dépendent d'équations différentielles du 1er ordre, tandis que ceux des vibrations dépendent d'équations du 2me ordre. Ainsi dans les formules générales dont il s'agit, il suffira de faire pour la chaleur $n = 1$, et pour les vibrations $n = 2$.

On verra avec quelle facilité ces formules se transforment lorsqu'on passe d'un systéme composé de points isolés, à un système continu, de sorte

*) Voir les mémoires de l'Académie des sciences de Turin, série II tom. XVI.

qu'elles s'appliquent à un système composé d'une façon quelconque de points isolés et de un ou de plusieurs corps continus liés entre eux d'une manière déterminée.

Pour les applications que l'on peut faire de cette théorie, je renvois à mon mémoire original et à celui que j'ai publié en 1854 sous le titre de ***Etudes sur la théorie des vibrations*** (Mémoires de l'Académie Royale des sciences de Turin, tome XV, série II) dans lequel j'ai fait un constant usage des principes que j'ai généralisés dans l'écrit actuel. J'espère que ce travail ne sera pas sans utilité et qu'il pourra apporter quelque nouvel élément à l'étude de la philosophie naturelle en permettant d'embrasser dans une même théorie analytique, plusieurs ordres de phénomènes qui semblent au premier abord différer dans leur essence.

I.

Soient les r équations différentielles suivantes:

$$(1.)\quad \begin{cases} m_1 \dfrac{d^n u_1}{dt^n} + a_{(1,2)} \dfrac{d^n u_2}{dt^n} + a_{(1,3)} \dfrac{d^n u_3}{dt^n} + \cdots + a_{(1,r)} \dfrac{d^n u_r}{dt^n} + \cdots \\ + M_1 u_1 + A_{(1,2)} u_2 + A_{(1,3)} u_3 + \cdots\cdots + A_{(1,r)} u_r = 0, \\ m_2 \dfrac{d^n u_2}{dt^n} + a_{(2,1)} \dfrac{d^n u_1}{dt^n} + a_{(2,3)} \dfrac{d^n u_3}{dt^n} + \cdots + a_{(2,r)} \dfrac{d^n u_r}{dt^n} + \cdots \\ + M_2 u_2 + A_{(2,1)} u_2 + A_{(2,3)} u_3 + \cdots\cdots + A_{(2,r)} u_r = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_r \dfrac{d^n u_r}{dt^n} + a_{(r,1)} \dfrac{d^n u_1}{dt^n} + a_{(r,2)} \dfrac{d^n u_2}{dt^n} + \cdots + a_{(r,r-1)} \dfrac{d^n u_{r-1}}{dt^n} + \cdots \\ + M_r u_r + A_{(r,1)} u_1 + A_{(r,2)} u_2 + \cdots\cdots + A_{(r,r-1)} u_{r-1} = 0 \end{cases}$$

dans lesquelles $u_1, u_2, \ldots, u_r$ sont r variables fonctions du temps, et

$m_1, m_2, \ldots, M_1, M_2, \ldots, a_{(1,2)}, \ldots, a_{(2,1)}, \ldots, A_{(1,2)}, \ldots, A_{(2,1)} \cdots$ des coefficients constants. —

D'après la nature de la liaison qui unit les points du système auquel se rapportent les variables dont il s'agit, on admettra qu'en général

$$a_{(n,n')} = a_{(n',n)}; \qquad A_{(n,n')} = A_{(n',n)}$$

n et n' étant deux indices différents quelconques.

Si l'on somme les équations (1.) après les avoir respectivement multipliées par les constantes arbitraires $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$; puis si l'on fait

$$(2.)\quad \begin{cases} k^n = \dfrac{p_1 M_1 + p_2 A_{(1,2)} + p_3 A_{(1,3)} + \cdots}{p_1 m_1 + p_2 a_{(1,2)} + p_3 a_{(1,3)} + \cdots} = \dfrac{p_2 M_2 + p_1 A_{(1,2)} + p_3 A_{(2,3)} + \cdots}{p_2 m_2 + p_1 a_{(1,2)} + p_3 a_{(2,3)} + \cdots} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ = \dfrac{p_r M_r + p_1 A_{(r,1)} + p_2 A_{(r,2)} + \cdots}{p_r m_r + p_1 a_{(r,1)} + p_2 a_{(r,2)} + \cdots} \end{cases}$$

et

$$(3.)\quad \begin{aligned} V = u_1 &+ u_2 \frac{p_2 M_2 + p_1 A_{(1,2)} + p_3 A_{(2,3)} + \cdots}{p_1 M_1 + p_2 A_{(1,2)} + p_3 A_{(1,3)} + \cdots} \\ &+ u_3 \frac{p_3 M_3 + p_1 A_{(1,3)} + p_2 A_{(2,3)} + \cdots}{p_1 M_1 + p_2 A_{(1,2)} + p_3 A_{(1,3)} + \cdots} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ u_r \frac{p_r M_r + p_1 A_{(r,1)} + p_2 A_{(r,2)} + \cdots}{p_1 M_1 + p_2 A_{(1,2)} + p_3 A_{(1,3)} + \cdots} \end{aligned}$$

on obtiendra une équation de la forme

$$(4.)\quad \frac{d^n V}{dt^n} + k^n V = 0,$$

où k^n est une constante que l'on déduit de l'élimination de $p_1, p_2, \ldots, p_r$ entre les r équations (2.).

L'équation finale en k^n sera du degré r; nous la désignerons par

$$(5.)\quad K^{(r)}_{(n)} = 0.$$

En intégrant l'équation (4.) on obtient

$$(6.)\quad V = E_1 e^{k\alpha t} + E_2 e^{k\alpha^3 t} + E_3 e^{k\alpha^5 t} + \cdots + E_n e^{k\alpha^{2n-1} t} = T$$

où $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ sont des constantes arbitraires, α une des racines n^{mes} de -1 propre à reproduire toutes les autres, e la base des logarithmes hyperboliques; nous représentons par T l'expression explicite de V en fonction de t. L'équation (5.) fournira r valeurs différentes de k^n; on aura un nombre correspondant de valeurs des rapports $\frac{p_2}{p_1}; \frac{p_3}{p_1}; \ldots, \frac{p_r}{p_1}$; et autant d'équations (6.) relatives chacune aux diverses valeurs de k^n. Nous indiquerons par les indices (1), (2), ..., (i) ..., (r) placés supérieurement les quantités correspondantes à chacune de ces valeurs.

En général si l'on désigne par $\overset{0}{V}, \frac{d\overset{0}{V}}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}\overset{0}{V}}{dt^{n-1}}$ les valeurs initiales de $V, \frac{dV}{dt}, \ldots$ qui se déduisent de celles de $u_1, u_2, \ldots, \frac{du}{dt}, \frac{du_2}{dt}, \ldots$ (voir l'équation (3.)), on obtiendra l'expression générale suivante qui se déduit facilement de l'équation (6.) et de ses différentielles par la considération

des valeurs que prennent les diverses sommes des puissances des racines de *l'unité négative:*

$$(7.)\quad E_j = \frac{1}{n}\left\{\overset{0}{V} + \frac{\alpha^{2n-2j+1}}{k}\cdot\frac{d\overset{0}{V}}{dt} + \frac{\alpha^{2[2n-2j+1]}}{k^2}\cdot\frac{d^2\overset{0}{V}}{dt^2} + \cdots + \frac{\alpha^{(n-1)[2n-2j+1]}}{k^{n-1}}\cdot\frac{d^{n-1}\overset{0}{V}}{dt^{n-1}}\right\}.$$

Comme on a r équations (6.) nombre égal à celui des variables, on en déduira pour ces dernières des expressions de la forme

$$(8.)\quad \begin{cases} u_1 = F_1^{(1)}T^{(1)} + F_1^{(2)}T^{(2)} + F_1^{(3)}T^{(3)} + \cdots + F_1^{(r)}T^{(r)}, \\ u_2 = F_2^{(1)}T^{(1)} + F_2^{(2)}T^{(2)} + F_2^{(3)}T^{(3)} + \cdots + F_2^{(r)}T^{(r)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_r = F_r^{(1)}T^{(1)} + F_r^{(2)}T^{(2)} + F_r^{(3)}T^{(3)} + \cdots + F_r^{(r)}T^{(r)}, \end{cases}$$

où $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_r$ sont des coefficients constants fonctions de k. Faisons pour abréger

$$(9.)\quad \begin{cases} B_1 = p_1 M_1 + p_2 A_{(1,2)} + p_3 A_{(1,3)} + \cdots \\ B_2 = p_2 M_2 + p_1 A_{(2,1)} + p_3 A_{(2,3)} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_i = p_i M_i + p_1 A_{(i,1)} + p_2 A_{(i,2)} + \cdots \end{cases}$$

et observons que, à cause de l'équation (4.), on a:

$$(10.)\quad \frac{d^n T}{dt^n} + k^n T = 0.$$

Cela posé, en substituant dans les équations primitives (1.) les valeurs (8.) de $u_1, u_2, \ldots$ et ayant égard aux équations (2.) et (10.), on aura, en égalant séparément à zéro les coefficients des diverses valeurs $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ de T,

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{p_2}{p_1}; \qquad \frac{F_3}{F_1} = \frac{p_3}{p_1}; \qquad \ldots; \qquad \frac{F_r}{F_1} = \frac{p_r}{p_1};$$

ainsi l'expression générale de u_i sera:

$$(11.)\quad u_i = \frac{p_i^{(1)}}{p_1^{(1)}}F_1^{(1)}T^{(1)} + \frac{p_i^{(2)}}{p_1^{(2)}}F_1^{(2)}T^{(2)} + \cdots + \frac{p_i^{(r)}}{p_1^{(r)}}F_1^{(r)}T^{(r)}$$

$$= \sum_{(\varepsilon=1)}^{(\varepsilon=r)} \frac{p_i^{(\varepsilon)}}{p_1^{(\varepsilon)}}F_1^{(\varepsilon)}T^{(\varepsilon)},$$

où le signe $\sum_{(\varepsilon=1)}^{(\varepsilon=r)}$ indique la somme de tous les termes relatifs aux diverses valeurs des indices (1), (2), etc..

Pour obtenir la valeur de F_1, substituons les expressions de $u_1, u_2, \ldots, u_r$ dans une des valeurs de V (voir les équations (3.) et (6.)) correspondantes

à un indice, (η) par exemple, valeur qui sera:

$$V^{(\eta)} = u_1 + u_2 \frac{B_2^{(\eta)}}{B_1^{(\eta)}} + u_3 \frac{B_3^{(\eta)}}{B_1^{(\eta)}} + \cdots + u_r \frac{B_r^{(\eta)}}{B_1^{(\eta)}} = T^{(\eta)}.$$

Après avoir fait la substitution indiquée, en égalant séparément entre eux les coefficients de $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots, T^{(\eta)}, \ldots, T^{(r)}$, dans les deux derniers membres de l'équation précédente, on obtiendra:

$$(12.) \qquad F_1^{(\eta)} = \frac{1}{1 + \frac{p_2^{(\eta)}}{p_1^{(\eta)}} \cdot \frac{B_2^{(\eta)}}{B_1^{(\eta)}} + \frac{p_3^{(\eta)}}{p_1^{(\eta)}} \cdot \frac{B_3^{(\eta)}}{B_1^{(\eta)}} + \cdots};$$

et en général

$$(13.) \qquad B_1^{(\eta)} p_1^{(\varepsilon)} + B_2^{(\eta)} p_2^{(\varepsilon)} + B_3^{(\eta)} p_3^{(\varepsilon)} + \cdots + B_r^{(\eta)} p_r^{(\varepsilon)} = 0$$

lorsque (η) et (ε) sont deux indices différents.

Ainsi, en substituant dans l'expression de u_i les valeurs de F_1, T et E, on aura pour l'expression générale de cette variable:

$$(14.) \qquad u_i = \sum_{(\varepsilon=1)}^{(\varepsilon=r)} \frac{p_i^{(\varepsilon)} B_1^{(\varepsilon)}}{p_1^{(\varepsilon)} B_1^{(\varepsilon)} + p_2^{(\varepsilon)} B_2^{(\varepsilon)} + p_3^{(\varepsilon)} B_3^{(\varepsilon)} + \cdots} T^{(\varepsilon)}, \text{ ou bien}$$

$$u_i = \frac{1}{n} \sum_{(\varepsilon=1)}^{(\varepsilon=r)} \frac{p_i^{(\varepsilon)} B_1^{(\varepsilon)}}{p_1^{(\varepsilon)} B_1^{(\varepsilon)} + p_2^{(\varepsilon)} B_2^{(\varepsilon)} + p_3^{(\varepsilon)} B_3^{(\varepsilon)} + \cdots} \times \sum_{(j=1)}^{(j=n)} e^{t \cdot k^{(\varepsilon)} \alpha^{2j-1}} \left\{ \overset{0}{\breve{V}} + \frac{d\overset{0}{\breve{V}}}{dt} \frac{\alpha^{2n-2j+1}}{k^{(\varepsilon)}} + \cdots + \frac{d^{n-1}\overset{0}{\breve{V}}}{dt^{n-1}} \frac{\alpha^{(n-1)(2n-2j+1)}}{[k^{(\varepsilon)}]^{n-1}} \right\}$$

expression dans laquelle le signe $\sum_{(j=1)}^{(j=n)}$ indique la somme de tous les termes qui se rapportent aux diverses valeurs de j. Comme on peut écrire la valeur de $\overset{0}{\breve{V}}$ sous la forme

$$\overset{0}{\breve{V}} = \frac{1}{B_1} \sum_{(\nu=1)}^{(\nu=r)} \overset{0}{\breve{u}}_\nu B_\nu$$

la formule précédente deviendra

$$(15.) \quad u_i = \frac{1}{n} \sum_{(\varepsilon=1)}^{(\varepsilon=r)} \frac{p_i^{(\varepsilon)}}{\sum_{\nu=1}^{\nu=r} p_\nu^{(\varepsilon)} B_\nu^{(\varepsilon)}} \cdot \sum_{(j=1)}^{(j=n)} e^{tk^{(\varepsilon)} \cdot \alpha^{2j-1}} \left\{ \sum_{(\nu=1)}^{(\nu=r)} \overset{0}{\breve{u}}_\nu B_\nu^{(\varepsilon)} \right.$$

$$\left. + \sum_{(\nu=1)}^{(\nu=r)} \frac{d\overset{0}{\breve{u}}_\nu}{dt} \cdot B_\nu^{(\varepsilon)} \cdot \frac{\alpha^{2n-2j+1}}{k^{(\varepsilon)}} + \cdots + \sum_{(\nu=1)}^{(\nu=r)} \frac{d^{n-1}\overset{0}{\breve{u}}_\nu}{dt^{n-1}} \cdot B_\nu^{(\varepsilon)} \cdot \frac{\alpha^{(n-1)(2n-2j+1)}}{[k^{(\varepsilon)}]^{n-1}} \right\}.$$

II.

Lorsque les équations primitives (1.) se réduisent aux suivantes

$$(16.)\quad \begin{cases} m_1\dfrac{d^n u_1}{dt^n} + M_1 u_1 + A_{(1,2)} u_2 + \cdots + A_{(1,r)} u_r = 0, \\ m_2\dfrac{d^n u_2}{dt^n} + M_2 u_2 + A_{(2,1)} u_1 + \cdots + A_{(2,r)} u_r = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_r\dfrac{d^n u_r}{dt^n} + M_r u_r + A_{(r,1)} u_r + \cdots + A_{(r,r-1)} u_{r-1} = 0, \end{cases}$$

on a $\dfrac{p_\nu m_\nu}{p_1 m_1} = \dfrac{B_\nu}{B_1}$, et par suite la formule (15.) devient

$$(17.)\quad u_i = \frac{1}{n}\sum_{(\varepsilon=1)}^{(\varepsilon=r)} \frac{p_i^{(\varepsilon)}}{\Sigma m_\nu (p_\nu^{(\varepsilon)})^2} \sum_{(j=1)}^{(j=n)} e^{tk^{(\varepsilon)}\cdot\alpha^{2j-1}} \left\{ \sum_{(\nu=1)}^{(\nu=r)} \overset{0}{\smile}{u_\nu} m_\nu p_\nu^{(\varepsilon)} \right.$$

$$\left. + \sum_{(\nu=1)}^{(\nu=r)} \frac{d\overset{0}{\smile}{u_\nu}}{dt}\cdot m_\nu p_\nu^{(\varepsilon)}\cdot\frac{\alpha^{2n-2j+1}}{k^{(\varepsilon)}} + \cdots + \sum_{(\nu=1)}^{(\nu=r)} \frac{d^{n-1}\overset{0}{\smile}{u_\nu}}{dt^{n-1}}\cdot m_\nu p_\nu^{(\varepsilon)}\cdot\frac{\alpha^{(n-1)(2n-2j+1)}}{[k^{(\varepsilon)}]^{n-1}} \right\};$$

et l'équation (13.) se transforme dans la suivante

$$(17.\text{ bis})\quad m_1 p_1^{(\varepsilon)} p_1^{(\eta)} + m_2 p_2^{(\varepsilon)} p_2^{(\eta)} + m_3 p_3^{(\varepsilon)} p_3^{(\eta)} + \cdots + m_r p_r^{(\varepsilon)} p_r^{(\eta)} = 0.$$

De cette dernière équation on conclut que, m_1, m_2, m_3, ... étant des quantités positives, les valeurs de k^n d'où l'on déduit celles de p_1, p_2, etc. ne peuvent être imaginaires et que par conséquent toutes les racines de l'équation (5.) sont réelles.

III.

Si les équations primitives sont de la forme suivante

$$(18.)\quad \begin{cases} m_1\left\{\dfrac{d^m u_1}{dt^m} + \nu\dfrac{d^n u_1}{dt^n} + \varpi\dfrac{d^p u_1}{dt^p} + \cdots\right\} + M_1 u_1 + A_{(1,2)} u_2 + A_{(1,3)} u_3 + \cdots = 0, \\ m_2\left\{\dfrac{d^m u_2}{dt^m} + \nu\dfrac{d^n u_2}{dt^n} + \varpi\dfrac{d^p u_2}{dt^p} + \cdots\right\} + M_2 u_2 + A_{(2,1)} u_1 + A_{(2,3)} u_3 + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_r\left\{\dfrac{d^m u_r}{dt^m} + \nu\dfrac{d^n u_r}{dt^n} + \varpi\dfrac{d^p u_r}{dt^p} + \cdots\right\} + M_r u_r + A_{(r,1)} u_1 + A_{(r,2)} u_2 + \cdots = 0, \end{cases}$$

on arrivera à des résultats analogues aux précédents, en suivant les procédés que nous avons indiqués.

Ainsi l'expression générale de u_i sera encore

$$(19.)\quad u_i = \sum_{(\varepsilon=1)}^{(\varepsilon=r)} \frac{p_i^{(\varepsilon)}}{\Sigma m_\nu (p_\nu^{(\varepsilon)})^2}\cdot T^{(\varepsilon)} m_1 p_1^{(\varepsilon)};$$

où l'on mettra pour $T^{(\varepsilon)}$ sa valeur déduite de l'équation (6.), qui dans le cas actuel devient

$$(20.) \qquad V = E_1 e^{h_1 t} + E_2 e^{h_2 t} + \cdots + E_m e^{h_m t}$$

et dans laquelle les valeurs h_1, h_2, h_3, ... sont les racines de l'équation

$$(21.) \qquad h^m + \nu h^n + \varpi h^p + k^m = 0.$$

Quant aux expressions de E_1, E_2, ..., E_m, on les déduira des valeurs initiales de

$$V, \quad \frac{dV}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{m-1}V}{dt^{m-1}}.$$

On démontre également que, dans le cas dont il s'agit, les valeurs de k^m sont toutes réelles.

IV.

Supposons que les équations primitives (16.) se rapportent à un système continu, elles se transformeront en une équation différentielle de la forme

$$(22.) \qquad m\frac{d^n u}{dt^n} + Vu + W\frac{d^{h+i+j}u}{dx^h . dy^i . dz^j} + W'\frac{d^{h'+i'+j'}u}{dx^{h'} . dy^{i'} . dz^{j'}} + \cdots = 0,$$

où x, y, z sont les coordonnées fixes des divers points du système. Si l'on examine les équations (2.) et observant que dans le cas général des équations (16.) on a $a_{(1,2)} = 0$; $a_{(1,3)} = 0$; ..., on remarquera que p_1, p_2, ..., p_r entrent dans les expressions de $m_i p_i k^n$ de la même manière que u_1, u_2, ..., u_r entrent dans les valeurs de $-m_i\frac{d^n u_i}{dt^n}$ des équations (16.), d'où l'on conclut qu'en général

$$(23.) \qquad k^n mp = Vp + W\frac{d^{h+i+j}p}{dx^h . dy^i . dz^j} + W'\frac{d^{h'+i'+j'}p}{dx^{h'} . dy^{i'} . dz^{j'}} + \cdots.$$

Outre les équations (22.) et (23.) on aura les équations aux limites qui serviront à éliminer les constantes arbitraires introduites par l'intégration de l'équation (23.) et fourniront ainsi une équation transcendante en k^n qui donnera les diverses valeurs de cette quantité et par suite celles de p qui en dépendent.

La détermination des constantes arbitraires se fera au moyen des conditions relatives aux limites.

En général, une de ces constantes paraîtra rester indéterminée, mais, comme dans l'expression générale de u elle sera facteur commun à tous les termes du numérateur et du dénominateur, elle disparaîtra.

Si les équations primitives dont il s'agit s'appliquent à un système de points matériels, on pourra considérer les quantités représentées par m_1, m_2, m_3, ... comme exprimant des quantités proportionelles aux masses des points du système auquel se rapportent les variables u_1, u_2, u_3, ...

Dans les équations (22.) et (23.) nous remplacerons m par dm, et en appliquant au cas actuel la formule (17.) nous aurons pour un système continu

$$(24.)\quad u = \frac{1}{n}\sum_{(1)}^{(\varkappa)} \frac{p}{\int p^2 dm} \sum_{(j=1)}^{(j=n)} e^{tk\alpha^{2j-1}} \int p dm \left\{ \overset{0}{\smile}{u} + \frac{\alpha^{2n-2j+1}}{k} \cdot \frac{d\overset{0}{\smile}{u}}{dt} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{\alpha^{(2n-1)(2n-2j+1)}}{k^{n-1}} \cdot \frac{d^{n-1}\overset{0}{\smile}{u}}{dt^{n-1}} \right\},$$

formule dans laquelle on indique par $\sum_{(1)}^{(\varkappa)}$ la somme étendue à toutes les diverses valeurs de k; par $\int$ la somme étendue à tous les points du système continu; le signe sommatoire $\sum_{(j=1)}^{(j=n)}$ se rapporte, comme précédemment, aux n racines n^{mes} de (-1).

V.

Le système peut être composé de plusieurs corps continus et de plusieurs points matériels séparés les uns des autres.

Les considérations que nous avons exposées précédemment s'appliquent également à un pareil système.

Pour chacun des corps continus on aura des équations de la forme de celles (22.) et (23.); on aura, en outre, des équations aux limites qui se rapporteront aux surfaces, lignes, points extérieurs ou de contact.

La quantité k^n étant la même dans toutes ces équations, on éliminera entre les équations de la forme (23.) et les équations aux limites toutes les constantes arbitraires introduites par les intégrations des équations (23.); on aura ainsi l'équation finale transcendante en k^n. La détermination des constantes arbitraires s'obtiendra au moyen des équations aux limites; enfin en appliquant les principes que nous avons développés jusqu'ici on arrive évidemment à l'expression suivante qui est l'expression générale de u

$$(25.)\quad u = \frac{1}{n}\sum_{(1)}^{(\varkappa)} \frac{p}{\Sigma m p^2 + \Sigma \int p^2 dm} \sum_{(j=1)}^{(j=n)} e^{tk\alpha^{2j-1}} \left\{ \left(\Sigma m \overset{0}{\smile}{u} p + \Sigma \int p \overset{0}{\smile}{u} dm \right) + \frac{\alpha^{2n-2j+1}}{k} \right.$$

$$\left. \times \left(\Sigma m p \frac{d\overset{0}{\smile}{u}}{dt} + \Sigma \int p \frac{d\overset{0}{\smile}{u}}{dt} dm \right) + \cdots + \frac{\alpha^{(n-1)(2n-2j+1)}}{k^{n-1}} \left(\Sigma m p \frac{d^{n-1}\overset{0}{\smile}{u}}{dt^{n-1}} + \Sigma \int p \frac{d^{n-1}\overset{0}{\smile}{u}}{dt^{n-1}} dm \right) \right\}$$

où Σ exprime les sommes relatives à tous les points isolés et à tous les corps continus qui composent le système.

VI.

Lorsque les équations primitives (1.) ne contiennent, outre les différentielles des variables par rapport au temps, que les différences des diverses variables prises deux à deux comme $u_2 - u_1$, on peut satisfaire à ces équations générales par une expression de u_i de la forme

$$(26.) \qquad u_i = P + Qt + Rt^2 + \cdots + Ut^{n-1} + \sum_{(\varepsilon=1)}^{(\varepsilon=r)} \frac{p_i^{(\varepsilon)} B_1^{(\varepsilon)}}{\sum_{\nu=1}^{\nu=r} p_\nu^{(\varepsilon)} B_\nu^{(\varepsilon)}} \cdot T^{(\varepsilon)}$$

(voir les équations (14.) et (15.)), dans la quelle $P, Q, R, \ldots, U$ sont des coefficients constants et les mêmes pour toutes les variables $u_1, u_2, \ldots, u_r$. La détermination de ces coefficients s'obtient très-simplement dans le cas, où, en faisant la somme de toutes les équations (1.), tous les termes qui contiennent $u_1, u_2, \ldots, u_r$ se détruisent mutuellement. Alors les équations (2.) donneront

$$(27.) \quad \begin{aligned} &p_1(m_1 + a_{(1,2)} + a_{(1,3)} + \cdots + a_{(1,r)}) + p_2(m_2 + a_{(2,1)} + a_{(2,3)} + \cdots + a_{(2,r)}) + \cdots \\ &\cdots + p_r(m_r + a_{(r,1)} + a_{(r,2)} + \cdots + a_{(r,r-1)}) = 0; \end{aligned}$$

nous ferons pour abréger

$$(28.) \quad \begin{cases} b_1 = m_1 + a_{(1,2)} + \cdots + a_{(1,r)}; \quad b_2 = m_2 + a_{(2,1)} + \cdots + a_{(2,r)}; \quad \ldots \\ \ldots; \quad b_r = m_r + a_{(r,1)} + \cdots + a_{(r,r-1)}, \end{cases}$$

ce qui revient (à cause des équations (2.)) à

$$(28.\text{ bis}) \qquad b_1 = k^n B_1; \quad b_2 = k^n B_2; \quad \ldots; \quad b_r = k^n B_r.$$

Cela posé, si l'on multiplie respectivement par $b_1, b_2, \ldots, b_r$ les valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_r$ déduites de l'expression (26.) et qu'on les somme ensemble, on aura

$$\begin{aligned} u_1 b_1 + u_2 b_2 + \cdots + u_r b_r = {} & (b_1 + b_2 + \cdots + b_r)(P + Qt + Rt^2 + \cdots Ut^{n-1}) + \cdots \\ & + \sum_{(\varepsilon=1)}^{(\varepsilon=r)} (p_1 b_1 + p_2 b_2 + \cdots + p_r b_r) \frac{B_1^{(\varepsilon)}}{\sum_{\nu=1}^{\nu=r} p_\nu^{(\varepsilon)} B_\nu^{(\varepsilon)}} T^{(\varepsilon)}, \end{aligned}$$

équation qui en vertu de l'équation (27.) se réduit à

$$(29.) \qquad u_1 b_1 + u_2 b_2 + \cdots + u_r b_r = (b_1 + b_2 + \cdots + b_r)(P + Qt + Rt^2 + \cdots + Ut^{n-1});$$

d'où l'on déduit

$$(30.)\quad \begin{cases} P = \dfrac{\overset{0}{\smile}{u_1} b_1 + \overset{0}{\smile}{u_2} b_2 + \cdots + \overset{0}{\smile}{u_r} b_r}{b_1 + b_2 + \cdots + b_r} \\ Q = \dfrac{\dfrac{d\overset{0}{\smile}{u_1}}{dt} b_1 + \dfrac{d\overset{0}{\smile}{u_2}}{dt} b_2 + \cdots + \dfrac{d\overset{0}{\smile}{u_r}}{dt} b_r}{b_1 + b_2 + \cdots + b_r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U = \dfrac{\dfrac{d^{n-1}\overset{0}{\smile}{u_1}}{dt^{n-1}} b_1 + \dfrac{d^{n-1}\overset{0}{\smile}{u_2}}{dt^{n-1}} b_2 + \cdots + \dfrac{d^{n-1}\overset{0}{\smile}{u_r}}{dt^{n-1}} b_r}{b_1 + b_2 + \cdots + b_r}. \end{cases}$$

Si l'on écrit les valeurs de $\overset{0}{\smile}{u}$, $\dfrac{d\overset{0}{\smile}{u}}{dt}$, ..., de la manière suivante

$$\overset{0}{\smile}{u} = P + \beta^0; \qquad \frac{d\overset{0}{\smile}{u}}{dt} = Q + \frac{d\beta^0}{dt}; \qquad \ldots; \qquad \frac{d^{n-1}\overset{0}{\smile}{u}}{dt^{n-1}} = U + \frac{d^{n-1}\beta^0}{dt^{n-1}};$$

on pourra dans l'expression générale de T, au lieu de $\overset{0}{\smile}{V}$, $\dfrac{d\overset{0}{\smile}{V}}{dt}$, ..., $\dfrac{d^{n-1}\overset{0}{\smile}{V}}{dt^{n-1}}$ tels qu'ils sont donnés par l'équation (3.), mettre respectivement les valeurs

$$\frac{1}{B_1}\Sigma\beta^0 B; \qquad \frac{1}{B_1}\Sigma\frac{d\beta^0}{dt}B; \qquad \ldots; \qquad \frac{1}{B_1}\Sigma\frac{d^{n-1}\beta^0}{dt^{n-1}}B.$$

Car à cause des relations (28.bis), P, Q, ..., U, disparaîtront du terme sommatoire de l'expression (26.) laquelle pourra s'écrire de la manière suivante

$$u_i = P + Qt + Rt^2 + \cdots + Ut^{n-1} + \beta_i$$

où

$$(31.)\quad \beta_i = \sum_{(\varepsilon=1)}^{(\varepsilon=r)} \frac{p_i^{(\varepsilon)} B_1^{(\varepsilon)}}{\sum_{\nu=1}^{\nu=r} p_\nu^{(\varepsilon)} B_\nu^{(\varepsilon)}} T^{(\varepsilon)};$$

formule qui donne l'expression de la variable β_i en fonction des valeurs initiales des variables β^0, $\dfrac{d\beta^0}{dt}$, ..., $\dfrac{d^{n-1}\beta^0}{dt^{n-1}}$. Si les équations primitives (1.) contenaient, outre les variables, des quantités constantes, il serait très-facile de faire disparaître ces dernières et de ramener ce cas à celui que nous avons traité.

VII.

L'analyse que nous venons d'exposer a toute la généralité que demandent ordinairement les applications à la Physique Mathématique. On en déduira les formules qui se rapportent à la théorie des petites oscillations ou à

celle de la propagation de la chaleur dans les corps solides en faisant dans le premier cas $n = 2$, et dans le second $n = 1$.

Ainsi pour les vibrations, on prendra dans l'expression (25.) $n = 2$ et $\alpha = \sqrt{-1}$, et l'on obtiendra

$$(32.)\quad u_i = \sum_{(1)}^{(\infty)} \frac{p}{\Sigma m p^2 + \Sigma \int p^2 dm} \left\{ \begin{array}{l} (\Sigma m p^2 \overset{0}{\overbrace{u}} + \Sigma \int p \overset{0}{\overbrace{u}} dm) \cos kt \\ + \frac{1}{k} \left(\Sigma m p \frac{d\overset{0}{\overbrace{u}}}{dt} + \Sigma \int p \frac{d\overset{0}{\overbrace{u}}}{dt} dm \right) \sin kt \end{array} \right\}$$

Pour le problème de la propagation de la chaleur dans les corps solides, on fera $n = 1$ et $\alpha = 1$, et l'on aura

$$(33.)\quad u_i = \sum_{(1)}^{(\infty)} \frac{p}{\Sigma m p^2 + \Sigma \int p^2 dm} \{ \Sigma m p \overset{0}{\overbrace{u}} + \Sigma \int p \overset{0}{\overbrace{u}} dm \} e^{kt}.$$

Telles sont les formules qui contiennent les solutions de tous les problèmes relatifs à ces deux ordres de phénomènes. En y joignant celles que l'on déduit de l'équation (26.) on donnera à ces solutions toute l'étendue qu'elles peuvent comporter.

Turin, 18 avril 1856.

18.
Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes.

(Par M. *F. Joachimsthal* à Breslau.)

Mr. ***Ossian Bonnet*** a résolu, le premier, le problème de trouver les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes *). Il prend pour point de départ la proposition suivante **):

> Pour qu'une section plane d'une surface courbe soit une ligne de courbure, il faut et il suffit, que le plan de la section rencontre la surface partout sous le même angle.

A l'aide de ce théorème la solution du problème se ramène à l'intégration d'une équation différentielle partielle du premier ordre, résultat de l'élimination de la quantité α entre les deux relations

$$z - \alpha x - f(\alpha)y = f_1(\alpha); \qquad 1 + \alpha p + f(\alpha)q = f_2(\alpha)\sqrt{1+p^2+q^2};$$

où $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Bien que l'élimination de α ne soit possible, que si l'on ait fixé les fonctions $f(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, M. ***Bonnet,*** par des modifications très-habiles des méthodes connues, a néanmoins su intégrer l'équation différentielle partielle du problème.

Malgré les recherches si remarquables de M. ***Bonnet,*** je crois que la solution de la même question que je vais présenter, n'est pas dépourvue d'interêt. Je profite de quelques considérations géométriques qui ne sont pas nouvelles, mais que l'on a négligées, tant que je sache, dans ce genre de questions; je ferai voir, entre autres, que l'on peut, en s'aidant de la proposition mentionnée ci-haut, éviter toute équation différentielle partielle, et faire dépendre la question immédiatement de deux équations différentielles ordinaires.

I.

On peut définir les lignes de courbure comme suit:

> Une courbe tracée sur une surface F est une ligne de courbure de F, lorsque la surface développable D, circonscrite à F le long de la courbe C, a toutes ses arêtes perpendiculaires aux tangentes de C.

---

*) Journal de l'Ecole Polytechnique cah. 35, page 382.

**) Voyez le tome XXX de ce Journal page 348.

Cette définition dérive de la belle théorie des tangentes conjuguées, due à M. ***Dupin;*** mais on peut aussi, à l'aide de quelques observations tout-à-fait élémentaires, passer de la définition usuelle à la précédente. En effet, soient A et B deux plans quelconques qui se coupent suivant la droite L. Élevons en un point a de A une perpendiculaire à ce plan, et de même en un point b de B une perpendiculaire à B. Pour que ces deux droites se rencontrent il faut et il suffit, que l'angle entre les droites ab et L soit un angle droit. Supposons maintenant, que A et B soient deux plans tangents infiniment proches d'une surface F, et que a et b soient les points de contact; alors la droite L deviendra l'arête d'une surface développable circonscrite à F le long d'une courbe quelconque qui passe par a et b. Ainsi, toutes les fois que dans le système des normales d'une surface F, menées le long d'une courbe C, deux normales consécutives se rencontrent, la surface développable D, circonscrite à F le long de la courbe C aura une arête perpendiculaire à l'élément correspondant de C, et réciproquement; ce qui fait voir la coincidence des deux définitions. Comme deux lignes de courbure de systèmes différents se coupent sous des angles droits, on peut dire avec la même raison, que

les *tangentes* des lignes de courbure de l'un des systèmes, menées aux points où elles sont rencontrées par une ligne de courbure B de l'autre système, forment une surface développable D.

Une seconde surface développable D_1 est formée par les ***normales*** de la surface F, menées le long de B; et cette courbe est en même temps une ligne de courbure de D et de D_1 comme étant une trajectoire orthogonale de leurs génératrices rectilignes.

J'ai cru utile de rappeler au lecteur ces propriétés des lignes de courbure, bien qu'elles ne soient pas nouvelles, parcequ'on ne les trouve guère dans les traités les plus répandus.

II.

Je vais appliquer ces principes à la recherche des surfaces F dont les lignes de l'une des courbures sont dans des plans parallèles. Cette question a été traitée par l'illustre ***Monge;*** en outre M. ***Bertrand*** a démontré par la Géométrie les propriétés que ***Monge*** a trouvées par l'Analyse (***Liouville*** Tom. XIII); ses raisonnements reposent sur la propriété citée des lignes de courbure planes, dont je ne ferai pas usage.

Soient A, A', A'' . . les lignes de courbure consécutives planes; et B une ligne de courbure du second système qui rencontre les premières en a, a', a'' . . . Les tangentes t, t', t'' . . des courbes A, A', A'' . . qui ont leurs points de contact en a, a', a'' . . forment une surface développable D, elles sont en outre situées dans des plans parallèles; mais deux droites consécutives t et t' d'une surface développable, situées dans des plans parallèles, sont, elles-mêmes, parallèles, par conséquent la surface D est une surface cylindrique. La courbe B est en même temps une ligne de courbure de D, c'est à dire la courbe B est une section droite de la surface cylindrique D, et comme la section droite d'un cylindre est perpendiculaire à chaque arête t, et à chaque plan mené par une arête t, la droite, suivant laquelle se rencontrent les deux plans de A et de B, sera perpendiculaire à l'arête t; ainsi:

Si les lignes de l'une des courbures A, A', A'' . . d'une surface F sont dans des plans parallèles, les lignes de courbure du second système B, B', B'' . . seront dans des plans perpendiculaires à ceux du premier système et la droite d'intersection des deux plans qui contiennent A et B sera une normale à la courbe A. Il suit de là, que deux courbes A et $A^{(n)}$, rencontrées par B en a et $a^{(n)}$, ont, dans ces points, des tangentes parallèles et des normales parallèles.

Cette proposition conduit immédiatement aux trois propriétés connues des surfaces F, savoir aux suivantes: 1°. Les projections des courbes A, A', A'' . . sur le plan de A sont un système de courbes parallèles; 2°. les développées des courbes A, A', A'' . . sont les sections droites d'un cylindre H dont les plans tangents rencontrent la surface F suivant les lignes de courbure B, B', B'' . . du second système; 3°. la surface F est engendrée par le mouvement d'une courbe plane B dont le plan roule sans glisser sur un cylindre H.

III.

Nous allons chercher maintenant les surfaces F dont les lignes de l'une des courbures sont dans des plans passant par une droite fixe.

Soient A, A', A'' . . les lignes de courbure consécutives de ce système, et a, a', a'' . . les points où elles sont rencontrées par une courbe du second système B. Les tangentes t et t' menées en a et a' aux deux courbes infiniment proches A et A' se rencontrent, comme deux génératrices consécutives d'une surface développable. Mais elles sont situées dans deux plans qui se coupent suivant l'axe fixe, donc leur point d'intersection se trouve sur cet

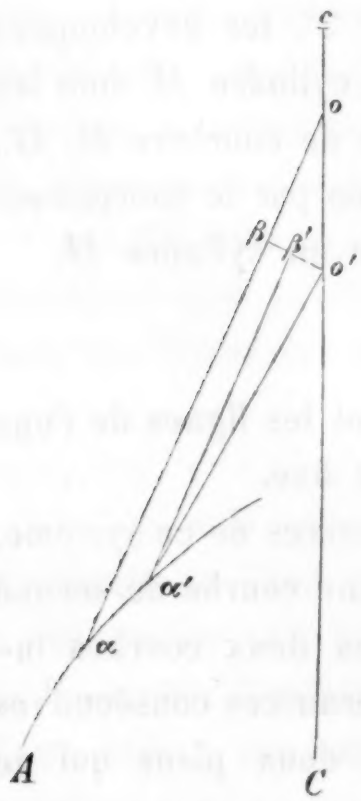
axe. En continuant de proche en proche, on voit que la surface développable D, circonscrite le long de la courbe B à la surface cherchée F, sera une surface conique dont le sommet est sur l'axe; or il faut, que B soit en même temps une ligne de courbure de la surface conique D, partant, B est une courbe sphérique. Ainsi:

Si les lignes de l'une des courbures A, A', A'' . . d'une surface F sont dans des plans qui passent tous par une droite fixe, les lignes de courbure du second système B, B', B'' . . seront des courbes sphériques qui ont leurs centres sur la droite fixe; et les cônes qui ont pour sommets les centres des courbes B, et qui s'appuient sur ces courbes, sont circonscrits à la surface F.

Réciproquement

Si l'on peut tracer sur une surface un système de lignes sphériques B, B', B'' . . qui ont leurs centres sur une droite fixe; et que les cônes qui s'appuient sur ces courbes et dont les sommets sont à leurs centres, soient tangents à la surface F; les courbes sphériques B seront un des systèmes des lignes de courbure de F, et les sections, faites par des plans qui passent par la droite fixe, en seront l'autre.

Pour obtenir l'équation des surfaces F nous n'avons qu'à exprimer ces conditions par des formules.



Soit p l'angle qui détermine la position d'une section plane A, menée par l'axe fixe que nous prenons pour axe des z; soit en outre q le paramètre d'une courbe sphérique B, $f(q)$ le rayon de la sphère, $\lambda(q)$ l'ordonnée de son centre. Cela posé, l'équation des surfaces cherchées aura la forme suivante

$$x = f(q)\sin h\cos p$$
$$y = f(q)\sin h\sin p$$
$$z = f(q)\cos h + \lambda(q),$$

où h est l'angle entre le rayon $f(q)$ d'une courbe sphérique B et l'axe des z; il dépend, en général, des deux variables p et q. Reste encore à exprimer, que le rayon $f(q)$ soit tangent à la section plane $p = \text{const.}$ ou à la courbe A. Soit α le point où la courbe A est coupée par la courbe sphérique B dont le paramètre est $= q$; $\alpha o = f(q)$ le rayon de B, $co = \lambda(q)$ l'ordonnée

de son centre (c est l'origine des coordonnées), l'angle $\alpha oC = h$. Soit α' le point d'intersection de A avec la courbe B' dont le paramètre $= q + dq$, o' le centre de B', ainsi

$$\alpha' o' = f(q+dq), \quad co' = \lambda(q+dq), \quad \text{l'angle } \alpha' o' C = h + \frac{\partial h}{\partial q} dq.$$

Menons $o'\beta$ perpendiculaire à αo, et $\alpha'\beta'$ perpendiculaire à $o'\beta$, et nous aurons

$$o'\beta = oo' \sin \beta oo' = \sin h \,.\, d\lambda$$

et, en outre,

$$o'\beta = \beta\beta' + \beta' o' = \alpha\alpha' \sin(\alpha\alpha', \alpha o) + f(q+dq) \frac{\partial h}{\partial q} dq.$$

Égalant ces deux expressions de $o'\beta$ et négligeant les infiniment petits du second ordre, nous aurons

$$(1.) \qquad \sin h \, d\lambda = \alpha\alpha' \sin(\alpha\alpha', \alpha o) + f(q) \frac{\partial h}{\partial q} dq.$$

Pour que le rayon αo soit tangent à la courbe A, il faut et il suffit que $\sin(\alpha\alpha', \alpha o) = 0$, ou bien que

$$(2.) \qquad \sin h \frac{d\lambda}{dq} = f(q) \frac{\partial h}{\partial q}.$$

En intégrant par rapport à q l'équation (2.), ou $\frac{1}{\sin h} \frac{\partial h}{\partial q} = \frac{1}{f(q)} \frac{d\lambda}{dq}$, il faut ajouter une fonction arbitraire de $p = \log \psi(p)$, et, en posant

$$\frac{1}{f(q)} \frac{d\lambda(q)}{dq} = \frac{d \log \varphi(q)}{dq},$$

on obtient la réprésentation suivante des surfaces cherchées, où p et q sont les paramètres des lignes de courbure:

$$(3.) \quad \begin{cases} x = f(q) \sin h \cos p & \text{tang} \frac{h}{2} = \varphi(q)\psi(p) \\ y = f(q) \sin h \sin p & f(q) = \frac{\varphi(q)\,\lambda'(q)}{\varphi'(q)}. \\ z = f(q) \cos h + \lambda(q) \end{cases}$$

On peut, sans perdre de généralité, égaler $\varphi(q)$ ou $\lambda(q)$, ou une combinaison de ces deux fonctions arbitraires à q.

Les formules (3.) s'accordent avec celles que j'ai publiées Tome XXX de ce Journal page 350. J'ai exposé la marche que j'avais suivie pour les obtenir, dans le Programme du Collège royal francais de Berlin, Année 1848. En comparant cette méthode avec la méthode que nous venons d'expliquer, on verra de combien les considérations géométriques ont abrégé les calculs.

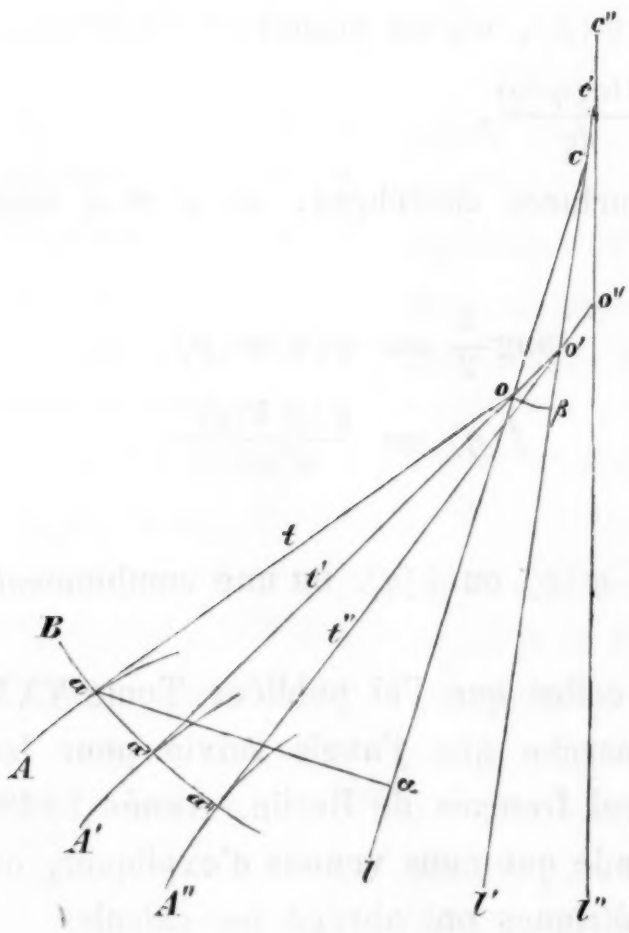
Remarque. Les lignes de courbure planes A, A', A'' . . jouissent de quelques propriétés, analogues à celles que nous avons reconnues aux courbes A du premier genre des surfaces discuté au n°. II.

Soient une droite l et une courbe plane C situées dans le même plan. Menons en un point c de C une tangente qui rencontre l en γ, et décrivons une circonférence avec le rayon $c\gamma$ autour de γ. En répétant cette construction pour tous les points de C, on obtient un système de circonférences qui donnent lieu à une enveloppe (réelle ou imaginaire) I'. En nommant, pour abréger, C la courbe primitive et I' la courbe dérivée par rapport à la droite fixe l, on voit très-aisément que chaque courbe primitive n'a qu'une seule dérivée, mais qu'à chaque courbe dérivée I' appartiennent une infinité de courbes primitives C, C', C'' . . . Si la droite l s'éloigne à l'infini, les courbes primitives C, C', C'' . . se transforment en courbes parallèles, et la courbe dérivée I', commune à toutes, est la développée des courbes parallèles.

Ces définitions établies, on peut dire, que, dans nos surfaces, les dérivées des lignes de courbure planes A, A', A'' . . par rapport à l'intersection commune de leurs plans (l'axe des z), forment une surface de révolution, réelle ou imaginaire.

IV.

Problème. Trouver les surfaces F dont les lignes de l'une des courbures sont planes.



Soient A, A', A'' . . les lignes de courbure consécutives planes, l la droite d'intersection des deux plans qui contiennent A et A', l' l'intersection des plans de A' et A'', e. a. d. s. Ces droites l, l', l'' . . sont les génératrices d'une surface développable P dont les plans tangents sont les plans des courbes A, A', A'' . . . Les tangentes t, t', t'' . . à ces courbes, menées aux points a, a', a'' . . où elles sont coupées par une courbe B du second système, forment une surface développable D. Il s'ensuit, que les tangentes consécutives t et t' se rencontrent en un point o de la

droite l, les tangentes l' et l'' en un point o' de l', etc. L'ensemble des points o forme une courbe sur P; je la nommerai O; c'est l'arête de rebroussement de la surface développable D. Comme la courbe B n'est pas seulement une ligne de courbure de F mais aussi de D, elle sera une développante de O; car les lignes de courbure d'une surface développable, autres que les génératrices, sont les développantes de l'arête de rebroussement*). Ainsi:

Si les lignes de l'une des courbures A, A', A'' . . d'une surface F sont planes, et que leurs plans enveloppent une surface développable P, les lignes de courbure de l'autre système B, B' . . seront les développantes d'un système de courbes O, O', O'' situées sur P; et la surface développable D, décrite par le fil qui développe une courbe quelconque O, sera circonscrite à la surface F.

Réciproquement:

Pour obtenir la surface la plus générale à un système de lignes de courbure planes, on conçoit sur une surface développable P un système de courbes O, O', O'' . .; on en déduit, par leur développement, un autre système de courbes B, B', B'' . . qui formeront une surface F. En déterminant les courbes O, O', O'' . . et les constantes, introduites par le développement, de manière, que le fil tendu reste toujours tangent à la surface F, elle deviendra la surface cherchée. — En effet, en renversant l'ordre du raisonnement, dont nous nous sommes servi, on fait voir sans peine, 1°. que les courbes B sont des lignes de courbure de F; 2°. que les sections planes A, A', A'' . . de F, déterminées par les plans tangents de P sont les trajectoires orthogonales de B, B', B'' . ., c'est à dire qu'elles sont le second système de lignes de courbure.

Traduisons cette construction dans le langage analytique.

La surface développable P est donnée par son arête de rebroussement C, lieu des intersections consécutives des droites infiniment proches l, l', l'' . .; le cas où P dégénère en une surface conique ou cylindrique, dont je ne m'occuperai pas, n'exige que des modifications bien simples. Je désignerai par ξ, η, ζ les coordonnées rectangulaires d'un point de C; par p l'arc compté à partir d'un point fixe c_0, de sorte que $c_0c = p$, $c_0c' = p + dp$, etc.; ξ, η, ζ

---

*) En effet, on a, parceque les tangentes t, t', t'' . . sont perpendiculaires aux éléments de la courbe B, $oa = oa'$, $o'a' = o'a''$, $o''a'' = o''a'''$, etc.; ou bien $oo' = o'a' - oa$; $o'o'' = o''a'' - o'a''$, etc.; c'est à dire, la courbe $aa'a''$ . . est engendrée par le développement de la courbe $oo'o''$ . . .

sont des fonctions de p; j'écris en outre pour abréger

$$\varkappa = +\sqrt{\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial p^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial p^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial p^2}\right)^2}.$$

Exprimons maintenant la courbe $\boldsymbol{B}$ ou $aa'a''\ldots$, développante de $\boldsymbol{O}$ ou de la courbe $oo'o''\ldots$ Posant $co=\lambda$, l'angle $aol=h$, $ao=f$, la courbe $oo'o''\ldots$ est donnée par une équation entre λ et p. Entre ces trois quantités λ, h, f il y a deux relations. Décrivons le petit arc de cercle $o\beta$ autour de c et nous aurons, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$o\beta = oo'\sin\left(h+\frac{\partial h}{\partial p}dp\right) = \frac{\partial f}{\partial p}\sin h\,dp$$

$$o'\beta = oo'\cos\left(h+\frac{\partial h}{\partial p}dp\right) = \frac{\partial f}{\partial p}\cos h\,dp.$$

Mais $o\beta = oc$ angle $(l', l) = \lambda.\varkappa\,dp$

$$o'\beta = c'\beta - c'o' = co + cc' - c'o' = cc' - (c'o' - co) = dp - \frac{\partial\lambda}{\partial p}dp.$$

En comparant les expressions de $o\beta$ et de $o'\beta$, on obtient

$$(4.)\quad \begin{cases} \sin h\dfrac{\partial f}{\partial p} = \varkappa\lambda \\ \cos h\dfrac{\partial f}{\partial p} = 1-\dfrac{\partial\lambda}{\partial p}. \end{cases}$$

Pour calculer les coordonnées de a, j'abaisse de a sur l une perpendiculaire $a\alpha$. Cette perpendiculaire est parallèle au rayon de courbure de $\boldsymbol{C}$ en c; car elle rencontre la tangente l et la tangente immédiatement précédente, donc elle se trouve dans le plan osculateur de $\boldsymbol{C}$, et elle est perpendiculaire à la tangente l de $\boldsymbol{C}$. Donc, en désignant les coordonnées de a par x, y, z et en écrivant, comme à l'ordinaire $\frac{d\xi}{dp}=\xi'$, $\frac{d^2\xi}{dp^2}=\xi''$, etc., nous aurons

$$x = \xi - \xi'.c\alpha + \frac{\xi''}{\varkappa}a\alpha, \quad \text{ou bien}$$

$$(5.)\quad \begin{cases} x = \xi-\xi'(\lambda+f\cos h)+\dfrac{\xi''}{\varkappa}f\sin h \\ y = \eta-\eta'(\lambda+f\cos h)+\dfrac{\eta''}{\varkappa}f\sin h \\ z = \zeta-\zeta'(\lambda+f\cos h)+\dfrac{\zeta''}{\varkappa}f\sin h. \end{cases}$$

Si l'on considère λ comme fonction de p, et f et h comme définies par les équations (4.), les équations (5.) représenteront la développante $\boldsymbol{B}$.

Supposons que la relation entre λ et p qui définit la courbe $oo'o''$.. contienne un paramètre q, et que la constante arbitraire qui s'introduit en déterminant f par la relation

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \sqrt{z^2\lambda^2 + \left(1 - \frac{\partial \lambda}{\partial p}\right)^2}$$

soit de même une fonction de q; les équations (5.), dont les seconds membres renferment maintenant deux variables indépendantes p et q, représenteront une surface courbe F, plus générale même que celle que nous cherchons. Reste encore à satisfaire à la condition, que le fil t qui développe une des courbes O soit toujours tangent à F, ou, ce qui revient au même, aux sections planes A, A', A''.. de F. Cette condition s'exprime, comme nous avons vu (n° III, formule 2) par l'équation

$$(6.) \qquad \sin h \frac{\partial \lambda}{\partial q} = f \frac{\partial h}{\partial q}.$$

Ainsi le problème est réduit à trouver trois fonctions f, h, λ des variables p et q qui satisfassent aux trois équations

$$(7.) \qquad \begin{cases} \sin h \dfrac{\partial f}{\partial p} = z\lambda \\ \cos h \dfrac{\partial f}{\partial p} = 1 - \dfrac{\partial \lambda}{\partial p} \\ \sin h \dfrac{\partial \lambda}{\partial q} = f \dfrac{\partial h}{\partial q} \end{cases}$$

où z désigne une fonction donnée de la variable p seule. La discussion directe de ces équations conduit à une équation différentielle partielle qui s'intègre sans difficulté *); mais en faisant usage de la propriété des lignes de courbure planes, de couper la surface partout sous le même angle, la question se ramène immédiatement à des équations différentielles ordinaires. Il s'agit, pour ce but, d'exprimer que l'angle φ entre le plan tangent de la surface F

---

*) En effet, en écrivant pour abréger $\log \operatorname{tang} \frac{h}{2} = w$, on peut remplacer les équations (7.) par les suivantes

$$(a.) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial q} = f \frac{\partial w}{\partial q}$$

$$(b.) \qquad 1 - \frac{\partial \lambda}{\partial p} = z\lambda \operatorname{cotg} h$$

$$(c.) \qquad \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{z\lambda}{\sin h}.$$

et le plan de la ligne de courbure plane A reste invariable le long de A; ou bien comme ces différentes courbes planes A sont déterminées par la valeur correspondante de p, que l'angle φ est une fonction de p. Le plan tangent en a passe par t et aa', donc c'est le plan mené par t et t', ou bien le plan osculateur de O en o. Menons par le centre d'une sphère quatre rayons, parallèles aux droites t, t', l, l' et désignons leurs extrémités par les mêmes lettres; joignons t et t', t et l, t' et l par des arcs de grands cercles dont le dernier passera évidemment par l'. Nous aurons dans cette figure sphérique

$$tl = h; \quad t'l' = h + \frac{\partial h}{\partial p}\,dp; \quad ll' = \varkappa dp; \quad \text{l'angle } ltl' = \varphi.$$

En décrivant autour de l, avec le rayon sphérique $t'l$ le petit arc $t'\tau$, nous aurons dans le triangle rectangle infiniment petit $tt'\tau$

$$t'\tau \operatorname{cotang} \varphi = t\tau.$$

On en dérive par différentiation

$$(a'.) \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\,\partial q} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial w}{\partial q} + f\frac{\partial^2 w}{\partial p\,\partial q} = \frac{\varkappa\lambda}{\sin h}\frac{\partial w}{\partial q} + \frac{\dfrac{\partial \lambda}{\partial q}}{\dfrac{\partial w}{\partial q}}\frac{\partial^2 w}{\partial p\,\partial q}$$

$$(b'.) \qquad -\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\,\partial q} = -\frac{\varkappa\lambda}{\sin h^2}\frac{\partial h}{\partial q} + \frac{\partial \lambda}{\partial q}\varkappa \operatorname{cotg} h.$$

En ajoutant ces deux équations on obtient à cause de $\dfrac{\partial w}{\partial q} = \dfrac{1}{\sin h}\dfrac{\partial h}{\partial q}$

$$(c'.) \qquad o = \frac{\partial \lambda}{\partial q}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 w}{\partial p\,\partial q}}{\dfrac{\partial w}{\partial q}} + \varkappa \operatorname{cotg} h\right).$$

L'équation $\dfrac{\partial \lambda}{\partial q} = 0$ conduirait à une surface où toutes les courbes B du second système sont les développantes d'une *seule* courbe O; c'est le cas des surfaces développables, exclu de nos considérations, parceque nous avons supposé, que chaque ligne de courbure plane détermine un plan; il faut donc que l'on égale l'autre facteur à zéro; cela fournit l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial p\,\partial q} + \varkappa \operatorname{cotg} h \frac{\partial w}{\partial q} = 0; \qquad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial p\,\partial q} + \frac{\varkappa \cos h}{\sin h^2}\frac{\partial h}{\partial q} = 0,$$

d'où vient, en intégrant

$$(c'.) \qquad \frac{\partial w}{\partial p} - \frac{\varkappa}{\sin h} = \psi(p).$$

Ainsi le système d'équations (*a.*), (*b.*), (*c.*) est remplacé par les équations (*a.*), (*b.*), (*c'.*), en partant desquelles on peut réciproquement parvenir à (*c.*).

Mais $tt_1 = tl - t_1 l = tl - t'l = tl - t'l' + ll' = \varkappa dp - \frac{\partial h}{\partial p} dp$

et $$t'\tau = \sin t'l \,.\, \text{l'angle}\, tll' = \sin h \,.\, \varkappa' dp,$$

où j'ai désigné par $\varkappa'$ la seconde courbure de l'arête de rebroussement de P, ou de la courbe $cc'c'' \ldots$, comme $\varkappa$ en est la première. Car en effet, l'angle sphérique tll' est égal à l'angle dièdre formé dans la figure précédente par les deux plans dont l'un contient t et l, et l'autre t' et l' ou par deux plans osculateurs consécutifs de $cc'c'' \ldots$ On obtient par là

$$\sin h \,.\, \varkappa' \operatorname{cotang} \varphi = \varkappa - \frac{\partial h}{\partial p}.$$

Mais, comme nous avons remarqué, $\operatorname{cotang} \varphi$ est une fonction de la variable p, donc il en sera de même de $\varkappa' \operatorname{cotang} \varphi$, et l'on pourra poser

$$(8.) \qquad \frac{1}{\sin h}\left(\frac{\partial h}{\partial p} - \varkappa\right) = \psi(p);$$

c'est l'équation $(c'.)$ de la note. L'équation (8.) est évidemment l'intégrale de l'équation différentielle partielle qui resulte des trois équations (7.) en éliminant f et λ; on peut donc remplacer ces équations par le système suivant

$$(9.) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\sin h}\left(\dfrac{\partial h}{\partial p} - \varkappa\right) = \psi(p) \\ 1 - \dfrac{\partial \lambda}{\partial p} = \varkappa \lambda \operatorname{cotg} h \\ f = \sin h \dfrac{\dfrac{\partial \lambda}{\partial q}}{\dfrac{\partial h}{\partial q}}. \end{cases}$$

La première relation (9.) est une de celles qui deviennent intégrables, en supposant une seule intégrale particulière connue; j'écrirai pour ce but $\frac{1}{\sin h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial p} - k\right)$ au lieu de ψ. Ainsi:

Désignons par h_1, ξ, η, ζ quatre fonctions de p, dont les trois dernières satisfont à l'équation

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1,$$

et posons pour abréger

$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = \varkappa^2;$$

si l'on détermine les quantités h et λ par les équations intégrables du premier ordre

$$\frac{1}{\sin h}\left(\frac{\partial h}{\partial p} - \varkappa\right) = \frac{1}{\sin h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial p} - \varkappa\right)$$

$$1 - \frac{\partial \lambda}{\partial p} = \varkappa\lambda \operatorname{cotg} h,$$

et que l'on introduise comme constantes d'intégration deux fonctions arbitraires d'une quantité q, les surfaces à un système de lignes de courbure planes sont représentées par les équations

$$x = \xi - \xi'(\lambda + f\cos h) + \frac{\xi''}{\varkappa} f \sin h$$

$$y = \eta - \eta'(\lambda + f\cos h) + \frac{\eta''}{\varkappa} f \sin h \qquad f = \sin h \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial q}}{\frac{\partial h}{\partial q}},$$

$$z = \zeta - \zeta'(\lambda + f\cos h) + \frac{\zeta''}{\varkappa} f \sin h;$$

l'équation $p =$ const. appartient au système de lignes de courbure planes, et l'équation $q =$ const. à l'autre système.

Breslau, Juin 1857.

19.

Zur Theorie der quadratischen Formen.

(Von Herrn *Lipschitz*.)

Die Lehre der binären quadratischen Formen in der von *Gauſs* gegründeten Theorie der complexen Zahlen ist durch *Dirichlet* so vollständig ausgebildet worden *), dafs man Untersuchungen über quadratische Formen aus dem Gebiete der reellen Zahlen in das Gebiet dieser complexen von der Form $a+b\sqrt{-1}$ leicht überträgt. In einem früheren Aufsatz ist die Beziehung zwischen der Formenanzahl einer bestimmten Determinante und der Formenanzahl einer andern Determinante, welche von der ersten nur durch einen quadratischen Factor verschieden ist, durch elementare Betrachtungen entwickelt **). Es genügt jetzt darauf hinzuweisen, dafs das entsprechende Problem für complexe Zahlen, welches man auch durch die von *Dirichlet* angewandten unendlichen Reihen und Producte erledigen könnte, durch dieselben Hülfsmittel gelöst wird, deren ich mich damals bedient habe, und die sich aus der Transformation einer Form in eine andre durch lineare Substitutionen ergeben.

Die quadratische Form

$$(1.) \qquad ax^2+2bxy+cy^2,$$

in der a, b, c bestimmte und x, y unbestimmte complexe ganze Zahlen bezeichnen, und deren Determinante $b^2-ac=D$ sei, geht durch die Substitution

$$(2.) \qquad \begin{cases} x = \alpha x'+\beta y', \\ y = \gamma x'+\delta y', \end{cases}$$

in die Form

$$(3.) \qquad a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2$$

über, deren Determinante $b'^2-a'c'=D'=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2D$ ist. Nach *Dirichlet's* Vorgang setzen wir voraus, dafs die complexen Zahlen a, b, c ohne gemeinschaftlichen Theiler sind; dann können aber die Zahlen a, $2b$, c entweder den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler 1, oder $1+\sqrt{-1}$, oder 2 haben, und

*) Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes, d. Journ. Bd. XXIV p. 291 ff.

**) Bd. LIII p. 238.

diesen 3 Fällen entsprechend heifst die Form (a, b, c) eine Form der ersten, zweiten, dritten Art *). Es sei nun

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_h$$

ein vollständiges System der Formen erster Art von der Determinante D **); man wende auf die Form φ_1 die sämmtlichen Substitutionen $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ an, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = p$, einer complexen Primzahl, ist, unterwerfe die hervorgehenden Formen der Bedingung ohne Theiler und von der ersten Art zu sein, und ordne sie in Classen, ebenso verfahre man nach der Reihe mit den Formen $\varphi_2, \ldots, \varphi_h$; so entsteht ein vollständiges System der Formen erster Art von der Determinante $D' = p^2 D$, und zwar enthält jede Form φ dieselbe Anzahl Formen der Determinante D' unter sich. Diese Anzahl bestimmt das Verhältnifs der Formenanzahl h der Determinante D und der Formenanzahl h' der Determinante D', und dasselbe läfst sich angeben, wie folgt:

Es bezeichne die Characteristik N die Norm einer complexen Zahl, so dafs $N(c + d\sqrt{-1}) = c^2 + d^2$, das Symbol $\left(\frac{D}{p}\right)$ sei $= \pm 1$, je nachdem D im complexen Zahlensystem quadratischer Rest der Primzahl p ist, oder nicht †), endlich sei T, U die Fundamentallösung ††) der unbestimmten Gleichung

$$(4.) \qquad t^2 - Du^2 = 1,$$

d. h. diejenige Lösung, für welche, wenn t, u eine beliebige Lösung bezeichnet, die Ungleichheit gilt

$$1 < N(T + U\sqrt{D}) \leqq N(t + u\sqrt{D}),$$

sobald nur $1 < N(t + u\sqrt{D})$ ist, und T', U' die Fundamentallösung der unbestimmten Gleichung

$$(5.) \qquad t^2 - D'u^2 = 1.$$

Dann hat man, wenn p nicht $= 1 + \sqrt{-1}$ ist, und nicht in D aufgeht, die Relation

$$(6.) \qquad h' = h \frac{\log N(T + U\sqrt{D})}{\log N(T' + U'\sqrt{D'})} \left(N(p) - \left(\frac{D}{p}\right)\right),$$

und wenn $p = 1 + \sqrt{-1}$ ist, oder in D aufgeht, die Relation

$$(7.) \qquad h' = h \frac{\log N(T + U\sqrt{D})}{\log N(T' + U'\sqrt{D'})} N(p).$$

---

*) Die angeführte Abhandlung Bd. XXIV p. 324.
**) p. 348 ff.
†) p. 306 ff.
††) p. 337 ff.

Der Einfachheit wegen ist angenommen worden, dafs der Quotient der Determinanten D und D' das Quadrat einer Primzahl sei; man bemerkt aber sofort, dafs das Verhältnifs der Formenanzahlen h und h' in dem Fall, dafs der Quotient der Determinanten das Qnadrat *irgend einer* ganzen Zahl ist, durch wiederholte Anwendung der angegebenen Sätze erhalten wird.

Ebenso findet man den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Formen erster, zweiter, dritter Art derselben Determinante, wobei nur darauf zu achten ist, dafs das Vorhandensein von Formen zweiter Art an die nothwendige und ausreichende Bedingung $D \equiv 1 \pmod 2$, das Vorhandensein von Formen dritter Art auf gleiche Weise an die Bedingung $D \equiv \pm 1 \pmod 4$ geknüpft ist. Da die Formen erster Art auf dieselbe Weise von den Formen zweiter, als diese von den Formen dritter Art abhangen, so kann man die Resultate bis zu einem gewissen Punct zusammen aussprechen. Es sei

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_h$$

ein vollständiges System der Formen zweiter (dritter) Art; man wende auf jede Form die sämmtlichen Substitutionen $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ an, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = 1 + \sqrt{-1}$ ist, unterwerfe die hervorgehenden Formen der Bedingung, aus Formen erster (zweiter) Art der Determinante D durch Multiplication mit dem Factor $1+\sqrt{-1}$ abgeleitet zu sein, und ordne sie in Classen: so bilden die Repräsentanten ein vollständiges System der Formen erster (zweiter) Art von der Determinante D, jede mit $1+\sqrt{-1}$ multiplicirt. Da nun jede Form φ gleichviel Formen unter sich enthält, und man diese Anzahl bestimmen kann, so ist der Quotient der Anzahl Formen erster und zweiter, zweiter und dritter Art bekannt. Es seien diese Formenanzahlen resp. h, h_2, h_3, ferner T_2, U_2 die Fundamentallösung der unbestimmten Gleichung

$$(8.) \qquad t^2 - Du^2 = 2\sqrt{-1},$$

so dafs

$$1 < N\left(\frac{T_2 + U_2\sqrt{D}}{1+\sqrt{-1}}\right) \leqq N\left(\frac{t+u\sqrt{D}}{1+\sqrt{-1}}\right),$$

und T_3, U_3 die Fundamentallösung der Gleichung

$$(9.) \qquad t^2 - Du^2 = 4,$$

so dafs

$$1 < N\left(\frac{T_3 + U_3\sqrt{D}}{2}\right) \leqq N\left(\frac{t+u\sqrt{D}}{2}\right),$$

so ergeben sich die folgenden Gleichungen

(10.) $D \equiv \pm 1 \pmod 4$, $\quad h = 2h_2$,

(11.) $D \equiv \pm 1 + 2\sqrt{-1} \pmod 4$, $\quad h = 2h_2 \dfrac{\log N\left(\dfrac{T_2 + U_2\sqrt{D}}{1+\sqrt{-1}}\right)}{\log N(T+U\sqrt{D})}$,

(12.) $D \equiv \pm 1 \pmod{(1+\sqrt{-1})^5}$, $\quad h_2 = h_3$,

(13.) $D \equiv \pm 5 \pmod{(1+\sqrt{-1})^5}$, $\quad h_2 = 3h_3 \dfrac{\log N\left(\dfrac{T_3 + U_3\sqrt{D}}{2}\right)}{\log N\left(\dfrac{T_2 + U_2\sqrt{D}}{1+\sqrt{-1}}\right)}$.

Die beiden ersten setzen $D \equiv 1 \pmod 2$, die beiden letzten $D \equiv \pm 1 \pmod 4$ voraus, wie es durch das Existiren von Formen der zweiten oder dritten Art bedingt wird.

20.

Über die der Einwirkung der Schwere entzogenen, aber unter dem Einflusse der Erdbewegung rotirenden Körper. — Theorie des *Foucault*'schen Gyroscops.

(Von Herrn *Ed. Lottner* zu Lippstadt.)

Einleitung.

Bald nachdem *Foucault* durch die Drehung der Schwingungsebene eines Pendels die tägliche Rotation der Erde nachgewiesen hatte, gab er die Construction eines von ihm mit dem Namen „Gyroscop" bezeichneten Instrumentes, welches nicht nur das erwähnte Factum bestätigt, sondern unter gewissen Bedingungen die Lage des Meridians des Beobachtungsortes so wie die geographische Breite desselben ohne astronomische Hülfsmittel angiebt. Eine Abbildung und Beschreibung desselben nach den wirklichen Proportionen findet man im dritten Bande der populären Astronomie von *Arago*, so wie in der Note *Foucault's* in dem „Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences tome XXXII et tome XXXV." Das Gyroscop hat im Wesentlichen die Einrichtung der *Bohnenberger*'schen Maschine und besteht aus einem metallenen, um eine verticale Axe mit möglichst grofser Beweglichkeit drehbaren Ringe $\mathfrak{A}$; derselbe trägt einen zweiten, um eine horizontale Axe drehbaren Ring $\mathfrak{B}$ und dieser wiederum die jene rechtwinklig durchschneidende Axe einer mit grofser Geschwindigkeit sich um dieselbe drehenden schweren Scheibe von Bronze $\mathfrak{C}$ von $7\frac{1}{2}$ Centimeter Durchmesser. Durch eine besondere Vorrichtung wird dieser Scheibe eine 8—10 Minuten dauernde energische Rotation mitgetheilt. Da sie der Einwirkung der Schwere durch die Construction des Apparates entzogen, sonst aber vollkommen frei beweglich ist, so würde ihre Axe, wenn die tägliche Umdrehung nicht stattfände, bei jeder beliebigen Stellung im Gleichgewichte sein. Das ist aber nicht der Fall, und wenn man *Foucault's* Beobachtungen zusammenfafst, so kann man die Erscheinungen, welche das Gyroscop darbietet, folgendermafsen characterisiren:

1) „Bei vollkommener Freiheit der Bewegung ist die Axe der Scheibe „nur dann im relativen Gleichgewichte, wenn sie der Erdaxe parallel steht, „und zwar ist das Gleichgewicht stabil, wenn bei dieser Stellung die Scheibe „im Sinne der täglichen Umdrehung rotirt, und labil im entgegengesetzten „Falle. Bei einer andern Stellung vollführt die Axe Schwingungen, die „symmetrisch in Bezug auf die Gleichgewichtslage sind und mit den Schwin- „gungen eines Raumpendels um die Verticale herum Aehnlichkeit haben."

2) „Ist die Axe gezwungen sich in einer gegen die Erde festge- „stellten Ebene zu bewegen, so ist sie nur dann im Gleichgewichte, wenn „sie der Richtung der Erdaxe so nahe als möglich kommt oder, anders aus- „gedrückt, wenn sie in die Projection der Richtung der Erdaxe auf die ge- „nannte feste Ebene fällt. Das Gleichgewicht ist stabil oder labil ganz wie „in (1). Bei einer andern Stellung vollführt die Axe Oscillationen um die „Gleichgewichtslage und würde also, wenn die Rotation hinlänglich lange „dauerte, in Folge der Widerstände wie ein Pendel zur Ruhe kommen."

Daraus folgt, dafs wenn die Axe nach *Foucault's* Einrichtung im Horizonte sich bewegen mufs, sie die Bestimmung des Meridians, und wenn sie gezwungen ist sich im Meridiane zu bewegen, sie die geographische Breite des Beobachtungsortes liefert.

Die Gleichgewichtslage ist theilweise bereits von *Bertrand* im Octoberhefte 1856 des *Liouville*'schen Journals mittelst der *Poinsot*'schen Drehungstheorie nachgewiesen worden. Die Betrachtung der Oscillationen ist jedoch daselbst nur nebenher abgehandelt und ergiebt kein genaues Resultat. Die nachfolgende Abhandlung fafst das Problem rein analytisch auf. Die Resultate stimmen in Bezug auf die Lage des Gleichgewichts vollkommen mit den *Foucault*'schen Beobachtungen überein; aufserdem sind aber die Gröfsen, welche die Lage der Axe, so wie den Drehungswinkel der Scheibe zu einer beliebigen Zeit angeben, *explicite durch die Zeit* ausgedrückt und die Dauer der Oscillationen sowohl in vollkommener Strenge als zugleich angenähert angegeben. Nachdem diese Arbeit bereits fast ganz vollendet war, und ich schon einige Resultate (namentlich No. 5) Herrn Professor *Weierstrafs* brieflich mitgetheilt hatte, erhielt ich durch Herrn *Foucault* eine eben in den „Nouvelles annales des Mathématiques tome XIV" erschienene analytische Abhandlung des Herrn *Yvon Villarceau* über denselben Gegenstand. Da in derselben jedoch die Bewegung der Axe in vollkommener Freiheit nicht betrachtet und die Lösung des Problems da, wo es sich um die Integration

durch die elliptischen Functionen handelt, nicht in der schönen analytischen Form vermittelst der Transcendente Θ ausgeführt ist, welche ***Jacobi*** zuerst in den mechanischen Problemen anzuwenden gelehrt, und welche von Herrn Professor ***Richelot*** und Dr. ***Dumas*** öfter mit Erfolg benutzt worden, auch die Art und Weise, wie Herr ***Villarceau*** zu den Differenzialgleichungen gelangt, von der meinigen ganz verschieden ist; so habe ich nicht Anstand genommen, meine Arbeit in diesem Journale zu veröffentlichen.

Ich will aufserdem noch bemerken, dafs wenn der erste Ring nicht vertical, sondern beliebig gestellt ist, man für die Gröfse b, welche die geographische Breite bedeutet, den Winkel setzen mufs, welchen die Axe des Ringes mit der Ebene des Erdäquators macht.

§. 1

Bestimmung der Coordinaten.

Denkt man sich das Instrument von allen Zufälligkeiten entblöfst und in möglichster Allgemeinheit aufgefafst, so hat man die Bewegung eines Systems von drei Körpern zu betrachten, die mit einander in nachfolgender Weise verbunden sind:

$\mathfrak{A}$ sei ein nur um die verticale Axe $\mathfrak{Z}_3' O \mathfrak{Z}_3$ ohne Reibung drehbarer beliebiger Körper; um eine mit ihm unveränderlich verbundene horizontale Axe $\Xi_3' O \Xi_3$ drehe sich ein zweiter Körper $\mathfrak{B}$; mit diesem wiederum sei unveränderlich eine gegen $\Xi_3' O \Xi_3$ senkrechte Axe $Z_3' O Z_3$ verbunden, um welche ein dritter Körper $\mathfrak{C}$ mit beliebiger Geschwindigkeit rotiren kann. Der Punkt O wird somit während der Bewegung, wenn das System sich nur drehte, nicht fortschritte, fest bleiben, und der Körper $\mathfrak{C}$ sich in jeder beliebigen Richtung drehen können. Es seien ferner, dies sei vorläufig die einzige Annahme, die genannten drei Axen Hauptaxen der drei Körper.

1) Die mit den Körpern fest verbundenen Coordinatenaxen seien

für den Körper $\mathfrak{A}$ die Axe $O\mathfrak{Z}_3$ und zwei darauf senkrechte $O\mathfrak{Y}_3$, $O\mathfrak{X}_3$
– – – $\mathfrak{B}$ – – $O\Xi_3$ – – – – OH_3, OZ_3
– – – $\mathfrak{C}$ – – OZ_3 – – – – OY_3, OX_3

Die hierauf bezüglichen Coordinaten eines Punktes

$$(1.)\quad \begin{cases} \text{des Körpers } \mathfrak{A} \text{ seien } \mathfrak{x}_3, \mathfrak{y}_3, \mathfrak{z}_3 \\ \text{– – } \mathfrak{B} \text{ – } \xi_3, \eta_3, \zeta_3 \\ \text{– – } \mathfrak{C} \text{ – } x_3, y_3, z_3 \end{cases}$$

Dieselben sind von der Zeit vollkommen unabhängig. Die Körper mögen, um

die Betrachtung anschaulich zu machen, zuerst so gestellt sein, dafs $O\mathfrak{X}_3$, $O\Xi_3$, OX_3 zusammen in die Ebene des Meridians nach Süden hin, $O\mathfrak{Z}_3$, OZ_3, OZ_3 in den von O aus nach dem Mittelpunkt der Erde gerichteten Theil der Verticalen, $O\mathfrak{Y}_3$, OH_3, OY_3 senkrecht dagegen in die Richtung nach Westen fallen.

2) Man denke sich jetzt $O\Xi_3$ um einen Winkel ψ gegen den Meridian von Osten nach Westen (entgegengesetzt der täglichen Umdrehung), OX_3 um einen Winkel φ von Westen nach Osten (im Sinne der Umdrehung) gedreht und zugleich OZ_3 um einen Winkel ϑ von der Verticalen entfernt, so dafs OX_3 sich über der Horizontalebene erhebt. Dann seien die Coordinaten eines Punktes der drei Körper bezogen auf die drei neuen mit der Zeit beweglichen Axensysteme, respective

$$x_2,\ y_2,\ z_2,\ \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2,\ \mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{z}_2,$$

und die Cosinus der Winkel, welche das neue System der OX_2, OY_2, OZ_2 mit dem alten macht bezüglich

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{a}_1, & \mathfrak{b}_1, & \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}_2, & \mathfrak{b}_2, & \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{a}_3, & \mathfrak{b}_3, & \mathfrak{c}_3, \end{array}$$

so dafs

$$(2.)\quad \begin{cases} x_2 = \mathfrak{a}_1 x_3 + \mathfrak{b}_1 y_3 + \mathfrak{c}_1 z_3 \\ y_2 = \mathfrak{a}_2 x_3 + \mathfrak{b}_2 y_3 + \mathfrak{c}_2 z_3 \\ z_2 = \mathfrak{a}_3 x_3 + \mathfrak{b}_3 y_3 + \mathfrak{c}_3 z_3. \end{cases}$$

Diese Cosinus drücken sich alsdann bekanntlich, wie folgt, aus

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= \cos\vartheta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi, & \mathfrak{a}_2 &= \cos\vartheta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi \\ \mathfrak{b}_1 &= \cos\vartheta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi, & \mathfrak{b}_2 &= \cos\vartheta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi \\ \mathfrak{c}_1 &= \sin\vartheta \sin\psi, & \mathfrak{c}_2 &= \sin\vartheta \cos\psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_3 &= -\sin\vartheta \sin\varphi \\ \mathfrak{b}_3 &= -\sin\vartheta \cos\varphi \\ \mathfrak{c}_3 &= \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Man erhält ähnliche Ausdrücke für ξ_2, η_2, ζ_2, wenn man in den neun Cosinus den Winkel $\varphi = 0$ setzt, da bei dem Körper $\mathfrak{B}$ keine Rotation um die neue Axe $O\Xi_2$ stattfindet; ferner werden $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{z}_2$ erhalten, wenn φ und $\vartheta = 0$ gesetzt werden, da $\mathfrak{A}$ nur um die Verticale sich dreht. Weil jedoch wegen der Menge der Buchstaben, die noch später eingeführt werden müssen, die Uebersicht sehr erschwert werden würde, so sollen die Werthe von ξ_2,

η_2, ζ_2, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{z}_2$ nicht hingeschrieben, sondern im Folgenden einfach aus denen für x_2, y_2, z_2 abgeleitet werden.

3) Man transformire jetzt die Coordinaten auf ein neues Axensystem. Die neue z_1 Axe werde parallel der Erdaxe nach Süden hin gezählt, die x_1 Axe senkrecht darauf in der Ebene des Meridians von O aus in der Verlängerung des Radius des Breitenkreises, die y_1 Axe möge dieselbe wie die y_2 Axe sein. Bezeichnet man alsdann die geographische Breite mit b, so ist

$$(3.)\quad \begin{cases} x_1 = x_2 \sin b - z_2 \cos b \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = x_2 \cos b + z_2 \sin b \end{cases}$$

Substituirt man die Werthe von x_2, y_2, z_2 in (3.), so ergiebt sich

$$(4.)\quad \begin{cases} x_1 = a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1 z_3 \\ y_1 = a_2 x_3 + b_2 y_3 + c_2 z_3 \\ z_1 = a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3 z_3, \end{cases}$$

wo

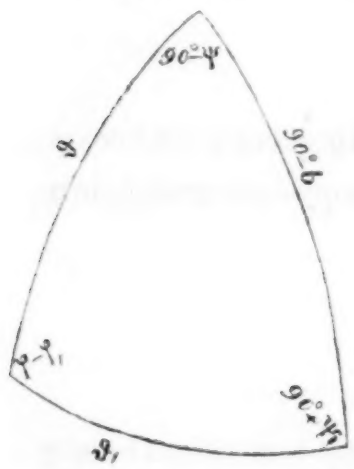
$$(5.)\quad \begin{cases} a_1 = \mathfrak{a}_1 \sin b - \mathfrak{a}_3 \cos b = (\cos\vartheta \sin\psi \sin b + \sin\vartheta \cos b)\sin\varphi + \cos\psi \sin b \cos\varphi \\ b_1 = \mathfrak{b}_1 \sin b - \mathfrak{b}_3 \cos b = (\cos\vartheta \sin\psi \sin b + \sin\vartheta \cos b)\cos\varphi - \cos\psi \sin b \sin\varphi \\ c_1 = \mathfrak{c}_1 \sin b - \mathfrak{c}_3 \cos b = \sin\vartheta \sin\psi \sin b - \cos\vartheta \cos b \\ a_2 = \mathfrak{a}_2 = \cos\vartheta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi \\ b_2 = \mathfrak{b}_2 = \cos\vartheta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi \\ c_2 = \mathfrak{c}_2 = \sin\vartheta \cos\psi \\ a_3 = \mathfrak{a}_1 \cos b + \mathfrak{a}_3 \sin b = (\cos\vartheta \sin\psi \cos b - \sin\vartheta \sin b)\sin\varphi + \cos\psi \cos b \cos\varphi \\ b_3 = \mathfrak{b}_1 \cos b + \mathfrak{b}_3 \sin b = (\cos\vartheta \sin\psi \cos b - \sin\vartheta \sin b)\cos\varphi - \cos\psi \cos b \sin\varphi \\ c_3 = \mathfrak{c}_1 \cos b + \mathfrak{c}_3 \sin b = \sin\vartheta \sin\psi \cos b + \cos\vartheta \sin b. \end{cases}$$

Die neun Cosinus a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, welche von den drei veränderlichen Winkeln ϑ, φ, ψ und dem constanten b abhängen, mögen durch drei analoge Gröfsen ϑ_1, φ_1, ψ_1 ausgedrückt werden, die die Lage der Körper gegen eine mit dem Erdäquator parallele Ebene und gegen die Erdaxe ganz ebenso bestimmen, wie die frühern ϑ, φ, ψ, die Lage gegen den Horizont und die Verticale angaben. Analytisch drückt sich dies durch folgende Gleichungen aus:

$$(6.)\quad \begin{cases} a_1 = \cos\vartheta_1 \sin\psi_1 \sin\varphi_1 + \cos\psi_1 \cos\varphi_1 \\ b_1 = \cos\vartheta_1 \sin\psi_1 \cos\varphi_1 - \cos\psi_1 \sin\varphi_1 \\ c_1 = \sin\vartheta_1 \sin\psi_1 \end{cases}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} a_2 = \cos\vartheta_1 \cos\psi_1 \sin\varphi_1 - \sin\psi_1 \cos\varphi_1 \\ b_2 = \cos\vartheta_1 \cos\psi_1 \cos\varphi_1 + \sin\psi_1 \sin\varphi_1 \\ c_2 = \sin\vartheta_1 \cos\psi_1 \\ a_3 = -\sin\vartheta_1 \sin\varphi_1 \\ b_3 = -\sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 \\ c_3 = \cos\vartheta_1 . \end{cases}$$

Es kann kein Bedenken erregen, dafs bei der Gleichsetzung der Ausdrücke in (5.) und (6.) vier Gröfsen vermittelst neun Gleichungen durch drei neue ausgedrückt werden, zu deren Bestimmung schon drei Gleichungen genügten. Dafs ein Widerspruch dabei nicht auftreten kann, leuchtet aus der Natur der Sache ein, weil man sogleich die x_3, y_3, z_3 in die x_1, y_1, z_1 hätte transformiren können und die Wahl der Coordinatenebenen bei vollkommen freier Bewegung des Körpers $\mathfrak{C}$ willkürlich bleibt. Die Richtigkeit läfst sich aber auch abgesehen von aller geometrischen Bedeutung analytisch nachweisen.



Zu dem Ende construire man ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten ϑ, ϑ_1, 90^0-b sind. In ihm werden die gegenüberliegenden Winkel nach der Vergleichung der Gleichungen (5.) und (6.) respective $90^0+\psi_1$, $90^0-\psi$, $\varphi-\varphi_1$ sein. Das Dreieck drückt die Abhängigkeit der in Betracht kommenden Gröfsen vollständig aus, und gewährt grofsen Vortheil bei der Rechnung. Man kann nämlich statt der sechs ersten in (5.) und (6.) gegebenen Relationen die folgenden einführen:

für a_3 und b_3: $\cos\vartheta \sin\psi \cos b - \sin\vartheta \sin b = -\sin\vartheta_1 \cos(\varphi-\varphi_1)$
$\cos\psi \cos b = \sin\vartheta_1 \sin(\varphi-\varphi_1)$,

für a_2 und b_2: $\cos\vartheta \cos\psi = \cos\vartheta_1 \cos\psi_1 \cos(\varphi-\varphi_1) - \sin\psi_1 \sin(\varphi-\varphi_1)$
$\sin\psi = \cos\vartheta_1 \cos\psi_1 \sin(\varphi-\varphi_1) + \sin\psi_1 \cos(\varphi-\varphi_1)$,

für a_1 und b_1: $\cos\vartheta \sin\psi \sin b + \sin\vartheta \cos b$
$= \cos\vartheta_1 \sin\psi_1 \cos(\varphi-\varphi_1) + \cos\psi_1 \sin(\varphi-\varphi_1)$
$\cos\psi \sin b = -\cos\vartheta_1 \sin\psi_1 \sin(\varphi-\varphi_1) + \cos\psi_1 \cos(\varphi-\varphi_1)$,

welche sämmtlich durch Formeln, die für das sphärische Dreieck gelten, und mit Hülfe einiger Hülfslinien nachgewiesen werden können.

4) Man nehme jetzt noch die letzte Transformation vor. Der Anfangspunkt der Coordinaten werde in den Mittelpunkt der Erde verlegt, die Axe der x_1, welche an der Rotation der Erde Theil nimmt, möge nach der

Zeit t sich um einen Winkel χ von einer im Weltenraume als unveränderlich angenommenen Ebene in der Richtung von Westen nach Osten entfernt haben. Die neuen Coordinatenebenen sind jetzt der Erdäquator, die eben genannte und eine darauf senkrechte Ebene. Die positiven z mögen jetzt nach Norden hin gezählt werden. Die Abstände des Punktes O von den drei festen Ebenen seien a_0, b_0, c_0 und ϱ der Erdradius. Dann hat man:

$$(7.)\quad \begin{cases} x = a_0 + x_1 \cos\chi - y_1 \sin\chi \\ y = b_0 + x_1 \sin\chi + y_1 \cos\chi \\ z = c_0 - z_1, \end{cases}$$

wo $a_0 = \varrho \cos\chi \cos b$, $b_0 = \varrho \sin\chi \cos b$, $c_0 = \varrho \sin b$.

Hätte man unmittelbar das System der x_3, y_3, z_3 Axen in das der x, y, z, transformirt, so wäre folgende Transformation gefunden worden, durch welche die Lage eines Punktes der drei Körper gegen drei im Weltenraume unveränderliche Axen bestimmt wird:

$$(8.)\quad \begin{cases} x = a_0 + a x_3 + b y_3 + c z_3 \\ y = b_0 + a' x_3 + b' y_3 + c' z_3 \\ z = c_0 + a'' x_3 + b'' y_3 + c'' z_3, \end{cases}$$

wo dann

$$(9.)\quad \begin{cases} a = a_1 \cos\chi - a_2 \sin\chi, & a' = a_1 \sin\chi + a_2 \cos\chi, & a'' = -a_3 \\ b = b_1 \cos\chi - b_2 \sin\chi, & b' = b_1 \sin\chi + b_2 \cos\chi, & b'' = -b_3 \\ c = c_1 \cos\chi - c_2 \sin\chi, & c' = c_1 \sin\chi + c_2 \cos\chi, & c'' = -c_3 \end{cases}$$

erhalten worden wäre.

Es sei die gleichmäfsige Winkelgeschwindigkeit der Erde $= w$, so wird:

$$\chi = wt.$$

Ganz entsprechende Ausdrücke erhält man für ξ, η, ζ, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, wenn man bezüglich $\varphi = 0$, und $\varphi = 0$, $\vartheta = 0$, setzt.

§. 2.

Bestimmung der halben Summe der lebendigen Kraft.

Nach diesen Praeliminarien sollen nun die Differenzialgleichungen der Bewegung aufgestellt werden, und zwar zunächst mit der Annahme, dafs beschleunigende Kräfte auf die Körper wirken. Seien also X, Y, Z, Ξ, H, Z, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Componenten einer beschleunigenden Kraft, die bezüglich die Elemente dm des Körpers $\mathfrak{C}$, $d\mu$ des Körpers $\mathfrak{B}$, $d\mathfrak{m}$ des Körpers $\mathfrak{A}$ sollicitiren.

In allen Fällen, die mit dem vorliegenden Probleme Aehnlichkeit haben, ist es am sichersten, wenn man von der *Lagrange*'schen Form der Differenzialgleichungen Gebrauch macht. Wiewohl die Methode durchaus nicht die kürzeste und anschaulichste ist, so bleibt man beim Befolgen derselben am meisten vor Irrthümern bewahrt, weil dieselbe keine Betrachtung der statthabenden Bewegung, Zerlegung von Kräften und Geschwindigkeiten etc. erfordert, sondern einfach durch Rechnung zum Ziele führt. Sollte voraussichtlich die endliche Integration nicht gelingen, so ist es vortheilhaft, die *Jacobi-Hamilton*'sche Form zu gebrauchen (wie dies vom Professor *Richelot* und Dr. *Dumas* geschehen), weil sie die beste Form der Störungsgleichungen liefert. Im vorliegenden Falle gelingt aber die Integration vollkommen. Das *Lagrange*'sche Theorem lautet:

„Man drücke sämmtliche Coordinaten des körperlichen Systems durch „Gröfsen aus, welche die Bedingungsgleichungen identisch erfüllen, oder (was „genauer auf alle Fälle pafst) man drücke sie durch andere vollständig von „einander unabhängige Variable aus, die mithin auf die möglichst kleinste „Anzahl gebracht, und von denen die Lage des Systems im Raume abhängt. „(Solche sind in unserem Falle die Winkel ϑ, φ, ψ oder ϑ_1, φ_1, ψ_1). Diese „Variabeln substituire man in den Ausdruck für die halbe Summe der leben„digen Kraft

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right),$$

„wo die Summe auf alle Punkte des Systems ausgedehnt wird. T wird „dann die Gröfsen ϑ, φ, ψ, $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=\vartheta'$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\varphi'$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}=\psi'$ enthalten. Be„zeichnet man nun die Kräftefunction mit V, so dafs

$$dV = \Sigma m(Xdx+Ydy+Zdz),$$

„wo x, y, z, ebenfalls durch ϑ, φ, ψ, ersetzt sind, so sind

$$d\cdot\frac{\partial T}{\partial\vartheta_1'}-\frac{\partial T}{\partial\vartheta_1}-\frac{\partial V}{\partial\vartheta_1}=0$$

$$d\cdot\frac{\partial T}{\partial\varphi_1'}-\frac{\partial T}{\partial\varphi_1}-\frac{\partial V}{\partial\varphi_1}=0$$

$$d\cdot\frac{\partial T}{\partial\psi_1'}-\frac{\partial T}{\partial\psi_1}-\frac{\partial V}{\partial\psi_1}=0$$

„die Differenzialgleichungen des Problems.

Nun wird zwar in dem Beweise von ***Lagrange*** (Mécanique analytique II, section IV) angenommen, dafs die x, y, z aufser den unabhängigen Variabeln ϑ_1, φ_1, ψ_1 die Zeit t ***nicht*** explicite enthalten, was im vorliegenden Falle nicht pafst, weil in x, y, z der Winkel $\chi = \omega t$ vorkommt. Da aber ***Vieille*** (Cours complémentaire d'Analyse et de Mécanique rationnelle) nachgewiesen hat, dafs die aufgestellten Differenzialgleichungen auch in diesem Ausnahmefalle gelten, so kann hier unbedenklich davon Gebrauch gemacht werden.

Die halbe Summe der lebendigen Kraft wird hier, wo drei körperliche Systeme in die Betrachtung eingehen, die Form haben:

$$(11.)\quad T = \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)dm + \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)d\mu + \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{d\mathfrak{z}^2}{dt^2}\right)d\mathfrak{m},$$

wo die dreifache Integration sich auf alle materielle Punkte erstreckt. Aus (8.) folgt, weil x_3, y_3, z_3, ξ_3, η_3, ζ_3, $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{y}_3$, $\mathfrak{z}_3$ von der Zeit unabhängig sind,

$$(12.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{da_0}{dt} + x_3\dfrac{da}{dt} + y_3\dfrac{db}{dt} + z_3\dfrac{dc}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{db_0}{dt} + x_3\dfrac{da'}{dt} + y_3\dfrac{db'}{dt} + z_3\dfrac{dc'}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dc_0}{dt} + x_3\dfrac{da''}{dt} + y_3\dfrac{db''}{dt} + z_3\dfrac{dc''}{dt} \end{cases}$$

nebst ähnlichen Formeln für $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ etc. ...

Man erhebe jetzt ins Quadrat, addire und nehme das Integral. Bedenkt man, dafs die Integrale $\int x_3 y_3\, dm$, $\int x_3 z_3\, dm$, $\int y_3 z_3\, dm$ ... etc. verschwinden, weil die Axen der x_3, y_3, z_3 etc. Hauptaxen in Bezug auf den Punkt O sind, und dafs $\frac{dc_0}{dt} = 0$ ist, so wird erhalten:

$$\begin{aligned} 2T = {} & \int\left(\frac{da_0^2}{dt^2}+\frac{db_0^2}{dt^2}\right)dm + \left(\frac{da^2}{dt^2}+\frac{da'^2}{dt^2}+\frac{da''^2}{dt^2}\right)\int x_3^2\, dm \\ & + \left(\frac{db^2}{dt^2}+\frac{db'^2}{dt^2}+\frac{db''^2}{dt^2}\right)\int y_3^2\, dm + \left(\frac{dc^2}{dt^2}+\frac{dc'^2}{dt^2}+\frac{dc''^2}{dt^2}\right)\int z_3^2\, dm \\ & + 2\left(\frac{da_0}{dt}\frac{da}{dt}+\frac{db_0}{dt}\frac{da'}{dt}\right)\int x_3\, dm + 2\left(\frac{da_0}{dt}\frac{db}{dt}+\frac{db_0}{dt}\frac{db'}{dt}\right)\int y_3\, dm \\ & + 2\left(\frac{da_0}{dt}\frac{dc}{dt}+\frac{db_0}{dt}\frac{dc'}{dt}\right)\int z_3\, dm + \ldots . \end{aligned}$$

Die Integrale $\int x_3\, dm$ etc. drücken die Coordinaten des Schwerpunkts multi-

plicirt mit der Masse des Körpers aus. Bezeichnet man sie also mit $\overset{0}{x}_3$, $\overset{0}{y}_3$, $\overset{0}{z}_3$, so wird $\int x_3\,dm = M\overset{0}{x}_3$, $\int y_3\,dm = M\overset{0}{y}_3$, $\int z_3\,dm = M\overset{0}{z}_3$. Die Summe, in welcher die drei Integrale $\int x_3^2\,dm$, $\int y_3^2\,dm$, $\int z_3^2\,dm$ vorkommen, läfst sich auf elegante Weise durch drei neue Gröfsen p, q, r ausdrücken, wie dies von Prof. *Richelot* in seiner Abhandlung: „Ueber das Problem der Rotation eines festen Körpers, auf welchen beliebige Kräfte wirken", geschehen ist. Es sei nehmlich:

$$(13.)\quad \begin{cases} c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt} = -\left(b\frac{dc}{dt} + b'\frac{dc'}{dt} + b''\frac{dc''}{dt}\right) = p \\ a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt} = -\left(c\frac{da}{dt} + c'\frac{da'}{dt} + c''\frac{da''}{dt}\right) = q \\ b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt} = -\left(a\frac{db}{dt} + a'\frac{db'}{dt} + a''\frac{db''}{dt}\right) = r. \end{cases}$$

Bezeichnet man ferner mit A, B, C die drei Trägheitsmomente des Körpers $\mathfrak{C}$ in Bezug auf die durch den Punkt O gehenden Axen, so dafs

$$\int dm(y_3^2 + z_3^2) = A$$
$$\int dm(z_3^2 + x_3^2) = B$$
$$\int dm(x_3^2 + y_3^2) = C,$$

so wird:

$$(14.)\quad T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + M\left\{\left(\frac{da_0}{dt}\frac{da}{dt} + \frac{db_0}{dt}\frac{da'}{dt}\right)\overset{0}{x}_3 + \left(\frac{da_0}{dt}\frac{db}{dt} + \frac{db_0}{dt}\frac{db'}{dt}\right)\overset{0}{y}_3 + \left(\frac{da_0}{dt}\frac{dc}{dt} + \frac{db_0}{dt}\frac{dc'}{dt}\right)\overset{0}{z}_3\right\} + \tfrac{1}{2}Mq^2\cos^2 b\,\omega^2 + \text{einem ähnlichen Ausdrucke in Bezug auf die Körper } \mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{B}.$$

Die Gröfse $\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \cdots$ wird für die Behandlung des *Foucault*schen Gyroscops allein mafsgebend sein. Die Summe der beiden letzten Glieder von T, von denen das erste von den Coordinaten des Schwerpunkts abhängt und das letzte keine der unabhängigen Variablen enthält, bezeichne man deshalb kurz mit F, so dafs

$$(15.)\quad T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + F + \text{etc.}\ldots$$

Um nun die nothwendigen Differentiationen auszuführen, müssen die Gröfsen p, q, r nach ϑ_1', φ_1', ϑ_1, φ_1 differenziirt werden. Sie drücken die rechtwinkligen Seitengeschwindigkeiten der Geschwindigkeit der Umdrehung um die

Axen Ox_3, Oy_3, Oz_3 aus. Zerlegen wir sie der Bequemlichkeit der Rechnung wegen in die analogen Gröfsen der Umdrehung um die Axen Ox, Oy, Oz, Ox_1, Oy_1, Oz_1 und führen die Rechnung ganz allgemein aus, weil mehrere specielle Fälle später gebraucht werden. Es sei also[1]

$$(16.)\quad \begin{cases} -\left(b_1\frac{dc_1}{dt}+b_2\frac{dc_2}{dt}+b_3\frac{dc_3}{dt}\right)=p_1, & -\left(\beta_1\frac{d\gamma_1}{dt}+\beta_2\frac{d\gamma_2}{dt}+\beta_3\frac{d\gamma_3}{dt}\right)=p_1', \\ -\left(c_1\frac{da_1}{dt}+c_2\frac{da_2}{dt}+c_3\frac{da_3}{dt}\right)=q_1, & -\left(\gamma_1\frac{d\alpha_1}{dt}+\gamma_2\frac{d\alpha_2}{dt}+\gamma_3\frac{d\alpha_3}{dt}\right)=q_1', \\ -\left(a_1\frac{db_1}{dt}+a_2\frac{db_2}{dt}+a_3\frac{db_3}{dt}\right)=r_1, & -\left(\alpha_1\frac{d\beta_1}{dt}+\alpha_2\frac{d\beta_2}{dt}+\alpha_3\frac{d\beta_3}{dt}\right)=r_1', \end{cases}$$

wo α, β, γ die Coefficienten der Substitution (7.) sind

$$(17.)\quad \begin{cases} \alpha_1=\cos\chi, & \alpha_2=\sin\chi, & \alpha_3=0 \\ \beta_1=-\sin\chi, & \beta_2=\cos\chi, & \beta_3=0 \\ \gamma_1=0, & \gamma_2=0, & \gamma_3=-1 \end{cases}$$

Die a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' würden sich in der allgemeineren Bezeichnung von (9.), wie folgt, ausdrücken

$$(18.)\quad \begin{cases} a=a_1\alpha_1+a_2\beta_1+a_3\gamma_1, & b=b_1\alpha_1+b_2\beta_1+b_3\gamma_1, & c=c_1\alpha_1+c_2\beta_1+c_3\gamma_1 \\ a'=a_1\alpha_2+a_2\beta_2+a_3\gamma_2, & b'=b_1\alpha_2+b_2\beta_2+b_3\gamma_2, & c'=c_1\alpha_2+c_2\beta_2+c_3\gamma_2 \\ a''=a_1\alpha_3+a_2\beta_3+a_3\gamma_3, & b''=b_1\alpha_3+b_2\beta_3+b_3\gamma_3, & c''=c_1\alpha_3+c_2\beta_3+c_3\gamma_3; \end{cases}$$

durch Differenziation nach t wird erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= c_1\frac{d\alpha_1}{dt}+c_2\frac{d\beta_1}{dt}+c_3\frac{d\gamma_1}{dt}+\alpha_1\frac{dc_1}{dt}+\beta_1\frac{dc_2}{dt}+\gamma_1\frac{dc_3}{dt} \\ \frac{dc'}{dt} &= c_1\frac{d\alpha_2}{dt}+c_2\frac{d\beta_2}{dt}+c_3\frac{d\gamma_2}{dt}+\alpha_2\frac{dc_1}{dt}+\beta_2\frac{dc_2}{dt}+\gamma_2\frac{dc_3}{dt} \\ \frac{dc''}{dt} &= c_1\frac{d\alpha_3}{dt}+c_2\frac{d\beta_3}{dt}+c_3\frac{d\gamma_3}{dt}+\alpha_3\frac{dc_1}{dt}+\beta_3\frac{dc_2}{dt}+\gamma_3\frac{dc_3}{dt}. \end{aligned}$$

Multiplicirt man nun diese drei Gleichungen respective mit $b_1\alpha_1+b_2\beta_1+b_3\gamma_1=b$, $b_1\alpha_2+b_2\beta_2+b_3\gamma_2=b'$, $b_1\alpha_3+b_2\beta_3+b_3\gamma_3=b''$, addirt, berücksichtigt die zwischen den a, b, c, α, β, γ bestehenden Bedingungsgleichungen und die Gleichungen (13.) und (16.), so erhält man

$$p=p_1+(b_2c_3-b_3c_2)p_1'+(b_3c_1-b_1c_3)q_1'+(b_1c_2-b_2c_1)r_1'.$$

Es ist aber bekanntlich

$$b_2c_3-b_3c_2=a_1, \qquad b_3c_1-b_1c_3=a_2, \qquad b_1c_2-b_2c_1=a_3,$$

so dafs sich der vorstehende Ausdruck umwandelt in:

$$(19.)\quad \begin{cases} p = p_1 + a_1 p_1' + a_2 q_1' + a_3 r_1', & \text{und analog} \\ q = q_1 + b_1 p_1' + b_2 q_1' + b_3 r_1' \\ r = r_1 + c_1 p_1' + c_2 q_1' + c_3 r_1', \end{cases}$$

ein Resultat, welches man auch geometrisch hätte ableiten können, da die Zerlegung der Umdrehungsgeschwindigkeiten nach denselben Gesetzen wie die der Coordinaten geschieht. In Folge der Formeln (16.) und (17.) wird im speciellen Falle

$$p_1' = 0, \qquad q_1' = 0, \qquad r_1' = \omega,$$

ferner ist

$$(20.)\quad \begin{cases} p_1 = \sin\varphi_1 \sin\vartheta_1 \psi_1' - \cos\varphi_1 \vartheta_1' \\ q_1 = \cos\varphi_1 \sin\vartheta_1 \psi_1' + \sin\varphi_1 \vartheta_1' \\ r_1 = -\cos\vartheta_1 \psi_1' + \varphi_1'. \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$(21.)\quad \begin{cases} p = p_1 + a_3\omega = \sin\varphi_1 \sin\vartheta_1 (\psi_1' - \omega) - \cos\varphi_1 \vartheta_1' \\ q = q_1 + b_3\omega = \cos\varphi_1 \sin\vartheta_1 (\psi_1' - \omega) + \sin\varphi_1 \vartheta_1' \\ r = r_1 + c_3\omega = -\cos\vartheta_1 (\psi_1' - \omega) + \varphi_1'. \end{cases}$$

Demnach erhält man für die lebendige Kraft:

$$(22.)\quad 2T = A(\sin\varphi_1 \sin\vartheta_1 (\psi_1' - \omega) - \cos\varphi_1 \vartheta_1')^2$$
$$+ B(\cos\varphi_1 \sin\vartheta_1 (\psi_1' - \omega) + \sin\varphi_1 \vartheta_1')^2 + C(\varphi_1' - \cos\vartheta_1 (\psi_1' - \omega))^2 + F + \text{etc.} \ldots$$

Es müssen nun noch die Theile der Summe der lebendigen Kraft näher bestimmt werden, die von den Körpern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ herrühren. Der von $\mathfrak{B}$ herrührende Theil wird erhalten, wenn $\varphi = 0$ wird. Wäre man von der Substitution (2.) sogleich in (8.) übergegangen, so hätte man setzen müssen

$$x = a_0 + \alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 z_2$$
$$y = b_0 + \alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 z_2$$
$$z = c_0 + \alpha_3 x_2 + \beta_3 y_2 + \gamma_3 z_2,$$

wo

$$(23.)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \cos\chi \sin b, & \alpha_2 = \sin\chi \sin b, & \alpha_3 = -\cos b \\ \beta_1 = -\sin\chi, & \beta_2 = \cos\chi, & \beta_3 = 0 \\ \gamma_1 = -\cos\chi \cos b, & \gamma_2 = -\sin\chi \cos b, & \gamma_3 = -\sin b. \end{cases}$$

Benutzt man nun die Zerlegung in (16.) und (19.), so hat man durchweg für die lateinischen Buchstaben a_1, b_1, c_1 die deutschen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ etc. zu setzen, und eine leichte Rechnung ergiebt

$$(24.)\quad \begin{cases} p = \sin\varphi\sin\vartheta\psi' - \cos\varphi\vartheta' + (\mathfrak{a}_1\cos b + \mathfrak{a}_3\sin b)\omega \\ q = \cos\varphi\sin\vartheta\psi' + \sin\varphi\vartheta' + (\mathfrak{b}_1\cos b + \mathfrak{b}_3\sin b)\omega \\ r = -\cos\vartheta\psi' + \varphi' + (\mathfrak{c}_1\cos b + \mathfrak{c}_3\sin b)\omega. \end{cases}$$

Aus der Vergleichung von (24.) und (21.) folgt

$$(25.)\quad \begin{cases} \sin\varphi_1\sin\vartheta_1\psi_1' - \cos\varphi_1\vartheta_1' = \sin\varphi\sin\vartheta\psi' - \cos\varphi\vartheta' \\ \cos\varphi_1\sin\vartheta_1\psi_1' + \sin\varphi_1\vartheta_1' = \cos\varphi\sin\vartheta\psi' + \sin\varphi\vartheta' \\ -\cos\vartheta_1\psi_1' + \varphi_1' = -\cos\vartheta\psi' + \varphi'. \end{cases}$$

Da bei dem Verschwinden von φ, ϑ und ψ ihren allgemeinen Werth behalten, so wird dies bei ϑ_1 und ψ_1 ebenfalls der Fall sein, weil sie nur Functionen von ϑ und ψ sind. φ_1 wird dagegen einen Werth $\overline{\varphi}_1$ annehmen, der eine Function von ϑ_1 und ψ_1 sein wird.

Durch Elimination von ψ' aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos\overline{\varphi}_1\sin\vartheta_1\psi_1' + \sin\overline{\varphi}_1\vartheta_1' &= \sin\vartheta\psi' \\ -\cos\vartheta_1\psi_1' + \overline{\varphi}_1' &= -\cos\vartheta\psi', \end{aligned}$$

wird $\overline{\varphi}_1'$ als Function von ψ_1' und ϑ_1' dargestellt. Verbindet man damit die Relationen, die sich aus dem sphärischen Dreiecke ergeben:

$$(26.)\quad \begin{cases} \sin\overline{\varphi}_1 = -\dfrac{\cos b\cos\psi_1}{\sin\vartheta}, \qquad \cos\overline{\varphi}_1 = \dfrac{\sin b\sin\vartheta_1 + \cos b\cos\vartheta_1\sin\psi_1}{\sin\vartheta}, \\ \cos\vartheta = \cos\vartheta_1\sin b - \sin\vartheta_1\cos b\sin\psi_1, \end{cases}$$

so kann man leicht $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$, die analogen Gröfsen von p, q, r für den Körper $\mathfrak{B}$ in Functionen von ϑ_1, ψ_1, ϑ_1', ψ_1' ausdrücken und findet:

$$(27.)\quad \begin{cases} \overline{p} = \sin\overline{\varphi}_1\sin\vartheta_1(\psi_1' - \omega) - \cos\overline{\varphi}_1\vartheta_1' \\ \quad = -\dfrac{\cos b\cos\psi_1\sin\vartheta_1(\psi_1' - \omega)}{\sin\vartheta} - \dfrac{\sin b\sin\vartheta_1 + \cos b\cos\vartheta_1\sin\psi_1}{\sin\vartheta}\vartheta_1' \\ \overline{q} = \cos\overline{\varphi}_1\sin\vartheta_1(\psi_1' - \omega) + \sin\overline{\varphi}_1\vartheta_1' \\ \quad = \dfrac{\sin b\sin\vartheta_1 + \cos b\cos\vartheta_1\sin\psi_1}{\sin\vartheta}(\psi_1' - \omega)\sin\vartheta_1 - \dfrac{\cos b\cos\psi_1}{\sin\vartheta}\vartheta_1' \\ \overline{r} = -\cos\vartheta_1(\psi_1' - \omega) + \overline{\varphi}_1' \\ \quad = \dfrac{\cos b(\sin\vartheta_1\sin\psi_1\sin b + \cos\vartheta_1\cos b)}{\sin^2\vartheta}\psi_1' + \dfrac{\cos b\cos\psi_1\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\vartheta_1' - \cos\vartheta_1(\psi_1' - \omega). \end{cases}$$

Bei dem Körper $\mathfrak{A}$ verschwindet ϑ und φ zugleich, also ist

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\vartheta}}_1 &= 90^0 - b, & \overline{\overline{\vartheta}}_1' &= 0, \\ \overline{\overline{\psi}}_1 &= -90^0, & \overline{\overline{\psi}}_1' &= 0, \\ -\overline{\overline{\varphi}}_1 &= 90^0 + \psi, & \overline{\overline{\varphi}}_1' &= -\psi', \end{aligned}$$

folglich

$$\overline{\overline{p}} = \omega \cos b \cos \psi,$$
$$\overline{\overline{q}} = \omega \cos b \sin \psi,$$
$$\overline{\overline{r}} = \omega \sin b - \psi',$$

wo ψ und ψ' durch ϑ_1, ψ_1, ϑ_1', ψ_1' ausgedrückt werden müfste. Der vollständige Ausdruck für die lebendige Kraft wird also:

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + A'\overline{p}^2 + B'\overline{q}^2 + C'\overline{r}^2 + A''\overline{\overline{p}}^2 + B''\overline{\overline{q}}^2 + C''\overline{\overline{r}}^2 + F + F' + F''.$$

Die Kräftefunction soll nur für den Fall aufgestellt werden, wenn die Schwere g wirkt. Dieselbe macht mit den Axen Winkel, deren Cosinus bezüglich

$$\frac{x}{\varrho}, \quad \frac{y}{\varrho}, \quad \frac{z}{\varrho} \quad \text{etc.}$$

sind. Also ist

$$X = -\frac{gx}{\varrho}, \quad Y = -\frac{gy}{\varrho}, \quad Z = -\frac{gz}{\varrho} \quad \text{etc.},$$

folglich

$$dV = -\frac{g}{\varrho}\int dm(x dx + y dy + z dz) + \text{etc.}$$

$$V = -\frac{1}{2}\frac{g}{\varrho}\int dm(x^2 + y^2 + z^2) + \text{etc.},$$

und in Folge von (5.) und (6.)

$$V = -\tfrac{1}{2} g \varrho M - (A + B + C)\frac{g}{\varrho}$$
$$-\frac{g}{\varrho} M\{(a_0 a + b_0 a' + c_0 a'')\overset{0}{x}_3 + (a_0 b + b_0 b' + c_0 b'')\overset{0}{y}_3 + (a_0 c + b_0 c' + c_0 c'')\overset{0}{z}_3\} + \text{etc.}$$

§. 3.

Aufstellung der Differentialgleichungen in Bezug auf das Foucault'sche Gyroscop und Integration derselben in dem Falle, wenn die Axe der Scheibe vollkommen frei ist.

Nachdem der Ausdruck der lebendigen Kraft in der gröfsten Allgemeinheit aufgestellt, soll jetzt bei der Bildung der Differenzialgleichungen nur der specielle Fall des *Foucault*'schen Gyroscops in Betracht gezogen werden, weil die endliche Integration im allgemeinen Falle nicht gelingen würde. Mit Absicht ist aber die allgemeine Form bis hierher beibehalten, weil man von derselben interessante Anwendungen namentlich auf ein Pendel, welches um eine feste Axe unter dem Einflusse der Erdbewegung schwingt, machen kann, wie ich bei einer andern Gelegenheit zeigen werde. Die Bewegung der Erde macht nehmlich Correctionen der Uhren nöthig.

Das Gyroscop ist dem Einflufs der Schwere dadurch entzogen, dafs der Punkt O der Schwerpunkt der drei Körper ist. Man hat also

$$\overset{0}{x}_3 = 0,\ \overset{0}{y}_3 = 0,\ \overset{0}{z}_3 = 0,\ \overset{0}{\xi}_3 = 0,\ \overset{0}{\eta}_3 = 0,\ \overset{0}{\zeta}_3 = 0,\ \overset{0}{\mathfrak{x}}_3 = 0,\ \overset{0}{\mathfrak{y}}_3 = 0,\ \overset{0}{\mathfrak{z}}_3 = 0.$$

Ferner sind die Körper Rotationskörper und zwar ist für den Körper $\mathfrak{C}$ die Z_3 Axe, für den Körper $\mathfrak{B}$ die H_3 Axe, für den Körper $\mathfrak{A}$ die $\mathfrak{Y}_3$ Axe die Rotationsaxe. Folglich:

$$A = B, \qquad B' = C', \qquad B'' = C''.$$

Die Gröfsen F, F', F'' reduciren sich auf die Constanten $\frac{1}{2}M\varrho^2\omega^2\cos^2 b$, $\frac{1}{2}M'\varrho^2\omega^2\cos^2 b$, $\frac{1}{2}M''\varrho^2\omega^2\cos^2 b$; also gehen dieselben bei den Differenziationen aus den Gleichungen heraus. Ebenso reducirt sich die Kräftefunction V auf eine Constante. Man behält also für den zu differenziirenden Ausdruck:

$$(28.)\quad T = \tfrac{1}{2}\{A(p^2+q^2)+Cr^2\}+\tfrac{1}{2}\{A'\overline{p}^2+B'(\overline{q}^2+\overline{r}^2)\}+\tfrac{1}{2}\{A''\overline{\overline{p}}^2+B''(\overline{\overline{q}}^2+\overline{\overline{r}}^2)\}.$$

Nehmen wir ferner an, dafs die Masse der Ringe $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gegen die Masse der Scheibe $\mathfrak{C}$ zu vernachlässigen ist, so kann man $A' = 0$, $B' = 0$, $A'' = 0$, $B'' = 0$ setzen. Die Beibehaltung dieser Gröfsen würde der Integration grofse Schwierigkeiten entgegensetzen, weil die trigonometrischen Functionen des Winkels ψ_1, die sonst ganz aus den Differentialgleichungen herausgehen, stehen blieben. Nur in dem Fall, wenn die Axe des Gyroskops nicht vertical, sondern in die Richtung der Erdaxe gestellt ist, also $b = 90^0$, würde keine besondere Complication entstehen. Die Trägheitsmomente A', B', C', A'', B'', C'' können also hier mit in Rechnung gebracht, müssen aber in einem andern als dem genannten Falle weggelassen werden.

Setzt man jetzt die Werthe von p, q, r nach (21.) und (27.) ein, so wird

$$(29.)\quad \begin{aligned} 2T = {} & A(\vartheta_1'^2+\sin^2\vartheta_1(\psi_1'-\omega)^2)+C(\varphi_1'-\cos\vartheta_1(\psi_1'-\omega))^2+A'\vartheta_1'^2 \\ & +B'\sin^2\vartheta_1(\psi_1'-\omega)^2+C'\cos^2\vartheta_1(\psi_1'-\omega)^2+C''(\psi_1'-\omega)^2, \end{aligned}$$

$$(30.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta_1'} = (A+A')\vartheta_1', \qquad \dfrac{\partial T}{\partial \varphi_1'} = C(\varphi_1'-\cos\vartheta_1(\psi_1'-\omega)), \\ \dfrac{\partial T}{\partial \psi_1'} = (A+B')\sin^2\vartheta_1(\psi_1'-\omega)-C(\varphi_1'-\cos\vartheta_1(\psi_1'-\omega))\cos\vartheta_1 \\ \qquad\qquad +C'\cos^2\vartheta_1(\psi_1'-\omega)+C''(\psi_1'-\omega), \\ \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta_1} = (A+B'-C')(\psi_1'-\omega)^2\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1 \\ \qquad\qquad +C(\varphi_1'-\cos\vartheta_1(\psi_1'-\omega))(\psi_1'-\omega)\sin\vartheta_1, \\ \dfrac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0, \qquad \dfrac{\partial T}{\partial \psi_1} = 0. \end{cases}$$

Die zu integrirenden Differentialgleichungen würden also sein:

$$(31.)\quad \begin{cases} (A+A')\vartheta_1'' = (A+B'-C')(\psi_1'-\omega)^2 \sin\vartheta_1\cos\vartheta_1 \\ \qquad\qquad + C(\varphi_1' - \cos\vartheta_1(\psi_1'-\omega))(\psi_1'-\omega)\sin\vartheta_1, \\ \dfrac{d.(\varphi_1'-\cos\vartheta_1(\psi_1'-\omega))}{dt} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\cdot\{(A+B')\sin^2\vartheta_1(\psi_1'-\omega) - C(\varphi_1'-\cos\vartheta_1(\psi_1'-\omega))\cos\vartheta_1 \\ \qquad\qquad + C'\cos^2\vartheta_1(\psi_1'-\omega) + C''(\psi_1'-\omega)\} = 0. \end{cases}$$

Es ergeben sich sogleich die beiden Integrale

$$(32.)\quad \varphi_1' - \cos\vartheta_1(\psi_1'-\omega) = l_1$$

$$(33.)\quad (A+B')\sin^2\vartheta_1(\psi_1'-\omega) - Cl_1\cos\vartheta_1 + C'\cos^2\vartheta_1(\psi_1'-\omega) + C''(\psi_1'-\omega) = l_2$$

Um die Constanten l_1 und l_2 zu bestimmen, sei im Anfange der Bewegung $\vartheta_1 = \alpha$, $\psi_1' = 0$, $\vartheta_1' = 0$, $\psi_1 = 0$, $\vartheta_1 = 0$, $\varphi_1' = n$.

Dann wird

$$(34.)\quad \begin{cases} l_1 = n + \omega\cos\alpha \\ l_2 + Cl_1\cos\alpha = -\omega\{(A+B'-C')\sin^2\alpha + C' + C''\}. \end{cases}$$

Aus (33.) folgt:

$$(35.)\quad \psi_1' - \omega = \frac{l_2 + Cl_1\cos\vartheta_1}{(A+B'-C')\sin^2\vartheta_1 + C' + C''} = \frac{l_2 + Cl_1\cos\vartheta_1}{N}$$

$$(36.)\quad (A+A')\vartheta_1'' = \frac{(A+B'-C')(l_2+Cl_1\cos\vartheta_1)^2}{N^2}\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1 + \frac{Cl_1(l_2+Cl_1\cos\vartheta_1)}{N}\sin\vartheta_1.$$

Die letzte Gleichung werde mit $2d\vartheta_1$ multiplicirt und darauf die Integration ausgeführt:

$$(37.)\quad (A+A')\vartheta_1'^2 = l_3 - \frac{(l_2+Cl_1\cos\vartheta_1)^2}{N},$$

wo

$$l_3 = \frac{(l_2+Cl_1\cos\alpha_1)^2}{(A+B'-C')\sin^2\alpha + C' + C''} = \omega^2\{(A+B'-C')\sin^2\alpha + C' + C''\}.$$

Es folgt daraus:

$$(38.)\quad dt = \sqrt{(A+A')}\cdot\frac{\sqrt{A+B'+C''-(A+B'-C')\cos^2\vartheta_1}\,d\vartheta_1}{\sqrt{l_3(A+B'+C''-(A+B'-C')\cos^2\vartheta_1) - (l_2+Cl_1\cos\vartheta_1)^2}}$$

1. Beschränken wir uns nun auf den Fall, wo die Trägheitsmomente der Ringe verschwinden, so hat man

$$dt = \frac{A\sin\vartheta_1\sin\alpha\,d\vartheta_1}{\sqrt{(l_2+Cl_1\cos\alpha)^2\sin^2\vartheta_1 - (l_2+Cl_1\cos\vartheta_1)^2\sin^2\alpha}}.$$

Zur bequemeren Integration sei $\omega^2A^2\sin^2\alpha = c$. Dann ist das vollständige

Integral:

$$t = \frac{A}{\sqrt{C^2 l_1^2 + c}} \arccos \frac{C l_1 l_2 + (C^2 l_1^2 + c)\cos\vartheta_1}{\sqrt{c(C^2 l_1^2 + c - l_2^2)}} + \text{const.}$$

Die Constante verschwindet, wenn t zu Anfang der Bewegung $= 0$ ist.

Nach Einsetzung des Werthes von l_2 ergiebt sich ferner:

$$(40.) \qquad t = \frac{1}{m'} \arccos \frac{(C^2 l_1^2 + \omega^2 A^2 \sin^2\alpha)(\cos\vartheta_1 - \cos\alpha) + \omega A \sin^2\alpha (A\omega\cos\alpha - C l_1)}{\omega A \sin^2\alpha (\omega A \cos\alpha - C l_1)},$$

wo

$$m' = \frac{1}{A}\sqrt{C^2 l_1^2 + \omega^2 A^2 \sin^2\alpha}.$$

Es sei

$$(41.) \qquad m't = u,$$

so folgt

$$(42.) \qquad \cos\vartheta_1 - \cos\alpha = \frac{2(C l_1 - A\omega\cos\alpha)\omega\sin^2\alpha}{A m'^2} \sin^2\tfrac{1}{2}u.$$

Hieraus erhellet, dafs ***die Bewegung der Axe der Scheibe um die Parallele zur Erdaxe herum periodisch ist.*** Die Dauer dieser Periode ist

$$(43.) \qquad T = \frac{2\pi A}{\sqrt{C^2(n + \omega\cos\alpha)^2 + \omega^2 A^2 \sin^2\alpha}}$$

oder annäherungsweise $= \frac{2\pi A}{Cn}$.

Wenn n dasselbe Zeichen hat wie ω, d. h. wenn die Rotation der Scheibe (projicirt auf den Aequator) in derselben Richtung wie die Bewegung der Erde geschieht, so ist der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (42.) stets positiv, weil l_1 die Gröfse n enthält, welche die übrigen Glieder bei Weitem überwiegt; es folgt daraus, dafs ϑ_1 kleiner wie α sein mufs; die Bewegung der positiven Richtung der OZ_3 Axe geschieht also um den nach Süden gerichteten Theil der Parallele zur Erdaxe; im entgegengesetzten Falle ist $\cos\vartheta_1 - \cos\alpha$ negativ, also ϑ_1 gröfser als α; die Oscillation geschieht also um den nördlichen Theil der gedachten Linie.

Wenn $\alpha = 0$ ist, so wird ϑ_1 ebenfalls $= 0$. Daraus folgert man: ***„Bei der Bewegung des Gyroscops im Zustande vollkommener Freiheit „ist die Axe der Scheibe nur dann im Gleichgewicht, wenn sie parallel „der Erdaxe steht. In jedem andern Falle findet eine Oscillation von „kurzer Dauer statt."***

2. Um den Winkel ψ_1 zu bestimmen, hat man die Gleichung (33.):

$$(44.) \qquad \psi_1' = \omega + \frac{l_2 + C l_1 \cos\vartheta_1}{A\sin^2\vartheta_1} = \omega + \frac{C l_1 + l_2}{2A(1 - \cos\vartheta_1)} - \frac{C l_1 - l_2}{2A(1 + \cos\vartheta_1)}.$$

Giebt man der Gleichung (42.) die Form:

$$\cos\vartheta_1 = \cos\alpha + g\sin^2\alpha\sin^2\tfrac{1}{2}u,$$

wo

$$g = \frac{2\omega(Cl_1 - A\omega\cos\alpha)}{Am'^2},$$

substituirt in (44.) und bedenkt, dafs $dt = \frac{du}{m'}$, so ergiebt sich

$$\psi_1 = \omega t + \frac{Cl_1+l_2}{2Am'}\int\frac{du}{1-\cos\alpha-g\sin^2\alpha\sin^2\frac{1}{2}u} - \frac{Cl_1-l_2}{2Am'}\int\frac{du}{1+\cos\alpha+g\sin^2\alpha\sin^2\frac{1}{2}u}.$$

Die Ausführung der Integration liefert:

$$(45.)\quad \psi_1 = \omega t + \frac{Cl_1+l_2}{2Am'\sin^2\frac{1}{2}\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-2g\cos^2\frac{1}{2}\alpha}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{1-2g\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u\right)$$
$$- \frac{Cl_1-l_2}{2Am'\cos^2\frac{1}{2}\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+2g\sin^2\frac{1}{2}\alpha}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{1+2g\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u\right).$$

Es ist aber

$$1-2g\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{[Cl_1 - A\omega(1+\cos\alpha)]^2}{A^2m'^2}$$

$$1+2g\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{[Cl_1 + A\omega(1-\cos\alpha)]^2}{A^2m'^2}.$$

Für die Factoren vor dem Integralzeichen ergeben sich die Quadratwurzeln aus den reciproken Ausdrücken. Deshalb

$$(46.)\ \psi_1 = \omega t + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{Cl_1 - A\omega(1+\cos\alpha)}{Am'}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{Cl_1 + A\omega(1-\cos\alpha)}{Am'}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u\right).$$

Da $\operatorname{arc\,tg}x - \operatorname{arc\,tg}y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy}$, so wird

$$(47.)\quad \operatorname{tg}(\psi_1 - \omega t) = \frac{-2A^2\omega m'\operatorname{tg}\frac{1}{2}u}{A^2m'^2 + \{(Cl_1 - A\omega\cos\alpha)^2 - A^2\omega^2\}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}u}.$$

Wäre

$$(48.)\quad \begin{cases} \frac{Cl_1 - A\omega(1+\cos\alpha)}{Am'}\operatorname{tg}\frac{1}{2}u = \operatorname{tg}v \\ \frac{Cl_1 + A\omega(1-\cos\alpha)}{Am'}\operatorname{tg}\frac{1}{2}u = \operatorname{tg}v_1 \end{cases}$$

gesetzt worden, so wäre

$$\psi_1 = \omega t + v - v_1.$$

Man sieht hieraus, dafs der Winkel ψ_1, der in einer dem Erdäquator parallelen Ebene entgegengesetzt der täglichen Umdrehung gezählt wird, aus einem der Zeit proportionalen und einem periodischen Gliede besteht. Die Dauer der Periode ist $\frac{2\pi}{m'}$. Da v und v_1 nur wenig von einander verschieden sein

werden, so wird ψ_1 mit annähernder Genauigkeit die Drehung der Erde während der Zeit t repräsentiren.

3. Die Geschwindigkeit der Scheibe wird durch die Gleichung (32.) gegeben:

$$\varphi_1' = l_1 + \cos\vartheta_1(\psi_1' - \omega).$$

Eine leichte Zerlegung ergiebt:

$$(49.) \quad \varphi_1 = \frac{A-C}{A}(n+\omega\cos\alpha)t + \frac{Cl_1+l_2}{2Am'}\int\frac{du}{1-\cos\vartheta_1} + \frac{Cl_1-l_2}{2Am'}\int\frac{du}{1+\cos\vartheta_1}.$$

Man hat demnach, wenn man ganz ebenso wie bei der Berechnung des Winkels ψ_1 verfährt:

$$(50.) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{A-C}{A}(n+\omega\cos\alpha)t + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{Cl_1-A\omega(1+\cos\alpha)}{Am'}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u\right) \\ \qquad\qquad + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{Cl_1+A\omega(1-\cos\alpha)}{Am'}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u\right), \\ \text{oder} \\ \varphi_1 = \frac{A-C}{A}(n+\omega\cos\alpha)t + v + v_1 \\ \operatorname{tg}\left\{\varphi_1 - \frac{A-C}{A}(n+\omega\cos\alpha)t\right\} = \frac{2(Cl_1-A\omega\cos\alpha)Am'\operatorname{tg}\frac{1}{2}u}{A^2m'^2-\{(Cl_1-A\omega\cos\alpha)^2-A^2\omega^2\}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}u}. \end{cases}$$

Der Winkel φ_1 besteht also ebenfalls aus einem der Zeit proportionalen und einem periodischen Gliede.

§. 4.

Betrachtung des Falles, wenn der zweite Ring, der die Axe der Scheibe trägt, in einer Ebene (gewöhnlich in dem Horizonte) fixirt wird, innerhalb derselben sich aber beliebig um eine relativ feste Axe drehen kann.

Foucault betrachtet, wie in der Einleitung gesagt, die Componente der Bewegung der Axe in der festen Ebene des Horizontes besonders. In diesem Falle lassen sich die Trägheitsmomente der Ringe mit in Rechnung ziehen, indem man nicht nöthig hat auf die Winkel ϑ_1, φ_1, ψ_1 zurückzugehen, sondern die Bewegung durch die Winkel ϑ, φ, ψ, welche die Stellung gegen die feste Ebene, und den Winkel b, welcher die Lage dieser Ebene gegen die Erdaxe angiebt, ausdrücken kann.

Für die Scheibe und den Ring $\mathfrak{B}$ ist alsdann nach der Definitionin (1.) $\vartheta = 90^0$, für den Ring $\mathfrak{A}$, $\vartheta = 0$.

Man schliefst deshalb aus (24.) und (25.)

$$\begin{aligned} p &= \sin\varphi\psi' + \omega(\cos\psi\cos\varphi\cos b - \sin\varphi\sin b) \\ q &= \cos\varphi\psi' - \omega(\cos\psi\sin\varphi\cos b + \cos\varphi\sin b) \\ r &= \varphi' + \omega\sin\psi\cos b \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{p} &= \omega\cos\psi\cos b\\ \bar{q} &= \psi' - \omega\sin b\\ \bar{r} &= \omega\sin\psi\cos b\end{aligned}\right\}$$ folgt aus den 3 ersten Gl., wenn $\varphi = 0$ gesetzt wird

$$\left.\begin{aligned}\bar{\bar{p}} &= \omega\cos\psi\cos b\\ \bar{\bar{q}} &= \omega\sin\psi\cos b\\ \bar{\bar{r}} &= -\psi' + \omega\sin b\end{aligned}\right\}$$ nach (24.), indem $\vartheta = 0$, $\varphi = 0$,

und bekommt für die Summe der lebendigen Kraft

$$\begin{aligned}(51.)\quad 2T = {} & A\{(\psi' - \omega\sin b)^2 + \omega^2\cos^2\psi\cos^2 b)\} + C(\varphi' + \omega\sin\psi\cos b)^2\\ & + A'\omega^2\cos^2\psi\cos^2 b + B'(\psi' - \omega\sin b)^2 + C'\omega^2\sin^2\psi\cos^2 b\\ & + A''\omega^2\cos^2\psi\cos^2 b + B''\omega^2\sin^2\psi\cos^2 b + C''(\psi' - \omega\sin b)^2\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\psi'} = (A + B' + C'')(\psi' - \omega\sin b)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial\psi} = {} & -\omega^2(A + A' + A'' - C' - B'')\cos\psi\sin\psi\cos^2 b\\ & + C(\varphi' + \omega\sin\psi\cos b)\,\omega\cos\psi\cos b\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi'} = C(\varphi' + \omega\sin\psi\cos b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0.$$

Man hätte $B' = C'$, $B'' = C''$ setzen können. Dadurch wird aber keine besondere Vereinfachung herbeigeführt und man hat durch die Beibehaltung beider Gröfsen Gelegenheit Fehler in der Gestalt mit in Rechnung zu ziehen. Man folgert

$$\frac{d\cdot\frac{\partial T}{\partial\varphi'}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\cdot\frac{\partial T}{\partial\psi'}}{dt} = \frac{\partial T}{\partial\psi},$$

und daraus:

$$(52.)\quad \begin{cases}\varphi' + \omega\sin\psi\cos b = l_1, & \text{wo}\quad l_1 = n + \omega\sin\psi_0\cos b,\\ (A + B' + C'')\psi'' = -\omega^2(A + A' + A'' - C' - B'')\cos\psi\sin\psi\cos^2 b\\ \qquad\qquad + C l_1\omega\cos\psi\cos b.\end{cases}$$

Multiplicirt man mit $2d\psi$ und integrirt, so wird

$$(53.)\quad \begin{cases}(A + B' + C'')\psi'^2 = -\omega^2(A + A' + A'' - C' - B'')\sin^2\psi\cos^2 b\\ \qquad\qquad + 2Cl_1\omega\sin\psi\cos b + l_2,\\ \text{wo}\quad l_2 = \omega^2(A + A' + A'' - C' - B'')\sin^2\psi_0\cos^2 b - 2Cl_1\omega\sin\psi_0\cos b.\end{cases}$$

Sei zur Abkürzung $A + A' + A'' - C' - B'' = g$.

Man kann g immer als positiv betrachten, da A die andern Gröfsen überwiegt. Aus (53.) folgt:

$$(54.)\qquad t = \sqrt{A+B'+C''}\int \frac{d\psi}{\sqrt{2Cl_1\omega\cos b(\sin\psi-\sin\psi_0)-g\omega^2\cos^2 b(\sin^2\psi-\sin^2\psi_0)}}.$$

Wenn n dasselbe Zeichen hat wie ω, so mufs, da die Gröfse Cl_1 die übrigen überwiegt, $\sin\psi > \sin\psi_0$ oder $\psi > \psi_0$ sein, damit die Wurzelgröfse reell bleibe; im entgegengesetzten Falle ist $\psi_0 > \psi$.

a) ***Fall wenn n positiv ist.***

Sei

$$(55.)\qquad \frac{2Cl_1}{g\omega\cos b} - \sin\psi_0 = f, \quad \text{wo } f \text{ immer} > 1, \quad \sin\psi = y.$$

Dann verwandelt sich (54.) in das elliptische Integral erster Gattung:

$$t = \frac{1}{\omega\cos b}\sqrt{\frac{A+B'+C''}{g}}\int_{\sin\psi_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{(y-f)(y-1)(y-\sin\psi_0)(y+1)}}.$$

Hierbei ist der Anfangswerth von t der Null gleich und das Zeichen der Wurzel positiv zu nehmen, weil mit wachsendem t auch das Integral wachsen mufs. Die vier Factoren sind so geordnet, dafs die Differenz zweier auf einander folgenden Wurzeln des Ausdrucks 4ter Ordnung immer positiv ist.

Um das Integral auf die Normalform zu bringen, wende man die Transformation erster Ordnung an, wie sie vom Prof. ***Richelot*** im 34sten Bande dieses Journals angegeben worden.

Sei also

$$(56.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1-y}{y-\sin\psi_0} = \sqrt{\dfrac{2}{1+\sin\psi_0}\cdot\dfrac{f-1}{f-\sin\psi_0}}\cdot\dfrac{1-s}{1+s} = \dfrac{h(1-s)}{1+s}, \\ y = \dfrac{1+h\sin\psi_0+(1-h\sin\psi_0)s}{1+h+(1-h)s}, \\ \dfrac{1-k}{1+k} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2}\psi_0\right)\sqrt{\dfrac{f-1}{f-\sin\psi_0}} = h\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2}\psi_0\right), \\ \omega\cos b\sqrt{\dfrac{(1-\sin\psi_0)}{k}}\sqrt{\dfrac{g}{A+B'+C''}} = m', \qquad \dfrac{m't}{2} = u, \end{cases}$$

so wird

$$u = \int_{-1}^{s}\frac{\partial s}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-k^2s^2}} = \int_0^1\frac{\partial s}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-k^2s^2}} + \int_0^s\frac{\partial s}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-k^2s^2}} = K+u'.$$

Nach der *Jacobi*'schen Bezeichnung hat man

$$(57.)\qquad \begin{cases} s = \sin\mathrm{am}\,u' = \sin\mathrm{am}\,(u-K) \\ \sin\psi = \dfrac{(1+h\sin\psi_0)+(1-h\sin\psi_0)\sin\mathrm{am}\,(u-K)}{1+h+(1-h)\sin\mathrm{am}\,(u-K)}. \end{cases}$$

Der $\sin\psi$ ist also vermittelst der sehr convergirenden Reihen H und Θ explicite durch die Zeit t ausgedrückt, $\sin\psi$ ist eine periodische Function der Zeit; die Dauer der Periode ist

$$(58.) \qquad T = \frac{8K}{m'}.$$

Wenn $\psi_0 = 90^0$ ist, so bedeutet dies nach den Definitionen in (1.), daſs die Axe des Ringes $\mathfrak{B}$ von Osten nach Westen gerichtet, folglich die Axe der Scheibe sich im Meridiane befinden muſs. Wenn $\psi_0 = 90^0$, so ist nach (57.) $\sin\psi = 1$, $\psi = 90^0$. Ist $\psi_0 = -90^0$, d. h. ist die Axe der Scheibe im Meridian, erfolgt aber ihre Rotation entgegengesetzt der täglichen Umdrehung, so wird nach (56.) $\frac{1-k}{1+k} = 0$, $k = 1$, $K = \infty$. Die Dauer der Oscillation ist dann unendlich, d. h. die Axe bewegt sich überhaupt nicht, ist aber im labilen Gleichgewicht, weil sie bei der geringsten Aenderung nicht in ihre frühere Lage zurückkehren, sondern sich sehr langsam gegen die stabile Gleichgewichtslage bewegen wird. Man hat also folgendes Theorem:

„Wenn die Axe der Scheibe gezwungen ist, sich in dem Horizonte oder in einer andern festen Ebene zu bewegen, so daſs der Ring „$\mathfrak{B}$ sich in dieser Ebene drehen kann, so ist sie im relativen Gleichgewichte, wenn sie sich in der Meridianebene befindet. Dasselbe kann „stabil oder labil sein. Ist die Stellung so beschaffen, daſs die Rotation „der Scheibe im Sinne der Erdbewegung erfolgt, so ist es stabil, im entgegengesetzten Falle labil. Bei einer andern Lage oscillirt die Axe um „die stabile Gleichgewichtslage."

Da n sehr groſs gegen ω ist, so wird man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, das Quadrat ω^2 vernachlässigen können. Die Rechnung vereinfacht sich alsdann und man erhält für die Gleichung (54.)

$$(59.) \qquad t = \sqrt{\frac{A+B'+C''}{2Cn\omega\cos b}} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin\psi - \sin\psi_0}}.$$

Dies ist die Gleichung für die Bewegung eines mathematischen Pendels, bei welchem die Schwerkraft dividirt durch die Länge $= \sqrt{\frac{A+B'+C''}{2Cn\omega\cos b}}$ und $90^0 - \psi$ der Ausschlagswinkel ist. Man setze

$$\sin\psi = 1 - (1 - \sin\psi_0)s^2,$$

$$k = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\psi_0\right), \qquad \sqrt{\frac{A+B'+C''}{2Cn\omega\cos b}} = \frac{1}{m'}, \qquad m't = u,$$

so wird

$$(60.)\quad \begin{cases} m't = \int_s^1 \frac{\partial s}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-k^2s^2}}, \\ \sin\psi = 1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\psi_0\right)\sin^2 \mathrm{am}(K-u). \end{cases}$$

Die Dauer einer Schwingung ist

$$T = \frac{2K}{m'} = 2K\sqrt{\frac{A+B'+C''}{Cn\omega\cos b}}.$$

Es verhalten sich also die Quadrate der Schwingungszeiten an verschiedenen Orten, ceteris paribus, umgekehrt wie die Cosinus der geographischen Breiten.

b) ***Fall wenn n negativ ist.*** Dies erfordert, dafs $\sin\psi < \sin\psi_0$ ist.

Man setze:

$$\frac{-2Cl_1}{g\omega\cos b} + \sin\psi_0 = f_1, \qquad \sin\psi = y,$$

so wird:

$$(61.)\quad t = \sqrt{\frac{A+B'+C''}{g}}\,\frac{1}{\omega\cos b}\int_y^{\sin\psi_0} \frac{dy}{\sqrt{(y-1)(y-\sin\psi_0)(y+1)(y+f_1)}}.$$

Die Factoren sind wieder so geordnet, dafs die Differenz der aufeinander folgenden Wurzeln 1, $\sin\psi_0$, -1, $-f_1$ stets positiv ist.

Es sei

$$\frac{\sin\psi_0-\sin\psi}{\sin\psi+1} = \sqrt{\frac{1-\sin\psi_0}{2}}\sqrt{\frac{f_1+\sin\psi_0}{f_1-1}}\,\frac{1-s_1}{1+s_1} = h_1\frac{1-s_1}{1+s_1},$$

$$\sin\psi = \frac{(\sin\psi_0-h_1)+(\sin\psi_0+h_1)s_1}{1+h_1+(1-h_1)s_1},$$

$$\frac{1-k_1}{1+k_1} = \sqrt{\frac{1-\sin\psi_0}{2}}\sqrt{\frac{f_1-1}{f_1+\sin\psi_0}},$$

$$m_1' = \sqrt{\frac{(1+\sin\psi_0)(f_1+1)g}{(A+B'+C'')k_1}}\,\omega\cos b, \quad u_1 = m_1'\frac{t}{2}.$$

Dann wird

$$(62.)\quad \begin{cases} s_1 = \sin\mathrm{am}(K_1-u_1) \\ \sin\psi = \frac{(\sin\psi_0-h_1)+(\sin\psi_0+h_1)\sin\mathrm{am}(K_1-u_1)}{1+h_1+(1-h_1)\sin\mathrm{am}(K_1-u_1)}. \end{cases}$$

Die Dauer der Periode ist

$$T_1 = \frac{8K_1}{m_1'}.$$

Wenn $\psi_0 = -90^0$, so wird $\sin\psi$ nach (62.) $= -1$, also $\psi = -90^0$. Die Ruhelage findet also auch hier Statt, wenn die Axe der Scheibe sich im Meridiane befindet. Dadurch aber, dafs der Winkel $\psi = -90^0$ sein mufs,

muſs die Axe der Scheibe, die anfänglich eine der Erdbewegung entgegengesetzte Rotation hatte, so gedreht sein, daſs die beiden Rotationen in demselben Sinne geschehen. In diesem Falle ist das Gleichgewicht stabil. Ist $\psi_0 = 90^0$, so wird $k_1 = 1$, $K_1 = \infty$, und bedingt also das labile Gleichgewicht. Fafst man die Fälle a) und b) zusammen, so ergiebt sich, daſs sich die Axe der Scheibe gegen den Meridian bewegt und zwar so, daſs sie in demselben Sinne wie die Erde rotirt.

Vernachlässigt man ω^2 auch in diesem Falle, so wird

$$t = \sqrt{\frac{A+B'+C''}{2Cn\omega\cos b}} \int_{\psi}^{\psi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin\psi_0 - \sin\psi}}.$$

Zur Transformation ist zu setzen

$$\sin\psi = (1+\sin\psi_0)s^2 - 1,$$

$$k_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\psi_0\right).$$

Der Modul ist also das Complement des frühern

$$(63.) \qquad m_1' = \sqrt{\frac{2Cn\omega\cos b}{A+B'+C''}}, \qquad m_1' t = u_1.$$

Daraus schliefst man:

$$\sin\psi = (1+\sin\psi_0)\sin^2 \mathrm{am}(K_1 - u_1) - 1.$$

Die Periode der Oscillation bleibt dieselbe wie im Falle, wo n positiv ist.

Bestimmung des Drehungswinkels der Scheibe φ.

Der Winkel φ ist durch die Gleichung (52.) gegeben

$$\varphi = l_1 t - \omega\cos b \int \sin\psi\, dt \quad \text{oder}$$

$$\varphi = nt - \omega\cos b \int (\sin\psi - \sin\psi_0)\, dt.$$

Da $u = K + u' = \frac{m'}{2} t$ ist, so folgt

$$dt = \frac{2}{m'} du', \qquad \sin\psi - \sin\psi_0 = (1-\sin\psi_0)\frac{1+s}{1+h+(1-h)s}.$$

Man hat demnach

$$(64.) \qquad \varphi = nt - \frac{2\omega\cos b(1-\sin\psi_0)}{m'} \int \frac{1+s}{(1+h)+(1-h)s} du'.$$

Durch eine leichte Rechnung ergiebt sich

$$\int \frac{1+s}{1+h+(1-h)s} du' = \frac{u'}{1-h} - \frac{2h}{(1-h)^2} \int \frac{du'}{\frac{1+h}{1-h}+s}.$$

Es sei ferner $\frac{1+h}{1-h} = a_1$, so wird nach der Zerlegung, die Prof. ***Richelot*** im 34sten Bande dieses Journals ausgeführt hat:

$$(65.)\quad \int \frac{du'}{a_1+\sin\mathrm{am}\,u'} = \frac{1}{a_1}u' + \frac{1}{a_1}\int \frac{\sin^2\mathrm{am}\,u'}{a_1^2-\sin^2\mathrm{am}\,u'}\,du' - \int \frac{\sin\mathrm{am}\,u'\,du'}{a_1^2-\sin^2\mathrm{am}\,u'}.$$

Der letzte Theil ist durch einen Logarithmus integrirbar. Man setze

$$a_1^2 = \sin^2\mathrm{am}\,(a+iK') = \frac{1}{k^2\sin^2\mathrm{am}\,a},$$

wo $i=\sqrt{-1}$ und

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

so bekommt man:

$$(66.)\quad \int \frac{du'}{a_1+\sin\mathrm{am}\,u'} = u'k\sin\mathrm{am}\,a + \frac{k\sin\mathrm{am}^2 a}{\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a}\Pi(u', a)$$
$$+\frac{k\sin^2\mathrm{am}\,a}{2\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a}\log\frac{1+k\sin\mathrm{am}\,(K-a)\sin\mathrm{am}\,(K-u')}{1-k\sin\mathrm{am}\,(K-a)\sin\mathrm{am}\,(K-u')}.$$

$\Pi(u', a)$ ist das von ***Jacobi*** eingeführte elliptische Integral 3ter Gattung. Nach einigen leichten Reductionen und nach Einführung der Transcendente Θ wird

$$(67.)\quad \int \frac{1+\sin\mathrm{am}\,u'}{1+h+(1-h)\sin\mathrm{am}\,u'}\,du'$$
$$= \tfrac{1}{2}\left\{1+k\sin\mathrm{am}\,a - \frac{\Delta\mathrm{am}\,a\,\Theta' a}{k\cos\mathrm{am}\,a\,\Theta a}\right\}u' - \frac{\Delta\mathrm{am}\,a}{4k\cos\mathrm{am}\,a}\log\frac{\Theta(u'-a)}{\Theta(u'+a)}$$
$$-\frac{1}{4k}\frac{\Delta\mathrm{am}\,a}{\cos\mathrm{am}\,a}\log\frac{1+k\sin\mathrm{am}\,(K-a)\sin\mathrm{am}\,(K-u')}{1-k\sin\mathrm{am}\,(K-a)\sin\mathrm{am}\,(K-u')}.$$

Daraus folgt:

$$(68.)\quad \varphi = nt - \omega\cos b\,(1-\sin\psi_0)\Big[\Big(1+\sqrt{k}\frac{Ha}{\Theta a} - \frac{\Theta' a\,\Theta(a+K)}{\sqrt{k}\,\Theta a\,H(a+K)}\Big)t$$
$$-\frac{1}{2m'}\frac{\Theta K}{HK}\frac{\Theta(a+K)}{H(a+K)}\log\frac{\Theta(K-a+u)\{\Theta(a+K)\,\Theta u + H(a+K)\,Hu\}}{\Theta(K+a+u)\{\Theta(a+K)\,\Theta u - H(a+K)\,Hu\}}\Big].$$

Hiermit wäre der Winkel φ explicite durch die Zeit mittelst sehr convergirender Reihen ausgedrückt. Er besteht aus einem der Zeit proportionalen und einem periodischen Gliede. Wenn n negativ ist, so mufs man das Zeichen von ω ändern, und den Modul k_1 und die Amplitude u_1 für k und u substituiren.

Wenn man ω^2 vernachlässigt, so kann man einen einfacheren und übersichtlicheren Ausdruck aufstellen. Man hat dann

$$(69.)\quad \varphi = nt - \omega\cos b(1-\sin\psi_0)\int(1-s^2)\,dt$$
$$= nt - \omega\cos b(1-\sin\psi_0)t + \frac{\omega\cos b}{m'}(1-\sin\psi_0)\int s^2\,du'.$$

Das Integral $\int \sin^2 \mathrm{am}\, u'\, du'$, welches das elliptische Integral zweiter Gattung nach der *Jacobi*schen Bezeichnung ausdrückt, wird $= \frac{u'}{k^2}\left(1-\frac{E^I}{K}\right) - \frac{1}{k^2}\frac{\Theta' u'}{\Theta u'}$ (Fundamenta. pag. 133 und 145), wo E^I das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung nach *Legendre* ist, d. h.

$$E^I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,.\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

Daraus folgt:

$$(70.)\quad \varphi = \left\{n - \omega\cos b(1-\sin\psi_0)\left(1-\frac{K-E^I}{k^2K}\right)\right\}t + \frac{\omega\cos b(1-\sin\psi_0)}{m'k^2}\frac{\Theta'(K-u)}{\Theta(K-u)}.$$

§. 5.

Behandlung des Falles, wenn der erste Ring $\mathfrak{A}$ gegen die Erde fixirt ist, so daſs die Axe von $\mathfrak{C}$ sich nur in einer dagegen senkrechten Ebene bewegen kann.

Nachdem durch den in §. 4 beschriebenen Versuch die Lage des Meridians bestimmt worden, wird nach *Foucault* der erste Ring $\mathfrak{A}$ in dem ersten Verticalkreise von West nach Ost festgestellt, um auch die zweite Componente besonders in Betracht zu ziehen. Fassen wir diesen Fall allgemeiner auf und nehmen an, daſs der Ring $\mathfrak{A}$ stets einen Winkel ψ_0 mit der Meridianebene mache. Dann geht der Winkel ψ aus den Differentialgleichungen heraus, weil er aufhört variabel zu sein. Man hat also nach (24.) ff.

$$p = -\cos\varphi\,\vartheta' + a_3\omega$$
$$q = \sin\varphi\,\vartheta' + b_3\omega$$
$$r = \varphi' + c_3\omega$$
$$\bar{p} = -\vartheta' + \omega\cos\psi_0\cos b$$
$$\bar{q} = \omega(\cos\vartheta\sin\psi_0\cos b - \sin\vartheta\sin b) = \omega\frac{d.\cos\vartheta_1}{d\vartheta}$$
$$\bar{r} = \omega(\sin\vartheta\sin\psi_0\cos b + \cos\vartheta\sin b) = \omega\cos\vartheta_1$$

$\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ werden constant, kommen also bei der Bildung der Gleichungen nicht in Betracht.

Man erhält für den Ausdruck der lebendigen Kraft

$$2T = A\left[(\vartheta' - \omega\cos\psi_0\cos b)^2 + \omega^2\left(\frac{d\cos\vartheta_1}{d\vartheta}\right)^2\right] + C(\varphi' + \omega\cos\vartheta_1)^2$$
$$+ A'(\vartheta' - \omega\cos\psi_0\cos b)^2 + B'\omega^2\left(\frac{d\cos\vartheta_1}{d\vartheta}\right)^2 + C'\omega^2\cos^2\vartheta_1$$

und ferner

$$(71.)\quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = (A+A')(\vartheta' - \omega\cos\psi_0\cos b) \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = C(\varphi' + \omega\cos\vartheta_1) \\ \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = -\omega^2(A+B'-C')\cos\vartheta_1\frac{d.\cos\vartheta_1}{d\vartheta} + C(\varphi'+\omega\cos\vartheta_1)\omega\frac{d.\cos\vartheta_1}{d\vartheta} \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \end{cases}$$

Daraus resultiren die Differentialgleichungen

$$(72.)\quad \begin{cases} (A+A')\vartheta'' \\ = -\omega^2(A+B'-C')\cos\vartheta_1\frac{d.\cos\vartheta_1}{d\vartheta} + C(\varphi'+\omega\cos\vartheta_1)\omega\frac{d.\cos\vartheta_1}{d\vartheta} \\ \frac{d.(\varphi'+\omega\cos\vartheta_1)}{dt} = 0. \end{cases}$$

Die zweite liefert sogleich das Integral

$$(73.)\quad \varphi' + \omega\cos\vartheta_1 = l_1, \qquad \text{wo} \quad l_1 = n + \omega\cos\alpha.$$

Die erste, mit $2d\vartheta$ multiplicirt und integrirt, liefert

$$(A+A')\vartheta'^2 = -\omega^2(A+B'-C')\cos^2\vartheta_1 + 2Cl_1\omega\cos\vartheta_1 + l_2,$$
$$\text{wo} \quad l_2 = -Cl_1\omega\cos\alpha + \omega^2(A+B'-C')\cos^2\alpha.$$

Daraus folgt:

$$(74.)\quad t = \sqrt{A+A'}\int \frac{d\vartheta}{\sqrt{2Cl_1\omega(\cos\vartheta_1-\cos\alpha) - \omega^2(A+B'-C')(\cos^2\vartheta_1-\cos^2\alpha)}}.$$

Die Gröfse $A+B'-C'$ kann immer als positiv angesehen werden.

Um die Variabeln ϑ und ϑ_1 in eine zu vereinigen, sei

$$\sin b = \delta\cos\sigma, \qquad \operatorname{tg}\sigma = \sin\psi_0\cot b,$$
$$\sin\psi_0\cos b = \delta\sin\sigma, \qquad \delta = \sqrt{1-\cos^2\psi_0\cos^2 b},$$

also

$$\cos\vartheta_1 = \cos\vartheta\,\sin b + \sin\vartheta\,\sin\psi_0\cos b = \delta\cos(\vartheta-\sigma) = \delta\cos\varepsilon$$
$$\cos\alpha = \cos\vartheta_0\sin b + \sin\vartheta_0\sin\psi_0\cos b = \delta\cos(\vartheta_0-\sigma) = \delta\cos\varepsilon_0$$
$$d\vartheta = d\varepsilon$$

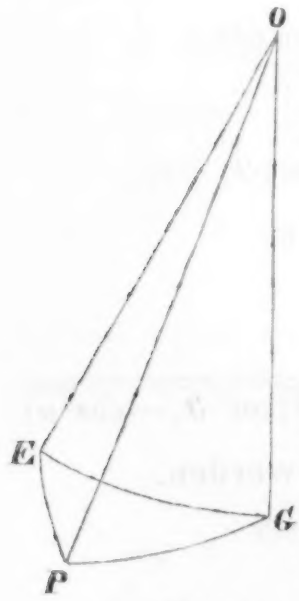
$$(75.)\quad t = \sqrt{A+A'}\int \frac{d\varepsilon}{\sqrt{2Cl_1\omega\delta(\cos\varepsilon-\cos\varepsilon_0) - \omega^2\delta^2(A+B'-C')(\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon_0)}}.$$

Die Gleichung hat dieselbe Form, wie (54.); man kann deshalb ganz dasselbe Verfahren anwenden.

a) ***Wenn n positiv ist,*** so mufs $\cos\varepsilon > \cos\varepsilon_0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\vartheta < \vartheta_0$ sein. Setzt man:

$$(76.)\quad \begin{cases} \dfrac{2Cl_1}{\omega\delta(A+B'-C')} - \cos\varepsilon_0 = f, \\ \dfrac{1-\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon-\cos\varepsilon_0} = \sqrt{\dfrac{2}{1+\cos\varepsilon_0}}\sqrt{\dfrac{f-1}{f-\cos\varepsilon_0}}\dfrac{1-s}{1+s} = \dfrac{h(1-s)}{1+s}, \\ \dfrac{1-k}{1+k} = h\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon_0, \quad m' = \omega\delta\sqrt{\dfrac{A+B'-C'}{A+A'}}\sqrt{\dfrac{(f+1)(1-\cos\varepsilon_0)}{k}}, \\ u = m'\dfrac{t}{2}, \qquad u' = u - K, \\ \text{so wird:} \\ \cos\varepsilon = \dfrac{(1+h\cos\varepsilon_0)+(1-h\cos\varepsilon_0)\,\mathrm{sinam}(u-K)}{1+h+(1-h)\,\mathrm{sinam}(u-K)}. \end{cases}$$

Die Axe der Scheibe wird also Oscillationen vollführen. Um zu bestimmen, in Bezug auf welche Linie dieselben symmetrisch sind, soll die Gleichgewichtslage gesucht werden.



Wenn $\varepsilon_0 = 0$, so wird $\varepsilon = 0$, also $\vartheta = \sigma$. Interpretiren wir dies Resultat geometrisch. Es sei ***OG*** die Verticale, ***OE*** die Parallele zur Erdaxe, ***OP*** die Gleichgewichtslage. Deshalb

$$EG = 90^0 - b$$
$$EGP = 90^0 - \psi_0$$
$$PG = \vartheta_0 = \sigma.$$

In Folge der Relation $\sin\psi_0 = \mathrm{tg}\,\sigma\,\mathrm{tg}\,b$ (74.) mufs $EPG = 90^0$ sein, also ist ***OP*** die Projection der Erdaxe auf die feste Ebene, in welcher die Axe der Scheibe sich zu bewegen gezwungen ist.

„Es kann also nur Gleichgewicht statt finden, wenn die Axe der „Scheibe in die Projection der Erdaxe auf die genannte Ebene fällt. „Ist die feste Ebene die des Meridians, also $\psi_0 = 90^0$, so ruht die Axe, „wenn sie der Erdaxe parallel, ist sie der erste Vertical, so ist die „Verticale die Linie des Gleichgewichts. Um dieselbe ist die Oscillation „symmetrisch. Es findet stabiles Gleichgewicht statt, wenn $\vartheta_0 = \sigma$; labiles „wenn $\varepsilon_0 = \pi$, $\vartheta_0 = \pi + \sigma$ ist (denn alsdann wird $K = \infty$), d. h. wenn „die Rotation im entgegengesetzten Sinne wie die der Erde erfolgt. Die „Dauer der Oscillation ist $\dfrac{8K}{m'}$.

Bei Vernachlässigung von ω^2 hat man:

$$t = \sqrt{\frac{A+A'}{2Cn\delta\omega}} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\cos\varepsilon - \cos\varepsilon_0}}.$$

Sei alsdann $k = \sin\frac{1}{2}\varepsilon_0$, $m' = \sqrt{\frac{Cn\delta\omega}{A+A'}}$, $m't = u$, so ist

$$(77.) \quad \begin{cases} \cos\varepsilon = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon_0 \sin^2 \mathrm{am}(K-u), \\ T = 2K\sqrt{\frac{A+A'}{Cn\omega\delta}}. \end{cases}$$

Die Schwingung ist dann die eines mathematischen Pendels. Die Quadrate der Schwingungszeiten in verschiedenen Breiten verhalten sich, ceteris paribus, umgekehrt wie die Gröfsen $\delta = \sqrt{1-\cos^2\psi_0\cos^2 b}$.

b) ***n negativ.*** Es mufs $\cos\varepsilon_0 > \cos\varepsilon$, oder $\vartheta > \vartheta_0$ sein. Die Axe schlägt also die entgegengesetzte Richtung von der in a) bestimmten ein, und durchläuft einen Kreisbogen, der den frühern zur vollen Peripherie ergänzt; es findet labiles Gleichgewicht statt, wo früher stabiles herrschte und umgekehrt. Die Tendenz der Rotation ist ebenso wie in den vorigen Abschnitten.

Um die Transformation auszuführen, setze man:

$$(78.) \quad \begin{cases} \frac{-2Cl_1}{\omega\delta(A+B'-C')} + \cos\varepsilon_0 = f_1, \quad h_1 = \sin\frac{1}{2}\varepsilon_0 \sqrt{\frac{f_1+\cos\varepsilon_0}{f_1-1}}, \\ \frac{1-k_1}{1+k_1} = \sin\frac{1}{2}\varepsilon_0 \sqrt{\frac{f_1-1}{f_1+\cos\varepsilon_0}}, \quad m' = \omega\delta\sqrt{\frac{A+B'-C'}{A+A'}}\sqrt{\frac{(f_1+1)(1+\cos\varepsilon_0)}{k_1}}, \\ \frac{m't}{2} = u_1 = K_1 - u_1', \end{cases}$$

so wird

$$(79.) \quad \begin{cases} \cos\varepsilon = \cos(\vartheta-\sigma) = \frac{(\cos\varepsilon_0 - h_1) + (\cos\varepsilon_0 + h_1)\sin\mathrm{am}(K_1-u_1)}{1+h_1+(1-h_1)\sin\mathrm{am}(K_1-u_1)}, \\ T = \frac{8K_1}{m_1'}. \end{cases}$$

Wird ω^2 vernachlässigt, so ist zu setzen

$$k_1 = \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_0, \quad m_1' = \sqrt{\frac{Cn\delta\omega}{A+A'}}, \quad m_1't = u_1.$$

Daraus folgt

$$(80.) \quad \cos\varepsilon = \cos(\vartheta-\sigma) = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \sin^2\mathrm{am}(K_1-u_1) - 1.$$

Die Dauer der Oscillation ist dieselbe wie in (77.).

Bestimmung von φ.

Man hat

$$(81.)\quad \begin{cases} \varphi' = n - \omega(\cos\vartheta_1 - \cos\alpha) = n - \omega\delta(\cos\varepsilon - \cos\varepsilon_0), \\ \varphi = nt - \omega\delta\int(\cos\varepsilon - \cos\varepsilon_0)\,dt. \end{cases}$$

Es sei wieder wie in (65.) — (68.)

$$\frac{1+h}{1-h} = a_1 = \sin\mathrm{am}(a+iK') = \frac{1}{k\sin\mathrm{am}a}.$$

Durch eine ähnliche Rechnung wie in §. 4 folgert man dann

$$(82.)\quad \varphi = nt - \omega\delta(1-\cos\varepsilon_0)\Big[\Big(1+\sqrt{k}\frac{Ha}{\Theta a} - \frac{\Theta' a\,\Theta(a+K)}{\sqrt{k}\,\Theta a\,H(a+K)}\Big)t - \frac{1}{2m'}\frac{\Theta K}{HK}\frac{\Theta(a+K)}{H(a+K)}\log\frac{\Theta(K-a+u)\{\Theta(a+K)\Theta u + H(a+K)Hu\}}{\Theta(K+a+u)\{\Theta(a+K)\Theta u - H(a+K)Hu\}}\Big].$$

Die Gröfse h, der Modul k und die Amplitude u sind die in (76.) bestimmten.

Im Falle, wenn ω^2 vernachlässigt ist, und die Gröfsen k, h, u von (77.) genommen werden müssen, bestimmt sich

$$(83.)\quad \varphi = \Big[n - \omega\delta(1-\cos\varepsilon_0)\Big(1-\frac{K-E'}{k^2K}\Big)\Big]t + \frac{\omega\delta(1-\cos\varepsilon_0)}{m'k^2}\frac{\Theta'(K-u)}{\Theta(K-u)}.$$

Wenn n negativ ist, so ist der entsprechende Modul und Amplitude zu nehmen.

Man sieht also aus allen Fällen, dafs die Axe der Scheibe die Tendenz zeigt sich der Erdaxe parallel zu stellen, und dafs sie, wenn sie durch die Bedingungen der Maschine daran gehindert wird, dieser Richtung möglichst nahe zu kommen strebt, indem sie sich so wendet, dafs die Rotation der Scheibe im Sinne der täglichen Umdrehung erfolgt. Die Analysis bestätigt demnach die Experimente *Foucault's* vollständig.

Lippstadt, im December 1856.

21.

Über die Criterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.

(Von Herrn *Otto Hesse* zu Heidelberg.)

Die Criterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale, wie *Jacobi* dieselben in einem vom Jahre 1836 an die Akademie der Wissenschaften zu Berlin und im 17ten Band dieses Journals p. 68 mitgetheilten Schreiben zu finden angiebt, sind seitdem der Gegenstand vielfacher und schöner Beweise geworden von *Lebesgue* und *Delaunay* in *Liouville*'s Journal Tom. IV p. 17 und p. 209 a. 1841, von *Bertrand* Journal de l'école polytechnique a. 1841, von *Eisenlohr* in einer in Mannheim 1853 gedruckten Abhandlung. *Spitzer* verläfst den von *Jacobi* betretenen Weg in seiner mit ebenso grofser Geistesschärfe als Fleifs ausgearbeiteten und in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie 1854 p. 1014 mitgetheilten Abhandlung. Was auf dem ersteren Wege nicht so zu Tage tritt, die wahre Form, auf welche die zweite Variation zurückzuführen ist, ergiebt sich auf dem anderen, so zu sagen, von selbst. Dagegen macht die nöthige Beschränkung der in diese Form eingehenden willkürlichen Constanten, in dem allgemeinen Falle wenigstens, unüberwindliche Schwierigkeiten, welche der von *Jacobi* eingeschlagene Weg ganz vermeidet.

In der folgenden Abhandlung habe ich erstens versucht die eigentliche Quelle aufzudecken, aus der *Jacobi* seine Resultate schöpfte, und zweitens die *Jacobi*sche Transformation der zweiten Variation auf die *Spitzer*sche Form zurückgeführt. Zur Erreichung des ersten Zweckes dienen die Eigenschaften der homogenen Functionen zweiter Ordnung. Die Theorie der Determinanten bildet die Brücke, welche die *Jacobi*sche Transformation der zweiten Variation mit der *Spitzer*schen verbindet.

1.

Es ist die Aufgabe der Variations-Rechnung, y als Funktion von x der Gestalt zu bestimmen, dafs ein Integralausdruck von der Form:

$$(1.) \qquad \Delta = \int_a^b f(x, y, y', \ldots y^{(n)})\, dx$$

in welchem man $f(x, y, y', \ldots y^{(n)})$ als eine gegebene Function, sowohl der unabhängigen Variabeln x, als der zu bestimmenden Function y und ihrer Differentialquotienten $y', \ldots y^{(n)}$ zu betrachten hat, ein Maximum oder ein Minimum werde.

Lagrange giebt in dem 12ten Capitel seiner „Theorie des fonctions analytiques" folgenden Weg an zur Lösung des Problems.

Man denke sich y als Function von x den Bedingungen der Aufgabe gemäfs bestimmt. Unter dieser Voraussetzung mufs für y eine jede andere, von ihr unendlich wenig verschiedene Function von x gesetzt den obigen Integralausdruck verkleinern im Falle des Maximums, oder vergröfsern im Falle des Minimums. Jede beliebige, unendlich wenig von der Function y verschiedene Function kann man sich aber unter der Form vorstellen $y+z$, wo z das Product ist aus einer unendlich kleinen bald positiven, bald negativen Gröfse ε und einer beliebigen Function von x, welche der einzigen Bedingung unterworfen ist, zwischen und in den Grenzen der Integration nicht unendlich zu werden.

Setzt man also $y+z$ für y also auch $y'+z'$ für y' etc. und entwickelt den auf diese Weise geänderten Integralausdruck Δ nach aufsteigenden Potenzen der unendlich kleinen Gröfse ε, indem man die unter dem Integralzeichen stehende Function f nach der Aenderung nach dem *Taylor*schen Satze entwickelt; so wird der von ε unabhängige Term der Entwickelung der obige Integralausdruck Δ selber.

Die Summe der Terme der ersten Ordnung, das sind die mit der ersten Potenz von ε multiplicirten Terme, welche man die erste Variation des gegebenen Integralausdrucks Δ nennt, läfst sich also darstellen:

$$(2.) \qquad \Delta_1 = \int_a^b \varphi \, dx,$$

wenn man der Kürze wegen setzt $\frac{\partial f}{\partial y^{(p)}} = a_p$ und:

$$(3.) \qquad \varphi = a_0 z + a_1 z' + \cdots a_n z^{(n)},$$

während die Summe der Terme zweiter Ordnung, welche den Factor ε^2 enthalten, die halbe zweite Variation des Integralausdruckes, die Gestalt annimmt:

$$(4.) \qquad \tfrac{1}{2}\Delta_2 = \int_a^b \psi \, dx,$$

wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(p)} \partial y^{(q)}} = a_{pq}$ und:

$$(5.) \quad 2\psi = a_{00}zz + 2a_{01}zz' + a_{11}z'z' + \cdots 2a_{n-1,n}z^{(n-1)}z^{(n)} + a_{n,n}z^{(n)}z^{(n)}.$$

Man hat daher den geänderten Integralausdruck Δ

$$(6.) \quad \int_a^b f(x, y+z, \ldots y^{(n)}+z^{(n)})\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b \varphi\,dx + \int_a^b \psi\,dx + \cdots$$

gleich einer nach aufsteigenden Potenzen der unendlich kleinen Gröfse ε geordneten Reihe. Der Werth dieser Reihe kann aber für alle unendlich kleinen, bald positiven, bald negativen Werthe von ε nicht entweder immer kleiner sein als ihr erstes Glied Δ, oder auch nicht immer gröfser sein, wenn nicht das 2te Glied, die erste Variation, verschwindet. Da dasselbe auch noch zutreffen soll, welches auch die Function z sei, so mufs auch das doppelte 3te Glied, die zweite Variation, ihr Vorzeichen nicht ändern.

Die Function y, welche den Integralausdruck Δ zu einem Maximum oder Minimum macht, erfüllt also zwei Bedingungen. Sie macht die erste Variation Δ_1 des Integralausdruckes Δ verschwinden und zugleich das Vorzeichen der zweiten Variation Δ_2 unveränderlich, welches auch die unbestimmte Function z sei.

Aus der ersten Bedingung entspringt die Differentialgleichung $2n$ter Ordnung zwischen x und der zu bestimmenden Function y. Die Integration dieser Differentialgleichung führt $2n$ willkürliche Constanten mit sich. Um nun eine ganz bestimmte Aufgabe vor Augen zu haben, wollen wir annehmen, dafs für $x = a$ und $x = b$ die gesuchte Function y und die $n-1$ ersten Differentialquotienten derselben gegebene Werthe annehmen, wodurch eben die Werthe der $2n$ Constanten der Integration sich bestimmen. Unter dieser Annahme ist aber die Willkürlichkeit der Function z noch in der Weise zu beschränken, dafs für $x = a$ und für $x = b$ diese Function zugleich mit ihren $n-1$ ersten Differentialquotienten verschwindet.

Die Willkürlichkeit der 2ten Variation beruht hiernach allein auf der unbestimmten Function z.

Man kann die zweite Variation auf die Form zurückführen:

$$(7.) \quad \Delta_2 = \int_a^b a_{n,n}\{m_0 z + m_1 z' + \cdots m_{n-1}z^{(n-1)} + z^{(n)}\}^2\,dx.$$

In dieser Form erkennt man leicht die Criterien für die Unveränderlichkeit des Vorzeichens darin, dafs weder $a_{n,n}$ sein Vorzeichen innerhalb der Gren-

zen der Integration a und b ändert, noch der Ausdruck unter dem Integralzeichen innerhalb dieser Grenzen unendlich grofs wird. Denn wenn $a_{n,n}$ innerhalb der Grenzen der Integration sein Vorzeichen ändert, so zeigt ***Lagrange*** am angeführten Orte, dafs durch passende Annahme von z auch die ganze zweite Variation bald positiv bald negativ gemacht werden kann.

Wenn durch Integration der genannten Differentialgleichung der $2n$ten Ordnung die Function y mit ihren $2n$ willkürlichen Constanten gefunden ist, so bedarf es nunmehr keiner weiteren Integration, um die zweite Variation auf die Form (7.) zurückzuführen. Vielmehr ergeben sich die Integrale der linearen Differentialgleichungen, auf welche frühere Mathematiker das Problem zurückführten, ganz von selber. Diese Entdeckung verdanken wir ***Jacobi.***

Es gehen, wie man sieht, in die vorliegende Untersuchung nur die beiden in Rücksicht auf z, z', ... homogenen Funktionen φ und ψ ein, die erste vom ersten, die andere vom zweiten Grade. Wir wollen dieselben, als die Elemente der Untersuchung, einer ausführlichen Diskussion unterwerfen.

2.

Es sei ein Differentialausdruck von der Form gegeben:

$$(8.) \qquad \varphi = a_0 z + a_1 z' + a_2 z'' + \cdots a_n z^{(n)},$$

in welchem die Gröfsen a gegebene Functionen der unabhängigen Variable x bedeuten, z eine unbekannte Function dieser Variable, z', z'', ... $z^{(n)}$ die auf einander folgenden Differentialquotienten der unbekannten Function z. Ein beliebiges Glied der Reihe, woraus die Function φ zusammengesetzt ist, kann man also darstellen:

$$(9.) \qquad a_p z^{(p)} = (-1)^p \left\{ a_p^{(p)} z - \frac{p}{1} \frac{d a_p^{(p-1)} z}{dx} + \frac{p(p-1)}{1.2} \frac{d^2 a_p^{(p-2)} z}{dx^2} - \cdots \right\}.$$

Setzt man in dieser Gleichung für p nach einander die Zahlen 0, 1, ... n und addirt, so erhält man folgende neue Form der Function φ:

$$(10.) \qquad \varphi = A_0 z - \frac{d A_1 z}{dx} + \frac{d^2 A_2 z}{dx^2} \cdots (-1)^n \frac{d^n A_n z}{dx^n},$$

in welcher die Gröfsen A die Bedeutung haben:

$$(11.) \qquad A_0 = a_0 - a_1' + a_2'' - \cdots (-1)^n a_n^{(n)},$$

$$(12.) \qquad A_p = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^q \frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots q} a_p^{(p-q)}.$$

Setzt man ferner:

$$\pi = +A_1 z - \frac{dA_2 z}{dx} + \cdots (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} A_n z}{dx^{n-1}},$$

also gleich einem in Rücksicht auf z, z', ... $z^{(n-1)}$ linearen Differentialausdruck, in welchem der Differentialquotient $z^{(n)}$ nicht vorkommt, so hat man:

$$(13.) \qquad \varphi = A_0 z - \frac{d\pi}{dx}.$$

Diese Gleichung dient zur Transformation der ersten Variation Δ_1, wenn φ die Function (3.) bedeutet. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$\Delta_1 = \int_a^b \varphi \, dx = \int_a^b A_0 z \, dx - [\pi]_a^b.$$

Da aber z mit seinen $n-1$ ersten Differentialquotienten für die Grenzen a und b verschwindet, so verschwindet auch das letzte Glied der angegebenen Gleichung und man hat:

$$\Delta_1 = \int_a^b A_0 z \, dx.$$

Dieser Integralausdruck kann aber für jede beliebige Function z nicht verschwinden, wenn nicht A_0 verschwindet. $A_0 = 0$ ist also die Bedingung für das Verschwinden der ersten Variation. Setzt man in dieser Gleichung für A_0 seinen Werth aus (11.) und ebenso die Werthe der Gröfsen

$$a_p = \frac{\partial f}{\partial y^{(p)}} = f'(y^{(p)}),$$

so erhält man die Gleichung:

$$(14.) \qquad f'(y) - \frac{df'(y')}{dx} + \frac{d^2 f'(y'')}{dx^2} - \cdots (-1)^n \frac{d^n f'(y^{(n)})}{dx^n} = 0,$$

die Differentialgleichung der $2n$ten Ordnung, von welcher in dem vorhergehenden Paragraphen die Rede war. Man mufs sich diese Differentialgleichung integrirt, oder y als Function von x mit den $2n$ willkürlichen Constanten dargestellt denken, wenn man sich an die Untersuchung der 2ten Variation machen will. Wir kehren jedoch nach dieser Nutzanwendung der Gleichung (13.) zu der angefangenen Untersuchung der Function φ (8.) zurück.

Es ist bekanntlich:

$$(15.) \qquad \frac{d^p a_p z}{dx^p} = a_p^{(p)} z + \frac{p}{1} a_p^{(p-1)} z' + \frac{p(p-1)}{1.2} a_p^{(p-2)} z'' + \cdots$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(-1)^p$ und setzt:

$$(16.) \qquad \Phi = a_0 z - \frac{da_1 z}{dx} + \frac{d^2 a_2 z}{dx^2} - \cdots (-1)^n \frac{d^n a_n z}{dx^n},$$

so erhält man, wenn man für p nach einander die Zahlen setzt 0, 1, ... n und die Gleichungen addirt unter Berücksichtigung von (12.):

$$\Phi = A_0 z + A_1 z' + A_2 z'' + \cdots A_n z^{(n)}.$$

Den Differentialausdruck Φ in (16.) wollen wir das ***Complement*** des Differentialausdruckes φ in (8.) nennen. Die letzte Gleichung giebt die Entwicklung des Complementes. Das Complement des Complementes:

$$A_0 z - \frac{dA_1 z}{dx} + \frac{d^2 A_2 z}{dx^2} - \cdots (-1)^n \frac{d^n A_n z}{dx^n}$$

ist aber nach (10.) der Differentialausdruck φ, von dem wir ausgegangen sind. Demnach haben wir folgenden Satz (dieses Journal Bd. 32, p. 189):

„Das Complement vom Complemente eines gegebenen linearen homogenen „Differentialausdruckes ist der gegebene Differentialausdruck selber.

Um diesem Satze eine andere Fassung zu geben, wollen wir daran erinnern, dafs $\Phi = 0$ die Multiplicatorgleichung ist für die Differentialgleichung $\varphi = 0$. Umgekehrt ist auch $\varphi = 0$ die Multiplicatorgleichung für die Differentialgleichung $\Phi = 0$. Was wir so ausdrücken können:

„Die Multiplicatorgleichung von der Multiplicatorgleichung einer gegebenen „linearen homogenen Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln ist die „gegebene Differentialgleichung selber.

Aus der Definition des Complementes folgt:

„Dafs das Complement der Summe oder der Differenz mehrerer linearen „homogenen Differentialausdrücke gleich ist der Summe oder der Differenz „der Complemente dieser Differentialausdrücke;

ein Satz, von dem in der folgenden Untersuchung Gebrauch gemacht werden soll.

Wir wollen noch auf eine andere bemerkenswerthe Eigenschaft eines linearen homogenen Differentialausdruckes und seines Complementes aufmerksam machen, welcher wir folgenden Ausdruck geben:

„Wenn $\varphi(z)$ einen linearen homogenen Differentialausdruck der unbe„stimmten Function z und ihren Differentialquotienten z', z'', ... $z^{(n)}$ „bezeichnet, dagegen $\Phi(z)$ das Complement desselben und u eine belie„bige andere unbestimmte Function, so ist die Differenz

$$(17.) \qquad u\varphi(z) - z\Phi(u)$$

„ein vollständiger Differentialquotient.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit dieser Angabe, wenn man die

Bedingung der Integrabilität des genannten Ausdruckes aufstellt, welche von selber erfüllt wird.

3.

Unter den linearen homogenen Differentialausdrücken von der Form (8.) verdienen eine besondere Beachtung diejenigen, deren Complement ihnen gleich ist.

„Das Complement eines linearen homogenen Differentialausdruckes von un-
„gerader Ordnung kann niemals dem Differentialausdrucke selber gleich sein, weil der Coefficient von $z^{(n)}$ in (8.) gleich a_n und in der Entwickelung von (16.) $(-1)^n a_n$ ist. Dagegen kann das Complement eines Differentialausdruckes von ungerader Ordnung wohl dem negativen Differentialausdrucke selber gleich sein. Doch auf die Untersuchung dieser Differentialausdrücke gehen wir nicht weiter ein.

Es ist $\frac{d^p a_p z^{(p)}}{dx^p}$ ein linearer homogener Differentialausdruck von der $2p$ten Ordnung, dessen Complement ihm gleich ist.

In der That, setzt man in (15.) $z^{(p)}$ statt z, so hat man:

$$\frac{d^p a_p z^{(p)}}{dx^p} = a_p^{(p)} z^{(p)} + \frac{p}{1} a_p^{(p-1)} z^{(p+1)} + \frac{p(p-1)}{1.2} a_p^{(p-2)} z^{(p-2)} + \cdots$$

während man aus der Gleichung (9.) durch $p$malige Differentiation erhält

$$\frac{d^p a_p z^{(p)}}{dx^p} = (-1)^p \left\{ \frac{d^p a_p^{(p)} z}{dx^p} - \frac{p}{1} \frac{d^{p+1} a_p^{(p-1)} z}{dx^{p+1}} + \frac{p(p-1)}{1.2} \frac{d^{p+2} a_p^{(p-2)} z}{dx^{p+2}} - \cdots \right\}.$$

Der rechte Theil dieser Gleichung ist aber nach der Definiton das Complement des rechten Theiles der vorhergehenden Gleichung.

Hieraus geht nun mit Berücksichtigung des letzten Satzes in dem vorhergehenden Paragraphen folgender allgemeine Satz hervor:

„Das Complement eines jeden Differentialausdruckes von der Form:

$$„A = a_0 z - \frac{d a_1 z'}{dx} + \frac{d^2 a_2 z''}{dx^2} - \cdots (-1)^p \frac{d^p a_p z^{(p)}}{dx^p}$$

„ist dem Differentialausdrucke selber gleich.

Dieses ist zugleich die allgemeinste Form eines linearen Differentialausdruckes von der $2p$ten Ordnung, welcher seinem Complemente gleich ist. Was wir in Form eines Satzes so ausdrücken:

„Jeder lineare homogene Differentialausdruck von der $2p$ten Ordnung, wel-
„cher seinem Complemente gleich ist, läfst sich auf die Form zurückführen

$$„A = a_0 z - \frac{d a_1 z'}{dx} + \frac{d^2 a_2 z''}{dx^2} - \cdots (-1)^p \frac{d^p a_p z^{(p)}}{dx^p}.$$

Denn es sei:

$$B = b_0 z + b_1 z' + \ldots\ b_{2p} z^{(2p)}$$

ein Differentialausdruck von der genannten Eigenschaft. Da aber auch der Differentialausdruck A dieselbe Eigenschaft hat, so wird nach dem letzten Satze des vorhergehenden Paragraphen auch das Complement des Differentialausdruckes $B-A$ diesem Differentialausdrucke gleich sein. Der Differentialausdruck A führt aber $p+1$ unbestimmte Functionen a mit sich, welche dazu verwendet werden können, in dem nach den Differentialquotienten von z geordneten Ausdrucke $B-A$ die Coefficienten der $p+1$ Differentialquotienten von gerader Ordnung verschwinden zu machen. Man hätte dann einen Differentialausdruck $B-A$ von ungerader Ordnung, dessen Complement ihm gleich ist. Was aber nach dem ersten Satze dieses Paragraphen nicht Statt haben kann. Daher ist: $B-A=0$, oder B von der Form A. Hierdurch ist zugleich der Weg angedeutet, den gegebenen Differentialausdruck B auf die Form A zurückzuführen.

Um dem Differentialausdrucke A eine andere Gestalt zu geben, wollen wir setzen:

$$2\psi = a_0 z^2 + a_1 z'^2 + a_2 z''^2 + \cdots\ a_p z^{(p)^2}.$$

Alsdann wird A gleich:

$$\psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx} + \frac{d^2\psi'(z'')}{dx^2} - \cdots\ (-1)^p \frac{d^p\psi'(z^{(p)})}{dx^p},$$

ein Ausdruck, welcher bekanntlich identisch verschwindet, wenn die Functionen a der Art sind, dafs sie den Ausdruck ψ zu einem vollständigen Differentialquotienten machen (13. Cap. der Theorie des fonct.). Man kann daher für die Function ψ, die nur die Quadrate von z und ihrer Differentialquotienten enthält, auch eine andere Function des 2ten Grades in Rüeksicht auf $z, z', \ldots$ setzen, ohne dadurch diesen Ausdruck seinem Werthe nach zu ändern, wenn der Unterschied beider Functionen ein vollständiger Differentialquotient ist. Diese Bemerkuug führt zu dem allgemeineren Satze:

„Wenn

„(18.) $$2\psi = a_{00} zz + 2a_{01} zz' + a_{11} z'z' + \cdots a_{n-1,n} z^{(n-1)} z^{(n)} + a_{n,n} z^{(n)} z^{(n)},$$

„so ist das Complement des Differentialausdruckes:

„(19.) $$\Psi = \psi' z - \frac{d\psi' z'}{dx} + \frac{d^2\psi' z''}{dx^2} - \cdots\ (-1)^n \frac{d^n\psi' z^{(n)}}{dx^n}$$

„diesem Ausdruck selber gleich.

Diesen Satz wird man zugleich mit dem folgenden bewiesen haben, der für die Transformation der 2ten Variation von besonderer Wichtigkeit ist:

„Der Differentialausdruck:

$$\text{„(19.)} \quad \Psi = \psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx} + \frac{d^2\psi'(z'')}{dx^2} - \cdots (-1)^n \frac{d^n\psi'(z^{(n)})}{dx^n}$$

„läfst sich auf die Form zurückführen:

$$\text{„(20.)} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 z - \frac{d\mathfrak{A}_1 z'}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{A}_2 z''}{dx^2} - \cdots (-1)^n \frac{d^n \mathfrak{A}_n z^{(n)}}{dx^n}.\text{“}$$

Denn da das Complement von $\mathfrak{A}$ nach dem Vorhergehenden gleich $\mathfrak{A}$ ist, so wird, wenn $\Psi = \mathfrak{A}$, auch das Complement von Ψ gleich Ψ sein. Der Beweis des letzten Satzes beruht aber darauf, dafs man einen vollständigen Differentialquotienten $\frac{d\pi}{dx}$ vom 2ten Grade in Rücksicht auf z, z' ..., und von der $n$ten Ordnung der Gestalt bestimmen kann, dafs die Produkte $z^{(\varkappa)}z^{(\lambda)}$ aus der Summe $\left(\Psi + \frac{d\pi}{dx}\right)$ ganz herausgehen und nur die Quadrate $(z^{(\varkappa)})^2$ übrig bleiben. Denn setzt man in Ψ diese Summe für ψ, so bleibt der Ausdruck Ψ seinem Werthe nach ungeändert, nimmt aber die Form $\mathfrak{A}$ an.

Der gesuchte Differentialausdruck π kann nur von der Form sein:

$$2\pi = b_{00} z z + 2b_{01} z z' + b_{11} z' z' + \cdots 2b_{n-2,n-1} z^{(n-2)} z^{(n-1)} + b_{n-1,n-1} z^{(n-1)} z^{(n-1)}.$$

Da derselbe aber $\frac{n(n+1)}{2}$ unbestimmte Functionen b enthält, so lassen sich dieselben immer so bestimmen, dafs in dem Ausdrucke $\psi + \frac{d\pi}{dx}$ die Coefficienten der $\frac{n(n+1)}{2}$ Produkte $z^\varkappa z^\lambda$ verschwinden und nur die Quadrate $(z^{(\varkappa)})^2$ übrig bleiben, so dafs man hat:

$$(21.) \quad 2\left(\psi + \frac{d\pi}{dx}\right) = \mathfrak{A}_0 z^2 + \mathfrak{A}_1 z'^2 + \mathfrak{A}_2 z''^2 + \cdots + \mathfrak{A}_n z^{(n)2}.$$

Wenn man die Coefficienten der $\frac{n(n+1)}{2}$ Produkte $z^{(\varkappa)}z^{(\lambda)}$ in dem Ausdrucke $\psi + \frac{d\pi}{dx}$ verschwinden läfst, so erhält man ebenso viele Differentialgleichungen zwischen den als bekannt vorausgesetzten Functionen a und den $\frac{n(n+1)}{2}$ zu bestimmenden Functionen b, von welchen die $n+1$ Functionen A abhängen. Auf diese Differentialgleichungen, welche die Functionen b ohne Integration ergeben, gehen wir nicht weiter ein, weil die Zurückführung der gegebenen Function 2ψ durch Hinzufügung eines vollständigen Differential-

quotienten $2\frac{d\pi}{dx}$ auf die Form (21.) sich durch einfachere Operationen ermöglicht, die in den folgenden Paragraphen entwickelt werden sollen.

4.

Aufgabe.

„Es ist gegeben eine homogene Function des 2ten Grades und der „$n$ten Ordnung von der Form:

„(18.) $2\psi = a_{(0)}zz + 2a_{01}zz' + a_{11}z'z' + \cdots + 2a_{n-1,n}z^{(n-1)}z^{(n)} + a_{n,n}z^{(n)}z^{(n)}$,

„es soll dieselbe durch Hinzufügung eines vollständigen Differentialquo„tienten $2\frac{d\pi}{dx}$ auf die Form gebracht werden:

„(21.) $2\left(\psi + \frac{d\pi}{dx}\right) = \mathfrak{A}_0 z^2 + \mathfrak{A}_1 z'^2 + \mathfrak{A}_2 z''^2 + \cdots + \mathfrak{A}_n z^{(n)2}$.

Da es Schwierigkeit macht eine Function π zu bestimmen der Gestalt, dafs in der Summe $2\left(\psi + \frac{d\pi}{dx}\right)$ alle Produkte $z^{(\varkappa)}z^{(\lambda)}$ zugleich verschwinden, so wollen wir eine Function π suchen, welche in der angegebenen Summe die Produkte $zz^{(n)}$, $z'z^{(n)}$, ..., $z^{(n-1)}z^{(n)}$ verschwinden macht. Dieses wird erreicht, indem wir setzen:

$$\pi_0 = -(2a_{n,0}z + 2a_{n,1}z' + \cdots 2a_{n,n-2}z^{(n-2)} + a_{n,n-1}z^{(n-1)})z^{(n-1)}.$$

Alsdann wird in der Summe $2\left(\psi + \frac{d\pi_0}{dx}\right)$ der Coefficient von $z^{(n)2}$ gleich $a_{n,n}$ und der Coefficient von $z^{(n-1)2}$ gleich $a_{n-1,n-1} - a'_{n,n-1} - 2a_{n,n-2}$. Zu dieser Summe $2\left(\psi + \frac{d\pi_0}{dx}\right)$ werden wir wieder einen Differentialquotienten $2\frac{d\pi_1}{ax}$ addiren, der in der Summe $2\left(\psi + \frac{d\pi_0}{dx} + \frac{d\pi_1}{dx}\right)$ die Produkte $zz^{(n-1)}$, $z'z^{(n-1)}$, ... $z^{(n-2)}z^{(n-1)}$ verschwinden macht. Fahren wir in der beschriebenen Weise fort die Produkte verschwinden zu machen, so kommen wir, wenn wir setzen $\pi = \pi_0 + \pi_1 + \cdots$, schliefslich auf die Gleichung (21.). Da die Bildung der Function π keine Integrationen verlangt, so rechtfertiget sich die in dem vorhergehenden Paragraphen gemachte Bemerkung, dafs die dort erwähnten $\frac{n(n+1)}{2}$ Differentialgleichungen die Functionen b ohne Integration ergeben. Die Werthe der Functionen $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_{n-1}$, ... erhält man hierdurch der Reihe nach:

$$(22.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_n = a_{n,n} \\ \mathfrak{A}_{n-1} = a_{n-1,n-1} - a'_{n,n-1} - 2a_{n,n-2} \\ \cdots \end{cases}$$

Auf der andern Seite kann man aber auch eine Function

$$2\pi_0 = -(\alpha_{00}z + 2\alpha_{01}z' + \cdots 2\alpha_{0,n-1}z^{(n-1)})z$$

bestimmen der Art, dafs aus der Summe $2\left(\psi + \frac{d\pi_0}{dx}\right)$ die Producte $zz', zz'', \ldots zz^{(n)}$ sämmtlich herausgehen. Dieses wird zutreffen, wenn man den Functionen α die Werthe zuertheilt:

$$\begin{aligned}
\alpha_{00} &= +a_{01} - a'_{02} + a''_{03} - \cdots (-1)^{n-1} a^{(n-1)}_{0,n} \\
\alpha_{01} &= \quad +a_{02} - a'_{03} + \cdots (-1)^{n-2} a^{(n-2)}_{0,n} \\
\alpha_{02} &= \quad\quad +a_{03} - \cdots (-1)^{n-3} a^{(n-3)}_{0,n} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{0,n-1} &= \quad\quad\quad\quad +a_{0,n}.
\end{aligned}$$

Der Coefficient $\mathfrak{A}_0$ von z^2 in der Summe $2\left(\psi + \frac{d\pi_0}{dx}\right)$ wird hiernach:

$$(23.) \qquad \mathfrak{A}_0 = a_{00} - a'_{01} + a''_{02} - \cdots (-1)^n a^{(n)}_{0,n},$$

während die Coefficienten $b_{11}, 2b_{12}, 2b_{13}, \ldots 2b_{1,n}$ der Producte $z'z', z'z'', \ldots z'z^{(n)}$ die Werthe erhalten:

$$\begin{aligned}
b_{11} &= a_{11} - 2\alpha_{01} \\
2b_{12} &= 2a_{12} - 2\alpha_{02} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
2b_{1,n-1} &= 2a_{1,n-1} - 2\alpha_{0,n-1} \\
2b_{1,n} &= 2a_{1,n},
\end{aligned}$$

die übrigen Coefficienten aber dieselben wie in 2ψ bleiben.

Auf dieselbe Weise wird man wieder eine Function:

$$2\pi_1 = -(\beta_{11}z' + 2\beta_{12}z'' + \cdots 2\beta_{1,n-1}z^{(n-1)})z'$$

bestimmen können der Gestalt, dafs aus der Summe $2\left(\psi + \frac{d\pi_0}{dx} + \frac{d\pi_1}{dx}\right)$ die Producte $z'z'', z'z''', \ldots z'z^{(n)}$ herausgehen etc. Der Coefficient von z'^2 wird hiernach:

$$\mathfrak{A}_1 = b_{11} - b'_{12} + b''_{13} - \cdots (-1)^{n-1} b^{(n-1)}_{1,n},$$

oder wenn man für die Functionen b ihre Werthe setzt:

$$(24.) \qquad \mathfrak{A}_1 = \begin{cases} a_{11} - a'_{12} + a''_{13} - \cdots (-1)^{n-1} a^{(n-1)}_{1,n} \\ -2a_{02} + 3a'_{03} - 4a''_{04} + \cdots (-1)^{n-1} n a^{(n-2)}_{0,n} \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Mag man nun mit der Bildung der Function $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_{n-1}$, ... oder mit der Bildung der Functionen $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, ... den Anfang machen, das allgemeine Bildungsgesetz derselben wird schwer zu erkennen sein. Dieses Bildungsgesetz wird sich aber herausstellen, wenn man untersucht, welche Terme zur Bildung der Functionen $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, ... $\mathfrak{A}_n$ jedes einzelne Glied der Function ψ hergiebt. Hierzu dient folgende Gleichung:

$$(25.)\quad 2zz^{(p)} = (z^2)^{(p)} - \frac{p}{1}(z'^2)^{(p-2)} + \frac{p}{2}\cdot\frac{p-3}{1}(z''^2)^{(p-4)} - \frac{p}{3}\frac{(p-4)(p-5)}{1.2}(z'''^2)^{(p-6)} + \cdots$$
$$\cdots(-1)^q\frac{p}{q}\frac{(p-q-1)(p-q-2)\ldots(p-2q+1)}{1.2.3\ldots(q-1)}((z^{(q)})^2)^{(p-2q)}\ldots,$$

in welcher die Bezeichnungen gebraucht sind:

$$z^{(p)} = \frac{d^p z}{dx^p};\qquad (z^2)^{(p)} = \frac{d^p(z^2)}{dx^p};\qquad (z'^2)^{(p-2)} = \frac{d^{p-2}\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}{dx^{p-2}};$$
$$((z^{(q)})^2)^{(p-2q)} = \frac{d^{p-2q}\left(\left(\frac{d^q z}{dx^q}\right)^2\right)}{dx^{p-2q}}.$$

Es mufs noch bemerkt werden, dafs diese für $2zz^{(p)}$ gegebene Reihe nicht ins Unbegrenzte fortläuft, sondern mit demjenigen Gliede abzubrechen ist, welches aufhört einen Sinn zu haben, das ist, wenn $p-2q$ negativ wird.

Man kann den Beweis dieser Entwicklung von $2zz^{(p)}$ in derselben Weise führen, wie man die allgemeine Gültigkeit solcher durch Induktion gefundenen Gleichungen darzuthun pflegt. Denn differenzirt man die Gleichung (25.), deren rechten Theil wir der Kürze wegen mit R bezeichnen, nach x, so erhält man:

$$2zz^{(p+1)} + 2z'z'^{(p-1)} = \frac{dR}{dx},$$

woraus

$$2zz^{(p+1)} = \frac{dR}{dx} - 2z'z'^{(p-1)}.$$

Setzt man nun in (25.) z' für z und $p-1$ für p, so erhält man die Entwicklung von $2z'z'^{(p-1)}$. Die Differenz $\frac{dR}{dx} - 2z'z'^{(p-1)}$ wird aber gerade die Reihe ergeben, die man aus (25.) erhält, wenn man $p+1$ für p setzt.

Die Gleichung (25.) läfst sich noch dadurch verallgemeinern, dafs man $z^{(r)}$ setzt für z, wodurch sie übergeht in:

$$(26.)\quad 2z^{(r)}z^{(r+p)} = ((z^{(r)})^2)^{(p)} - \frac{p}{1}((z^{(r+1)})^2)^{(p-2)} + \frac{p}{2}\frac{(p-3)}{1}((z^{(r+2)})^2)^{(p-4)}$$
$$- \frac{p}{3}\frac{(p-4)(p-5)}{1.2}((z^{(r+3)})^2)^{(p-6)} + \cdots$$
$$\cdots (-1)^q \frac{p}{q}\frac{(p-q-1)(p-q-2)\ldots(p-2q+1)}{1.2.3\ldots(q-1)}((z^{(r+q)})^2)^{(p-2q)} \cdots$$

Hiernach wird irgend ein Glied der Function 2ψ in (18.)

$$2a_{r,r+p}z^{(r)}z^{(r+p)}$$

sich in mehrere Glieder zerlegen lassen von der Form:

$$C.a_{r,r+p}((z^{(r+q)})^2)^{(p-2q)},$$

wo C eine Constante bedeutet. Dieser Differentialausdruck ist aber nach (9.) gleich:

$$(-1)^{p-2q}Ca_{r,r+p}^{(p-2q)}(z^{(r+q)})^2 - 2\frac{d\pi}{dx}.$$

Vereiniget man wieder alle diese einzelnen Glieder, so wie auch die verschiedenen Functionen π zu einer einzigen, so erhält man:

$$(27.)\quad 2.a_{r,r+p}z^{(r)}z^{(r+p)} + 2.\frac{d\pi}{dx}$$
$$= (-1)^p.a_{r,r+p}^{(p)}(z^{(r)})^2 + (-1)^{p+1}\frac{p}{1}a_{r,r+p}^{(p-2)}(z^{(r+1)})^2 + (-1)^{p+2}\frac{p}{2}.\frac{(p-3)}{1}a_{r,r+p}^{(p-4)}(z^{(r+2)})^2$$
$$+ (-1)^{p+3}\frac{p}{3}.\frac{(p-4)(p-5)}{1.2}a_{r,r+p}^{(p-6)}(z^{(r+3)})^2 + \cdots$$
$$\cdots (-1)^{p+q}\frac{p}{q}.\frac{(p-q-1)(p-q-2)\ldots(p-2q+1)}{1.2.3\ldots(q-1)}a_{r,r+p}^{(p-2q)}(z^{(r+q)})^2 + \cdots$$

Diese Reihe ist ebenfalls mit demjenigen Gliede abzubrechen, welches aufhört eine Bedeutung zu haben, das ist, wenn $p-2q$ negativ wird. Sie führt durch Hinzufügung eines vollständigen Differentialquotienten ein beliebiges Glied der Function 2ψ, welches nicht schon die Form (21.) hat, auf diese Form zurück. Die Function 2ψ nimmt hiernach mit Hinzufügung eines passenden Differentialquotienten selbst die Form (21.) an und man erkennt das Gesetz nach welchem in der Gleichung (21.) die Functionen $\mathfrak{A}$ aus den Coefficienten a der Function 2ψ und deren Differentialquotienten sich zusammensetzen.

5.

Den letzten Satz im 3ten Paragraphen können wir nunmehr auch so ausdrücken:

„Der Differentialausdruck: $\Psi = \psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx} + \cdots (-1)^n\frac{d^n\psi'(z^{(n)})}{dx^n}$ bleibt

„ungeändert, wenn man für die Function 2ψ setzt:

„(28.) $\mathfrak{A}_0 z^2 + \mathfrak{A}_1 z'^2 + \cdots + \mathfrak{A}_{n-1}(z^{(n-1)})^2 + a_{n,n}(z^{(n)})^2$."

Denn nach (22.) ist $\mathfrak{A}_n = a_{n,n}$ und die Ausdrücke der anderen Functionen $\mathfrak{A}$ sind nach dem in dem vorhergehenden Paragraphen entwickelten Gesetze leicht aufzustellen.

Mag man nun für 2ψ entweder den gegebenen Ausdruck (18.) wählen oder die durch Hinzufügung eines vollständigen Differentialquotienten zur gegebenen Function 2ψ transformirte Function (28.), so entdeckt man leicht eine zweite merkwürdige Eigenschaft des Differentialausdruckes Ψ, die sich in Form eines Satzes also ausdrücken läfst:

„Wenn die Function 2ψ der Variabeln z, z', ... $z^{(n)}$ durch die Sub-„stitution $z = u.z_1$ übergeht in eine Function $2.\psi_1$ der Variabeln z_1, „z_1', ... $z_1^{(n)}$, so geht der Differentialausdruck:

$$\Psi = \psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx} + \cdots (-1)^n \frac{d^n\psi'(z^{(n)})}{dx^n}$$

„durch dieselbe Substitution über in:

$$\Psi = \frac{1}{u}\left\{\psi_1'(z_1) - \frac{d\psi_1'(z_1')}{dx} + \cdots (-1)^n \frac{d^n\psi_1'(z_1^{(n)})}{dx^n}\right\}."$$

Die Function ψ der Variabeln z, z', ... $z^{(n)}$ geht durch die Substitution:

$$(29.)\quad \begin{cases} z &= uz_1 \\ z' &= u'z_1 + uz_1' \\ z'' &= u''z_1 + 2u'z_1' + uz_1'' \\ z^{(3)} &= u^{(3)}z_1 + 3u''z_1' + 3u'z_1'' + uz_1^{(3)} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

in eine Function ψ_1 der Variabeln z_1, z_1', z_1'' ... über. Differenzirt man nun die Function ψ unter dieser Hypothese nach den neuen Variabeln und setzt der Kürze wegen:

$$\frac{d\psi}{dz_1^{(q)}} = \psi_1'(z_1^{(q)}) \qquad \text{und} \qquad \psi'(z^{(r)}) = a_r,$$

so erhält man:

$$(30.)\quad \begin{cases} \psi_1'(z_1) = ua_0 + u'a_1 + u''a_2 + u^{(3)}a_3 + \cdots \\ \psi_1'(z_1') = \quad ua_1 + 2u'a_2 + 3u''a_3 + \cdots \\ \psi_1'(z_1'') = \quad ua_2 + 3u'a_3 + \cdots \\ \psi_1'(z_1^{(3)}) = \quad ua_3 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Differenzirt man diese Gleichungen abwechselnd mit dem positiven und negativen Zeichen genommen nach der unabhängigen Variabeln x, die zweite ein Mal, die dritte zwei Mal und so weiter und addirt die unter einander stehenden Glieder der rechten Theile aller Gleichungen, so wird das $p+1$te Glied der Summe:

$$u^{(p)}a_p - \frac{p}{1}\frac{du^{(p-1)}a_p}{dx} + \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{d^2u^{(p-2)}a_p}{dx^2} - \cdots,$$

ein Ausdruck, welcher aus (9.) hervorgeht, wenn man daselbst für a_p setzt u und für z setzt a_p. Dieser Ausdruck wird also gleich:

$$(-1)^p u.a_p^{(p)} = (-1)^p u.\frac{d^p\psi'(z^{(p)})}{dx^p}.$$

Es ist daher die Summe aller jener Gleichungen:

$$(31.)\quad \psi_1'(z_1) - \frac{d\psi_1'(z_1')}{dx} + \cdots (-1)^n\frac{d^n\psi_1'(z_1^{(n)})}{dx^n}$$
$$= u\left\{\psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx} + \cdots (-1)^n\frac{d^n\psi'(z^{(n)})}{dx^n}\right\}.$$

Die Function $2\psi_1$ ist in Rücksicht auf z_1, z_1', ... von derselben Form, als die Function 2ψ in Rücksicht auf z, z', ..., aus welcher sie durch die genannten Substitutionen (29.) hervorgegangen. Die Coefficienten der Quadrate und Producte von z_1, z_1', ... in ihr sind aber homogene Functionen des zweiten Grades von u, u' ..., und zwar ist der Coefficient von $(z_1^{(n)})^2$ gleich $u^2a_{n,n}$. Es hat demnach die Function $2\psi_1$ die Form:

$$(32.)\quad 2\psi_1 = b_{00}z_1^2 + 2b_{01}z_1z_1' + \cdots u^2a_{n,n}(z_1^{(n)})^2.$$

Aber auch die anderen Coefficienten b in dieser Function, welche den Index 0 haben, sind leicht zu bestimmende Functionen von u, u', ... In der That; differenzirt man die durch die Substitutionen (29.) identische Gleichung $\psi_1 = \psi$ nach z_1, so erhält man:

$$\psi_1'(z_1) = u\psi'(z) + u'\psi'(z') + \cdots u^{(n)}\psi'(z^{(n)}),$$

ein Ausdruck, welcher ungeändert bleibt, wenn man u mit z vertauscht, wie folgt:

$$\psi_1'(z_1) = z\psi'(u) + z'\psi'(u') + \cdots z^{(n)}\psi'(u^{(n)}).$$

Es ist aber auch nach (32.)

$$\psi_1'(z_1) = b_{00}z_1 + b_{01}z_1' + \cdots b_{0,n}z_1^{(n)}.$$

Aus dem Vergleich dieser beiden durch die Substitutionen (29.) identischen Ausdrücke für $\psi_1'(z_1)$ ergiebt sich nun:

$$(33.)\quad \begin{cases} b_{00} = u\psi'(u) + u'\psi'(u') + u''\psi'(u'') + u^{(3)}\psi'(u^{(3)}) + \cdots \\ b_{01} = u\psi'(u') + 2u'\psi'(u'') + 3u''\psi'(u^{(3)}) + \cdots \\ b_{02} = u\psi'(u'') + 3u'\psi'(u^{(3)}) + \cdots \\ b_{03} = u\psi'(u^{(3)}) + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ein System von Gleichungen, welches analog den Gleichungen (30.) gebildet ist, und aus welchen durch eine gleiche Behandlung folgende der Gleichung (31.) entsprechende Gleichung hervorgeht:

$$(34.)\quad b_{00} - b'_{01} + b''_{02} - \cdots (-1)^n b^{(n)}_{0,n} = u\left\{\psi'(u) - \frac{d\psi'(u')}{dx} + \cdots (-1)^n \frac{d^n \psi'(u^{(n)})}{dx^n}\right\}.$$

Wie sich nun der rechte Theil der Gleichung (31.) vereinfacht ohne seinen Werth zu ändern, wenn man für 2ψ die Function (28.) setzt, ebenso kann man auch den linken Theil derselben Gleichung vereinfachen. Denn bestimmt man einen vollständigen Differentialquotienten $\frac{d\varpi}{dx}$ der Gestalt, dafs die Summe $2\psi_1 + 2\frac{d\varpi}{dx}$ von der Form wird:

$$(35.)\quad \mathfrak{B}_0 z_1^2 + \mathfrak{B}_1 z_1'^2 + \ldots \mathfrak{B}_n (z_1^{(n)})^2,$$

so ändert auch der rechte Theil der Gleichung (31.) seinen Werth nicht, wenn man für die Function $2\psi_1$ die Function (35.) setzt. In dieser letzteren Function bedeuten die Coefficienten $\mathfrak{B}$ dieselben Functionen der Coefficienten in $2\psi_1$ als die entsprechenden Gröfsen $\mathfrak{A}$ Functionen der Coefficienten in 2ψ sind. Es ist daher nach (23.) und (22.)

$$(36.)\quad \begin{cases} \mathfrak{B}_0 = b_{00} - b_{01} + b''_{02} \ldots (-1)^n b^{(n)}_{0,n} \\ \mathfrak{B}_n = u^2 a_{n,n}. \end{cases}$$

Die durch die Substitutionen (29.) identische Gleichung (31.) nimmt hiernach, wenn man für die Function $2\psi_1$ die Function (35.) setzt, die Gestalt an:

$$\mathfrak{B}_0 z_1 - \frac{d\mathfrak{B}_1 z'_1}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{B}_2 z''_1}{dx^2} - \cdots (-1)^n \frac{d^n u^2 a_{n,n} z_1^{(n)}}{dx^n}$$
$$= u\left\{\psi' z - \frac{d\psi' z'}{dx} + \frac{d^2\psi' z''}{dx^2} - \cdots (-1)^n \frac{d^n \psi'(z^{(n)})}{dx^n}\right\},$$

woraus, wenn man das Glied $\mathfrak{B}_0 z_1 = \mathfrak{B}_0 \frac{z}{u}$ auf die andere Seite der Gleichung bringt, für $\mathfrak{B}_0$ den Werth aus (36.) und (34.) setzt, und für die Function Ψ in (19.) der Kürze wegen das Zeichen braucht $\Psi(z)$, man erhält

$$(37.)\quad -\frac{d}{dx}\left\{\mathfrak{B}_1 z'_1 - \frac{d\mathfrak{B}_2 z''_1}{dx} + \cdots (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} u^2 a_{n,n} z_1^{(n)}}{dx^{n-1}}\right\}$$
$$= u.\Psi(z) - z\Psi(u).$$

Es stellt sich also der Ausdruck $u.\Psi(z) - z\,\Psi(u)$ als ein vollständiger Differentialquotient dar. Dieses war vorauszusehen. Denn nach dem vorletzten Satze des Paragraphen 3. ist das Complement des Differentialausdruckes $\Psi(z)$ diesem Differentialausdrucke selber gleich, unter welcher Voraussetzung eben der letzte Satz des Paragraphen 2. auf den angegebenen Differentialausdruck anwendbar ist. Was aber nicht vorauszusehen war, ist die Form des Integrales jenes vollständigen Differentialausdruckes, welche aus der Gleichung (37.) hervorleuchtet. Sie ist dieselbe in Rücksicht auf die Gröfsen $z_1', z_1'', \ldots z_1^{(n)}$, welche die Function Ψ nach dem letzten Satze des Paragraphen 3. in Rücksicht auf die Gröfsen $z, z', \ldots z^{(n)}$ annimmt. Diese Bemerkung führt mit Berücksichtigung der vorhergehenden Sätze zu folgendem sehr merkwürdigen Satz:

„Wenn $\Psi(z)$ einen in Rücksicht auf die unbestimmte Function z und „ihre Differentialquotienten $z', z'', \ldots z^{(p)}$ lineären homogenen Differential„ausdruck bedeutet, dessen Complement ihm selber gleich ist, so ist der „Differentialausdruck

$$u\,\Psi(z) - z\,\Psi(u)$$

„ein vollständiger Differentialquotient, was auch u für eine Function sei „der unabhängigen Variabeln; und das Integral dieses Differentialaus„druckes geht durch die Substitution $z = uz_1$, indem z_1 ganz daraus „verschwindet, in einen in Rücksicht auf $z_1', z_1'', \ldots z_1^{(p-1)}$ lineären ho„mogenen Differentialausdruck über von der Eigenschaft, dafs, wenn man „in demselben z_1' als die unbestimmte Function betrachtet mit ihren Dif„ferentialquotienten $z_1'', z_1''', \ldots z_1^{(p-1)}$, das Complement ihm selber „gleich ist."

Setzt man nun, um abzukürzen,

$$(38.)\qquad \Psi_1(z_1') = \mathfrak{B}_1 z_1' - \frac{d\mathfrak{B}_2 z_1''}{dx} + \cdots (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}u^2 a_{n,n} z_1^{(n)}}{dx^{n-1}},$$

so erhält man durch Integration von (37.)

$$(39.)\qquad \int\{u\,\Psi(z) - z\,\Psi(u)\}\,dx = -\Psi_1(z_1').$$

Wenn aber u ein Werth von z ist, welcher der Differentialgleichung $\Psi(z)=0$ genügt, so geht (39.) über in:

$$(40.)\qquad \int u\,\Psi(z)\,dx = -\Psi_1(z_1').$$

Diese Gleichung ist der analytische Ausdruck des Satzes von *Jacobi* (dieses Journal Bd. 17, pag. 71), den wir als Corollar des vorhergehenden Satzes also wiedergeben:

„Wenn $\Psi(z)$ einen in Rücksicht auf die unbestimmte Function z und „ihre Differentialquotienten z', z'', ... $z^{(p)}$ linearen homogenen Ausdruck be„deutet, dessen Complement ihm selber gleich ist, und u einen Werth von z, „welcher der Differentialgleichung $\Psi(z)=0$ genügt, so ist der Differential„ausdruck $u\Psi(z)$ ein vollständiger Differentialquotient. Das Integral desselben „geht durch die Substitution $z=uz_1$, indem z_1 daraus verschwindet, in einen „in Rücksicht auf z_1', z_1'', ... $z_1^{(p-1)}$ linearen homogenen Differentialausdruck über, „dessen Complement ihm selber gleich ist, wenn man darin z_1' als die neue „unbestimmte Function betrachtet und demnach z_1'', z_1''', ... $z_1^{(p-1)}$ als die Dif„ferentialquotienten dieser Function."

Diese Sätze erscheinen wichtig genug, um sie noch durch einen zweiten Beweis zu begründen.

6.

Die Function Ψ läfst sich nach dem letzten Satze des dritten Paragraphen auf die Form zurückführen: $\mathfrak{A}_0 z - \frac{d\mathfrak{A}_1 z'}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{A}_2 z''}{dx} - \cdots$ Jeder Term derselben hat die Eigenschaft, dafs er seinem Complemente gleich ist. Es wird also der zuletzt angegebene allgemeine Satz auch Statt finden müssen, wenn man für die Function Ψ die Function wählt:

$$\frac{d^p\mathfrak{A}_p z^{(p)}}{dx^p}.$$

Und umgekehrt, wenn jener Satz für diese Function erwiesen ist, so wird er auch auf die Summe oder Differenz solcher Functionen, aus welchen die allgemeine Function Ψ zusammengesetzt ist, sich ausdehnen lassen.

Um für den vorliegenden Fall den Ausdruck $u\Psi(z) - z\Psi(u)$ darzustellen, setze man in Gleichung (9.) für a_p und z respective u und $\mathfrak{A}_p z^{(p)}$. Dadurch geht die genannte Gleichung über in:

$$u\frac{d^p\mathfrak{A}_p z^{(p)}}{dx^p} = (-1)^p\left\{\mathfrak{A}_p z^{(p)} u^{(p)} - \frac{p}{1}\frac{d\mathfrak{A}_p z^{(p)} u^{(p-1)}}{dx} + \cdots\right\},$$

und wenn man in dieser Gleichung u mit z vertauscht:

$$z\frac{d^p\mathfrak{A}_p u^{(p)}}{dx^p} = (-1)^p\left\{\mathfrak{A}_p u^{(p)} z^{(p)} - \frac{p}{1}\frac{d\mathfrak{A}_p u^{(p)} z^{(p-1)}}{dx} + \cdots\right\}.$$

Zieht man nun die letzte Gleichung von der vorhergehenden ab, so erhält man den gesuchten Ausdruck:

$$(41.)\quad u\frac{d^p\mathfrak{A}_p z^{(p)}}{dx^p} - z\frac{d^p\mathfrak{A}_p u^{(p)}}{dx^p} = (-1)^p\frac{d}{dx}\left\{U_1 - \frac{dU_2}{dx} + \cdots(-1)^{p-1}\frac{d^{p-1}U_p}{dx^{p-1}}\right\},$$

wenn man setzt:

$$\mathfrak{A}_p(u^{(p)}z^{(p)} - u^{(p)}z^{(p)}) = 0$$

$$\frac{p}{1}\mathfrak{A}_p(u^{(p)}z^{(p-1)} - u^{(p-1)}z^{(p)}) = U_1$$

. . . . . .

$$\frac{p(p-1)\dots(p-r+1)}{1.2\dots r}\mathfrak{A}_p(u^{(p)}z^{(p-r)} - u^{(p-r)}z^{(p)}) = U_r$$

. . . . . .

$$\mathfrak{A}_p(u^{(p)}z - uz^{(p)}) = U_p.$$

Diese Ausdrücke werden lineare homogene Functionen der Gröfsen z_1', z_1'', $\dots$ $z_1^{(p)}$, wenn man in ihnen für z setzt uz_1 und entwickelt. Bezeichnet man den Coefficienten von $z_1^{(q)}$ in der Entwickelung von U_r mit (r, q), so wird derselbe:

$$(r,q) = \frac{\mathfrak{A}_p}{1.2\dots r.1.2\dots q}\{p(p-1)\dots(p-r-q-1)u^{(p)}u^{(p-r-q)} - p(p-1)\dots(p-r-1)p(p-1)\dots(p-q-1)u^{(p-r)}u^{(p-q)}\}$$

ein Ausdruck, welcher ungeändert bleibt, wenn man r mit q vertauscht.

Jenes System von Gleichungen, welche, wie bemerkt wurde, in Rücksicht auf z_1', z_1'', $\dots$ $z_1^{(p)}$ linear sind, hat demnach noch die Eigenschaft, dafs die Horizontalreihen der Coefficienten von z_1', z_1'', $\dots$ $z_1^{(p)}$ den entsprechenden Vertikalreihen gleich sind. Mithin lassen sich die linearen Ausdrücke links von den Gleichheitszeichen als die partiellen Differentialquotienten einer homogenen Function X_p der 2ten Ordnung in Rücksicht auf z_1', z_1'', $\dots$ $z_1^{(p)}$ der Gestalt darstellen, dafs:

$$X_p'(z_1') = U_1, \quad X_p'(z_1'') = U_2, \quad \dots \quad X_p'(z_1^{(p)}) = U_p.$$

Multiplicirt man nun das obige System von linearen Gleichungen der Reihe nach mit z_1, z_1', $\dots$ $z_1^{(p)}$ und addirt, so erhält man die doppelte Function X_p. Addirt man aber sämmtliche positiven unter einander stehenden Glieder in der nicht entwickelten Form und dann sämmtliche negativen Glieder, und bemerkt, dafs

$$z^{(p)}z_1 + \frac{p}{1}z^{(p-1)}z_1' + \dots = \frac{d^p z z_1}{dx^p} \text{ und } u^{(p)}z_1 + \frac{p}{1}u^{(p-1)}z_1' + \dots = \frac{d^p u z_1}{dx^p},$$

so wird:

$$\mathfrak{A}_p\left\{u^{(p)}\frac{d^p z z_1}{dx^p} - z^{(p)}\frac{d^p u z_1}{dx^p}\right\} = 2X_p$$

oder, wenn man für z seinen Werth uz_1 setzt:

$$(42.) \quad \mathfrak{A}_p \left\{ u^{(p)} \frac{d^p u z_1^2}{dx^p} - \frac{d^p u z_1}{dx^p} \cdot \frac{d^p u z_1}{dx^p} \right\} = 2X_p .$$

Dieses ist der symbolische Ausdruck für die in Rücksicht auf z_1', z_1'', ... $z_1^{(p)}$ homogene Function des zweiten Grades X_p, deren partielle Differentialquotienten eben die in (41.) mit U bezeichneten Gröfsen sind. Hiernach nimmt die Gleichung (41.) die Gestalt an:

$$u \frac{d^p \mathfrak{A}_p z^{(p)}}{dx^p} - z \frac{d^p \mathfrak{A}_p u^{(p)}}{dx^p}$$

$$= (-1)^p \frac{d}{dx} \left\{ X_p'(z_1') - \frac{dX_p'(z_1'')}{dx} + \cdots (-1)^{p-1} \frac{d^{p-1} X_p' z_1^{(p)}}{dx^{p-1}} \right\}.$$

Diese Gleichung liefert den Beweis, dafs der behandelte Differentialausdruck ein vollständiger Differentialquotient ist, und dafs zugleich das Integral durch die Substitution $z = uz_1$ in eine lineare homogene Function von z_1', z_1'', ... übergeht, deren Complement ihm selber gleich ist.

Setzt man nun:

$$(43.) \quad X = X_1 + X_2 + \cdots X_n,$$

so folgt aus der letzten Gleichung, da:

$$\Psi(z) = \Sigma(-1)^p \frac{d^p \mathfrak{A}_p z^{(p)}}{dx^p} \quad \text{und} \quad \Psi(u) = \Sigma(-1)^p \frac{d^p \mathfrak{A}_p u^{(p)}}{dx^p},$$

wenn man jene Gleichung mit $(-1)^p$ multiplicirt, für p nach einander die Zahlen setzt 0, 1, ... n und addirt:

$$(44.) \quad u\Psi(z) - z\Psi(u) = \frac{d}{dx} \left\{ X'(z_1') - \frac{dX'(z_1'')}{dx} + \cdots (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} X'(z_1^{(n)})}{dx^{n-1}} \right\}.$$

Das Integral hiervon ist ebenfalls seinem Complemente gleich.

Wenn aber u ein Werth von z ist, welcher der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügt und man setzt:

$$(45.) \quad -\Psi_1(z_1') = X'(z_1') - \frac{dX'(z_1'')}{dx} + \cdots (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} X'(z_1^n)}{dx^{n-1}},$$

so erhält man durch Integration von (44.)

$$(46.) \quad \int u . \Psi(z) dx = -\Psi_1(z_1')$$

ein Integral von allgemeinerer Form als das in (39.), (38.), dessen nachzuweisende Eigenschaft aber nach dem vorletzten Satze des 3ten Paragraphen aus seiner Form ebenfalls hervorleuchtet.

7.

Die vorangegangenen Uutersuchungen dienen dazu die 2te Variation (4.) des Integralausdruckes (1.)

$$(47.) \qquad \Delta_2 = \int_a^b 2\psi\, dx$$

auf die Form (7.) zurückzuführen. Diese Transformation wird den Gegenstand dieses Abschnittes bilden.

Da 2ψ, wie aus (5.) erhellet, eine homogene Function der 2ten Ordnung ist in Rücksicht auf z, z', ... $z^{(n)}$, so hat man, wenn man der Kürze wegen setzt $\psi'(z^{(p)}) = a_p$,

$$2\psi = a_0 z + a_1 z' + \cdots a_n z^{(n)}.$$

Ein Ausdruck, der, wie (8.) auf die Form (13.), auf gleiche Weise auf die Form gebracht werden kann:

$$2\psi = A_0 z - \frac{d\pi}{dx},$$

wo $A_0 = a_0 - a_1' + \cdots (-1)^n a_n^{(n)}$. Da aber π für die Grenzen des Integrals verschwindet, weil jedes Glied eine der Functionen z, z', ... $z^{(n-1)}$ als Factor enthält, welche der Annahme nach in den Grenzen des Integrals verschwinden, so erhält man durch Integration, wenn man für die eingeführten Gröfsen a wieder ihre Werthe setzt, mit Berücksichtigung von (19.) und dafs Ψ und $\Psi(z)$ gleichbedeutend sind:

$$(48.) \qquad \Delta_2 = \int_a^b z\, \Psi(z)\, dx.$$

Es ist hier, wie in der ganzen Untersuchung, stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dafs kein Glied der Function 2ψ (5.) innerhalb der Grenzen der Integration unendlich wird.

Durch die Substitution $z = uz_1$, wo u einen Werth von z bedeutet, welcher der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügt, und durch theilweise Integration geht die 2te Variation, wenn man ferner beachtet, dafs auch z_1 für die Grenzen des Integrals verschwindet, mit Zuziehung der Gleichung (40.) über in:

$$(49.) \qquad \Delta_2 = \int_a^b z_1' \Psi_1(z_1')\, dx.$$

Dieser Integralausdruck ist von ganz ähnlicher Form als der vorhergehende. Man wird ihn daher wieder ebenso behandeln können, indem man setzt $z_1' = v_1' z_2'$ und annimmt, dafs v_1' ein Werth von z_1' sei, welcher der Differentialgleichung $\Psi(z_1') = 0$ genügt. Durch diese Substitution nimmt die

2te Variation die Gestalt an:

$$(50.) \qquad \Delta_2 = \int_a^b z_2'' \Psi_2(z_2'')\, dx,$$

worin $\Psi(z_2'') = -\int v_1' \Psi_1(z_1')\, dx$ von der Form ist:

$$(51.) \qquad \Psi_2(z_2'') = \mathfrak{C}_2 z_2'' - \frac{d\mathfrak{C}_3 z_2'''}{dx} + \cdots (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2} u^2 v_1'^2 a_{n,n} z_2^{(n)}}{dx^{n-2}}.$$

Indem man dieses Verfahren nun fortsetzt, gelangt man endlich zu dem folgenden Ausdrucke für die 2te Variation:

$$(52.) \qquad \Delta_2 = \int_a^b z_n^{(n)} \Psi_n(z_n^{(n)})\, dx,$$

wo $\Psi_n(z_n^{(n)})$ den Werth hat:

$$(53.) \qquad \Psi_n(z_n^{(n)}) = u^2 v_1'^2 w_2''^2 \ldots a_{n,n} z_n^{(n)}.$$

Setzt man aber diesen Werth in (52.), so erhält man die gesuchte Form der 2ten Variation:

$$(54.) \qquad \Delta_2 = \int_a^b a_{n,n} (u v_1' w_2'' \ldots z_n^{(n)})^2\, dx.$$

Um dieses Integral weiter zu behandeln, mufs man sich die Substitutionen vergegenwärtigen, welche auf dasselbe geführt haben. Sie sind folgende:

$$(55.) \qquad z = u z_1, \quad z_1' = v_1' z_2', \quad z_2'' = w_2'' z_3'', \quad \ldots$$

wo u, v_1', w_2'', ... Werthe respective der unbekannten Functionen z, z_1', z_2'', ... bedeuten, welche den n Differentialgleichungen genügen:

$$(56.) \qquad \Psi(z) = 0, \quad \Psi_1(z_1') = 0, \quad \Psi_2(z_2'') = 0, \quad \ldots$$

die durch folgende Relationen ihre Bedeutung erlangen:

$$(57.) \qquad \int u \Psi(z)\, dx = -\Psi_1(z_1'), \qquad \int v_1' \Psi_1(z_1')\, dx = -\Psi_2(z_2''), \quad \ldots$$

Die Differentialgleichungen (56.) lassen sich durch die angegebenen Substitutionen (55.) zurückführen auf Differentialgleichungen zwischen der einen unbekannten Function z und ihren Differentialquotienten. Die erste Gleichung (56.) ist von der gewünschten Form. Man erreicht dieses bei der 2ten Gleichung, wenn man setzt $z_1' = \frac{d\frac{z}{u}}{dx}$, bei der dritten, wenn man setzt

$z_2'' = \dfrac{d\left(\dfrac{1}{v_1'}\dfrac{d\left(\frac{z}{u}\right)}{dx}\right)}{dx}$ .... Es werden demnach den Werthen u, v_1', w_2'', ... von z, z_1', z_2'', ..., welche jenen Differentialgleichungen (56.) genügen, Werthe von z entsprechen, welche den umgeformten Differentialgleichungen und auf Grund der Relationen (57.) auch der einen Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügen. Diese entsprechenden Werthe von z seien:

$$u, \qquad v, \qquad w, \qquad \ldots$$

Alsdann hat man folgende Relationen, welche aus (55.) hervorgehen:

$$(58.) \quad \begin{cases} v = uv_1, & w = uw_1, & \ldots & z = uz_1, \\ & w_1' = v_1'w_2', & \ldots & z_1' = v_1'z_2', \\ & & \ldots & z_2'' = w_2''z_3'', \\ & & & \ldots\ldots \end{cases}$$

Diese Relationen werden dazu dienen das Produkt

$$(59.) \qquad u\,v_1'\,w_2''\ldots z_n^{(n)},$$

dessen Quadrat in das Integral (54.) eingeht, durch u, v, w, ... z und die Differentialquotienten dieser Gröfsen auszudrücken. Bei dieser Gelegenheit kommt ein Satz von den Determinanten in Anwendung, den ich, gelesen zu haben, mich nicht erinnere. Er lautet also:

„Wenn a, b, c, ..., $(n+1)$ Functionen einer einzigen Variabeln und „a', a'', ... $a^{(n)}$ die auf einander folgenden Differentialquotienten der ersten, „b', b'', ... $b^{(n)}$ der zweiten . . . Function bedeuten, so ist:

$$\begin{vmatrix} (\lambda a) & (\lambda a)' & \ldots & (\lambda a)^{(n)} \\ (\lambda b) & (\lambda b)' & \ldots & (\lambda b)^{(n)} \\ (\lambda c) & (\lambda c)' & \ldots & (\lambda c)^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \lambda^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} a & a' & \ldots & a^{(n)} \\ b & b' & \ldots & b^{(n)} \\ c & c' & \ldots & c^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

„mag λ eine Constante oder eine Function der unabhängigen Variabeln sein.

Betrachten wir nun die Determinante:

$$(60.) \qquad \nabla = \begin{vmatrix} u & u' & \ldots & u^{(n)} \\ v & v' & \ldots & v^{(n)} \\ w & w' & \ldots & w^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z & z' & \ldots & z^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Dieselbe geht, wenn man für $u, v, w, \ldots z$ die Werthe setzt aus der ersten Horizontalreihe (58.)

$$u.1, \quad uv_1, \quad uw_1, \quad \ldots \quad uz_1$$

nach dem angegebenen Determinantensatze über in

$$\nabla = u^{n+1}\begin{vmatrix} v_1' & v_1'' & \ldots & v_1^{(n)} \\ w_1' & w_1'' & \ldots & w_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1' & z_1'' & \ldots & z_1^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Setzt man wieder für $v_1', w_1', \ldots z_1'$ die aus der 2ten Horizontalreihe (58.) genommenen Werthe:

$$v_1'.1, \quad v'w_2', \quad \ldots \quad v_1'z_2',$$

so erhält man auf gleiche Weise:

$$\nabla = u^{n+1}v_1'^n\begin{vmatrix} w_2'' & \ldots & w_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_2'' & \ldots & z_2^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Diese Operation fortgesetzt ergiebt endlich folgenden Werth der Determinante:

$$(61.) \qquad \nabla = u^{n+1}v_1'^n w_2''^{n-1} \ldots z_n^{(n)}.$$

Ebenso wird sich die Determinante:

$$(62.) \qquad \nabla_n = \begin{vmatrix} u & u' & \ldots & u^{(n-1)} \\ v & v' & \ldots & v^{(n-1)} \\ w & w' & \ldots & w^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

welche sich von der Determinante ∇ nur dadurch unterscheidet, dafs die letzte Horizontal- und die letzte Verticalreihe darin fehlen, wie folgt darstellen lassen:

$$(63.) \qquad \nabla_n = u^n v'^{n-1} w''^{n-2} \ldots$$

Dividirt man nun (63.) in (61.), so erhält man das gesuchte Product:

$$(64.) \qquad \frac{\nabla}{\nabla_n} = uv_1'w_2'' \ldots z_n^{(n)}.$$

Setzt man endlich diesen Werth des Produktes in (54.), so hat man die gewünschte Form (7.) der zweiten Variation:

$$(65.) \qquad \Delta_2 = \int_a^b a_{n,n}\frac{\nabla^2}{\nabla_n^2}dx,$$

in welcher $a_{n,n} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}$ und ∇ und ∇_n durch (60.) und (62.) als Determinanten gegeben sind.

Die Bestimmung der Functionen $u, v, w, \ldots$ und die Untersuchung der willkürlichen Constanten in dieser Form der zweiten Variation soll dem folgenden Abschnitte vorbehalten bleiben.

8.

Wir kehren zu der Differentialgleichung (14.) zurück:

$$f'(y) - \frac{df'(y')}{dx} + \cdots (-1)^n \frac{d^n f'(y^{(n)})}{dx^n} = 0,$$

durch welche dem Maximum oder Minimum von Δ entsprechend y als Function von x sich bestimmt. Angenommen, man habe y als Function von x mit den $2n$ willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$ gefunden, welche Function der angegebenen Differentialgleichung identisch genügt. Alsdann steht es frei, die Differentialgleichung nach irgend einer der willkürlichen Constanten zu differenziren. Differenzirt man aber den linken Theil jener Gleichung nach α_λ, so erhält man gerade den Ausdruck Ψ, in welchem für z steht $\frac{\partial y}{\partial \alpha_\lambda}$. Aus der angegebenen Differentiation der genannten Differentialgleichung sehen wir daher folgende Gleichung hervorgehen.

$$66. \qquad \Psi\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_\lambda}\right) = 0,$$

welche den Beweis liefert, dafs $\frac{\partial y}{\partial \alpha_\lambda}$ ein Werth von z ist, welcher der linearen homogenen Differentialgleichung der $2n$ten Ordnung $\Psi(z) = 0$ genügt. Solcher Werthe giebt es aber $2n$, weil jeder der $2n$ Constanten α ein Werth von z entspricht. Man kann daher den vollständigen Werth von z, welcher der Differentialgleichung genügt, mit $2n$ neuen willkürlichen Constanten aus jenen $2n$ Werthen zusammensetzen. Die alten willkürlichen Constanten α sind so zu bestimmen, dafs y mit seinen $(n-1)$ ersten Differentialquotienten für die Grenzen der Integration verschwindet. — Da aber $u, v, w, \ldots$ Werthe von z sind, welche sämmtlich der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügen, so haben diese Functionen die Form:

$$67. \quad \begin{cases} u = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots a_{2n} r_{2n} \\ v = b_1 r_1 + b_2 r_2 + \cdots b_{2n} r_{2n} \\ w = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \cdots c_{2n} r_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$(68.) \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_\lambda} = r_\lambda$$

und mit den Buchstaben $a, b, c, \ldots$ mit ihren angehängten Indices Constanten bezeichnet.

Diese Constanten sind jedoch nicht alle willkührlich. Vielmehr existiren gewisse Relationen zwischen ihnen, welche wohl zu berücksichtigen sind.

Es sind zwar $u, v, w, \ldots$ Werthe von z, welche der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügen, allein diese Werthe sind noch vermöge der Relationen (58.) abhängig von den Werthen $u, v_1', w_2'', \ldots$, welche respective für $z, z_1', z_2'', \ldots$ gesetzt, wie in dem vorhergehenden Paragraphen hervorgehoben wurde, den Differentialgleichungen (56.) genügen müssen. Wir haben demnach folgende Bedingungsgleichungen

$$(69.) \qquad \Psi(u) = 0, \qquad \Psi_1(v_1') = 0, \qquad \Psi_2(w_2'') = 0, \qquad \ldots$$

welche mit Zuziehung von (58.) und (67.) sich auf Gleichungen zwischen den Constanten $a, b, c, \ldots$ und den Functionen r zurückführen lassen.

In der That, bezeichnet man mit $D_0, D_1, D_2, \ldots$ die Determinanten:

$$(70.) \qquad D_0 = 1, \quad D_1 = u, \quad D_2 = \begin{vmatrix} u & u' \\ v & v' \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

so kann man mit Anwendung des angegebenen Determinantensatzes diese Gröfsen also darstellen:

$$D_0 = 1, \qquad D_1 = u, \qquad D_2 = u^2 v_1', \qquad D_3 = u^3 v_1'^2 w_2'', \qquad \ldots$$

woraus sich ergiebt:

$$(71.) \qquad v_1' = \frac{D_2 D_0}{D_1^2}, \qquad w_2'' = \frac{D_3 D_1}{D_2^2}, \qquad \ldots$$

welche Gleichungen das Bildungsgesetz der Multiplicatoren $u, v_1', w_2'', \ldots$ veranschaulichen. Diese Werthe hat man nun in die Gleichungen (69.) und dann für $u, v, w, \ldots$ die Werthe aus (67.) einzusetzen, um die gesuchten Gleichungen zwischen den Constanten $a, b, c, \ldots$ und den Functionen r zu erhalten.

Die erste von den Gleichungen (69.), welche nur die Constanten a und die Functionen r enthält, wird von selber erfüllt. Die zweite führt auf eine Gleichung zwischen den Constanten a, b und den Functionen r, welche, da $\Psi_1(z_1') = 0$ die erste Integralgleichung von $\Psi(z) = 0$ ist, durch *eine* Be-

dingungsgleichung zwischen den Constanten a, b identisch erfüllt wird. Die dritte Gleichung führt auf eine Gleichung zwischen den Constanten a, b, c und den Functionen r zurück, welche, da $\Psi_2(z_2'') = 0$ die zweite Integralgleichung von $\Psi(z) = 0$ ist, durch *zwei* Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten a, b, c identisch erfüllt wird, wenn die vorhergehende schon identisch erfüllt wurde etc. . . . Die Indices von Ψ in den Gleichungen (69.) geben demnach zugleich die Zahlen der Bedingungsgleichungen an, welche zwischen den Constanten a, b, c, . . . existiren. Es ist also die Zahl der Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten a, b, c, . . . gleich $\frac{n(n-1)}{2}$.

Es lassen sich aber auch $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen angeben, die durch jene $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten a, b, c, . . . identisch erfüllt werden. Es sind dieses folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \Psi(u) = 0, & & \\ \Psi(v) = 0, & \Psi_1(v_1') = 0, & \\ \Psi(w) = 0, & \Psi_1(w_1') = 0, & \Psi_2(w_2'') = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{array}$$

mit Ausnahme der in der ersten Vertikalreihe stehenden Gleichungen, welche von selber erfüllt werden und nur der Uebersicht wegen hinzugefügt worden sind.

Wenn nun jene $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten a, b, c, . . . sämmtlich erfüllt sind, so wird die letzte Gleichung (69.)

$$(72.) \qquad \Psi_{n-1}(t_{n-1}^{n-1}) = 0$$

eine identische Gleichung. Erinnert man sich aber des Bildungsgesetzes der Function Ψ_{n-1} durch successive Anwendung der Gleichung (39.), so wird man auch umgekehrt die Behauptung gerechtfertigt finden, dafs die identische Gleichung (72.) jene $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten a, b, c, . . . in sich einschliefse.

Durch diese $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen zwischen den $2n^2$ Constanten a, b, c, . . . lassen sich eben so viele Constanten als Functionen der übrigen ausdrücken. Die letzteren bleiben willkürlich.

Soll daher ein wirkliches Maximum oder Minimum Statt finden, so darf erstens, wie schon erwähnt wurde, der Ausdruck $a_{n,n} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}$ innerhalb

der Integrationsgrenzen sein Vorzeichen nicht ändern, und zweitens müssen die willkürlichen Constanten sich so bestimmen lassen, dafs der Quotient $\frac{\nabla}{\nabla_n}$ innerhalb der Integrationsgrenzen a und b nicht unendlich wird.

Gehen wir aber auf die Form jenes Quotienten näher ein, so bemerken wir auf den ersten Blick, dafs, wenn man den Differentialquotienten $\frac{\partial \nabla}{\partial z^{(p)}}$, welcher wieder eine Determinante ist, mit ∇_p bezeichnet, man ihn aus Determinanten zusammensetzen kann wie folgt:

$$(73.) \qquad \frac{\nabla}{\nabla_n} = \frac{\nabla_0 z + \nabla_1 z' + \cdots \nabla_n z^{(n)}}{\nabla_n}.$$

Setzt man in diese Determinanten nun für $u, v, w, \ldots$ die Werthe (67.), so übersieht man auch leicht die Verbindung der Constanten zu neuen Functionen der Constanten, und der Functionen r mit ihren Differentialquotienten zu neuen Functionen. Es zerfällt nämlich jede der angegebenen Determinanten in die Summe von Produkten von 2 Factoren, von denen der eine Factor durch eine Determinante dargestellt wird, welche sich nur aus den Constanten $a, b, c, \ldots$ zusammensetzt, während der andere Factor eine Determinante ist aus den Functionen r und ihren Differentialquotienten. Diese Determinantenconstanten sowohl als diese Determinantenfunctionen kommen im Nenner und Zähler des Quotienten (73.) nur in linearer Weise vor. Es kann daher dieser Quotient nur unendlich werden dadurch, dafs der Nenner ∇_n durch 0 hindurchgeht.

Die zweite oben angegebene Bedingung des Maximums oder Minimums vereinfacht sich hiernach dahin, dafs die willkürlichen Constanten in ∇_n sich so bestimmen lassen müssen, dafs dieser Ausdruck innerhalb der Integrationsgrenzen nicht verschwindet.

Die bezeichneten Determinantenconstanten gehen aber in den zu untersuchenden Ausdruck ∇_n nur in linearer Weise ein. Es ist daher natürlich diese Determinantenconstanten als neue Constanten einzuführen und die Bedingungen zu suchen, welchen diese neuen Constanten unterworfen sind. Diese sind zweifacher Art. Erstens finden schon Relationen Statt zwischen diesen neuen Constanten als Determinanten, gebildet aus den alten Constanten. Doch auch diese Relationen sind nicht unabhängig von einander, indem die einen die andern bedingen. Zweitens aber sind sie noch $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen unterworfen, weil zwischen den alten Constanten eben so viele Bedingungsgleichungen Statt finden, welche aus der identischen Gleichung (72.) hervor-

gehen. Wenn es sich nun zeigt, dafs auch in diese Gleichung nur die Determinantenconstanten eingehen, und wir werden in den folgenden speciellen Fällen sehen, dafs es daselbst zutrifft, so ist die zweite Art der Bedingungen leicht hergestellt. Die Untersuchung der ersten Art der Bedingungen zwischen den Determinantenconstanten ist eine würdige Aufgabe der Determinantentheorie, die ihrer allgemeinen Lösung harrt. In den angedeuteten speciellen Fällen jedoch soll sie vollständig durchgeführt werden.

Wir brechen hiermit die allgemeine Untersuchung der zweiten Variation eines Integralausdruckes ab, indem wir uns begnügen sie auf die Form (65.) zurückgeführt, die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen zwischen den willkürlichen Constanten $a, b, c, \ldots$ angegeben und die Schwierigkeit der weiteren Behandlung der zweiten Variation hervorgehoben zu haben. Die folgenden mehr ins Einzelne gehenden Untersuchungen der Fälle, wenn $n = 1, 2, 3$, werden dazu dienen, die hier gemachten kurzen Andeutungen im Speciellen zu verdeutlichen.

9.

Es handle sich um das Maximum oder Minimum des Integrals

$$\Delta = \int_a^b f(x, y, y')\, dx.$$

In dieser Voraussetzung bestimmt sich die unbekannte Function y durch die Differentialgleichung:

$$f'(y) - \frac{df'(y')}{dx} = 0.$$

Gesetzt, man habe durch Integration y als Function von x mit ihren beiden willkürlichen Constanten α_1, α_2 gefunden. Alsdann hat man letztere so zu bestimmen, dafs y für die Grenzen a und b die gegebenen Werthe annehme.

Hierdurch ist in der zweiten Variation:

$$\Delta_2 = \int_a^b 2\psi\, dx,$$

in welcher:

$$2\psi = a_{00} z z + 2a_{01} z z' + a_{11} z' z',$$

Alles bestimmt mit Ausnahme der unbestimmten Function z und ihrer Differentialquotienten. Setzt man nun

$$\Psi(z) = \psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx},$$

so erhält man durch theilweise Integration:

$$\Delta_2 = \int_a^b z\, \Psi(z)\, dx.$$

Der Ausdruck $\Psi(z)$ läfst sich aber auf die Form bringen:

$$\Psi(z) = \mathfrak{A}_0 z - \frac{d a_{11} z'}{dx}.$$

Es ist hiernach:

$$u\Psi(z) - z\Psi(u) = -\frac{d\{a_{11}(uz' - zu')\}}{dx},$$

woraus man durch Integration erhält:

$$\int \{u\Psi(z) - z\Psi(u)\}\, dx = -a_{11}(uz' - zu').$$

Wenn man nun setzt:

$$u = a_1 r_1 + a_2 r_2, \qquad \frac{\partial y}{\partial a_1} = r_1, \qquad \frac{\partial y}{\partial a_2} = r_2,$$

so verschwindet $\Psi(u)$ und man erhält:

$$\int u\Psi(z)\, dx = -a_{11}(uz' - zu'),$$

mit Hülfe welcher Gleichung der vorhin gegebene Ausdruck von Δ_2 durch theilweise Integration übergeht in:

$$\Delta_2 = \int_a^b a_{11} \frac{d\left(\frac{z}{u}\right)}{dx}(uz' - zu')\, dx \quad \text{oder}$$

$$\Delta_2 = \int_a^b a_{11} \frac{(uz' - zu')^2}{u^2}\, dx.$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen, in welchen, wie man sieht, nur das Verhältnifs der willkürlichen Constanten a_1, a_2 eingeht, darf innerhalb der Grenzen der Integration nicht unendlich werden, wenn ein wirkliches Maximum oder Minimum Statt haben soll. Er wird aber unendlich, wenn der Nenner u^2 für einen zwischen a und b liegenden Werth von x verschwindet. Wenn man also setzt: $m = -\frac{a_1}{a_2}$, so ist es eines der Criterien des Maximums oder Minimums, dafs in dem Ausdrucke:

$$\frac{u}{a_2} = r_2 - m r_1$$

die Constante m so bestimmt werden könne, dafs derselbe für keinen zwischen a und b liegenden Werth von x verschwindet. Sehen wir zu, wie ***Jacobi*** dieses Criterium weiter behandelt. —

Wenn es einen Werth giebt, den der Bruch $\frac{r_2}{r_1}$ innerhalb der Grenzen a und b für x nicht annimmt, so wird man der willkürlichen Constanten m

immer einen solchen Werth zuertheilen können, dafs der Ausdruck:

$$\frac{u}{a_2} = r_1\left(\frac{r_2}{r_1} - m\right)$$

innerhalb der genannten Grenzen für x niemals verschwindet. Man braucht der Constante nur jenen Werth zu geben. Wenn dagegen jener Bruch innerhalb derselben Grenzen für x alle Werthe durchläuft von $-\infty$ bis $+\infty$, so mufs jener Ausdruck nothwendiger Weise ein Mal verschwinden, welchen Werth auch die willkürliche Constante m habe. Untersuchen wir daher die Natur des Bruches $\frac{r_2}{r_1}$.

Der Zähler r_2 und der Nenner r_1 genügen der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$. Man hat daher:

$$\Psi(r_2) = 0, \qquad \Psi(r_1) = 0,$$

woraus hervorgeht:

$$r_1\Psi(r_2) - r_2\Psi(r_1) = 0,$$

eine vollständige Differentialgleichung, durch deren Integration man erhält:

$$\int\{r_1\Psi(r_2) - r_2\Psi(r_1)\}dx = C.$$

Der linke Theil dieser Gleichung wird aber aus der oben angegebenen Integralformel erhalten, wenn man für u und z respective setzt r_1 und r_2. Setzt man seinen Werth, so erhält man:

$$-a_{11}(r_1r_2' - r_2r_1') = C$$

oder

$$\frac{d\frac{r_2}{r_1}}{dx} = -\frac{C}{a_{11}r_1^2}.$$

Der rechte Theil der Gleichung ändert sein Vorzeichen nicht, weil C eine Constante, r_1^2 ein Quadrat und a_{11} sein Vorzeichen nicht ändern darf, wenn ein wirkliches Maximum oder Minimum Statt haben soll. Daraus folgt, dafs der Bruch $\frac{r_2}{r_1}$ fortwährend wächst, wenn er ein Mal wächst, und wenn er die Grenze $+\infty$ des Wachsens erreicht hat zu $-\infty$ überspringt und dann wieder wächst über 0 hinaus bis $+\infty$ etc....: oder, dafs er in eben derselben Weise abnimmt. Der Bruch $\frac{r_2}{r_1}$ wird also alle Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen, wenn er für zwei verschiedene Werthe von x ein und denselben Werth hat. Hieraus ersieht man, wie wesentlich es ist die Grenzen der Integration zu beschränken. Denn wenn man die Grenzen des Integrals Δ

nur nicht so weit ausdehnt, dafs der Bruch $\frac{r_2}{r_1}$ innerhalb der Grenzen der Integration noch einmal den ursprünglichen Werth annimmt, so wird man der willkürlichen Constante m immer einen solchen Werth zuertheilen können, dafs der Ausdruck $\frac{u}{a_2}$ innerhalb der Grenzen der Integration nicht verschwindet. Die Grenzen des Integrals dürfen also nur bis zu der Grenze erweitert werden, für welche zum ersten Male die Gleichung Statt hat:

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)_a = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)_b$$

und selbst diese Grenze mufs schon ausgeschlossen bleiben.

Um diese Gleichung geometrisch zu deuten, nehme man an, dafs

$$y = F(x, \alpha_1, \alpha_2)$$

das Integral sei der Differentialgleichung

$$f'(y) - \frac{df'(y')}{dx} = 0$$

mit den beiden willkürlichen Constanten α_1, α_2. Jene Integralgleichung stellt die gesuchte Curve des Maximums oder Minimums dar, wenn die willkürlichen Constanten den Grenzbedingungen gemäfs bestimmt sind. Die erste Grenzbedingung:

$$y_a = F(a, \alpha_1, \alpha_2)$$

drückt aus, dafs die Curve des Maximums oder Minimums ausgehe von einem durch die Coordinaten a und y_a gegebenen Punkte. Durch sie wird α_2 als Function von α_1 bestimmt, und die Gleichung der Curve des Maximums oder Minimums enthält nunmehr nur noch eine willkürliche Constante α_1. Man hat daher eine ganze Schaar von Curven des Maximums oder Minimums, welche alle von demselben Punkte ausgehen.

Betrachten wir nun zwei von diesen Curven, deren Parameter α_1 sich nur um die unendlich kleine Gröfse ε von einander unterscheiden, so stellen sich ihre Gleichungen also dar:

$$y = F(x, \alpha_1, \alpha_2),$$
$$y = F(x, \alpha_1, \alpha_2) + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1}\right)\varepsilon.$$

Diese beiden von demselben Punkte ausgehenden Curven werden sich im Allgemeinen in einem zweiten Punkte schneiden. Setzt man nun für x und y die Coordinaten b und y_b des Schnittpunktes und zieht die erste Gleichung

von der folgenden ab, so erhält man für den Schnittpunkt:

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1}\right)_b + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_2}\right)_b \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1} = 0.$$

Differenzirt man nun die obige Gleichung, durch welche α_2 als Function von α_1 definirt wurde, nach α_1, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1}\right)_a + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_2}\right)_a \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1} = 0,$$

und durch Elimination von $\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1}$ aus diesen beiden Gleichungen:

$$\frac{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_2}\right)_a}{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1}\right)_a} = \frac{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_2}\right)_b}{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1}\right)_b}.$$

Dieses ist aber gerade dieselbe Gleichung, in welche die zu deutende Gleichung übergeht, wenn man dort für r_1 und r_2 ihre Werthe $\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1}$ und $\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_2}$ setzt. Sie beweiset, dafs für die von einem gegebenen Punkte ausgehende Curve des Maximums oder Minimums, wenn man auf ihr continuirlich fortschreitet, die zweite Grenze des Integrals, welches ein Maximum oder ein Minimum sein soll, nur bis zu demjenigen Punkte ausgedehnt werden dürfe, in welchem die Curve von der ihr zunächst liegenden Curve des Maximums oder Minimums geschnitten wird. Es ist dieses derselbe Punkt, in welchem die Enveloppe aller von dem gegebenen Punkte ausgehenden Curven des Maximums oder Minimums die in Rede stehende Curve berührt.

Zu der oben angegebenen Grenzengleichung gelangt man auch durch folgende ebenfalls von ***Jacobi*** angestellte Betrachtung:

Wenn der Integralausdruck Δ ein Maximum oder Minimum sein soll, so darf die zweite Variation

$$\Delta_2 = \int_a^b z\, \Psi(z)\, dx$$

für alle Functionen z ihr Vorzeichen nicht ändern. Es ist aber noch zulässig, dafs sie für eine bestimmte Function z verschwinde. Das Verschwinden der 2ten Variation für eine bestimmte Function von z ist jedoch die Grenze für die Ausdehnung der Grenzen des Integrals Δ. Denn dehnt man die Grenzen dieses Integrales noch weiter aus, so bietet das Prinzip der Continuität wenigstens eine Wahrscheinlichkeit dafür, dafs die zweite Variation auch ihr Vorzeichen ändere.

Die zweite Variation verschwindet aber für einen Werth von z, welcher der Differentialgleichung genügt:

$$\Psi(z) = 0,$$

und der allgemeinste Werth von z, welcher dieser Differentialgleichung genügt, ist, wenn man mit a_1 und a_2 zwei willkürliche Constanten bezeichnet

$$z = a_1 r_1 + a_2 r_2.$$

Hiernach scheint es, dafs diese Grenze, für welche Δ_2 verschwindet, unter allen Umständen erreicht werden könne. Allein es ist zu beachten, dafs die Function z noch der Beschränkung unterworfen ist, zu verschwinden für die Grenzen des Integrals Δ. Man hat daher:

$$0 = a_1 (r_1)_a + a_2 (r_2)_a,$$
$$0 = a_1 (r_1)_b + a_2 (r_2)_b,$$

woraus durch Elimination der willkürlichen Constanten a_1, a_2 eben jene Grenzengleichung hervorgeht:

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)_a = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)_b.$$

10.

Die Bestimmung des Maximums oder Minimums des Integralausdruckes

$$\Delta = \int_a^b f(x, y, y', y'')\, dx$$

verlangt die Integration der Differentialgleichung:

$$f'(y) - \frac{df'(y')}{dx} + \frac{d^2 f'(y'')}{dx^2} = 0.$$

Sie giebt y als Function von x mit 4 willkürlichen Constanten. Letztere hat man so zu bestimmen, dafs y und y' für die Grenzen a, b des Integrales gegebene Werthe erhalten.

Ob die auf diese Weise bestimmte Function y jenen Integralausdruck Δ zu einem wirklichen Maximum oder Minimum macht, hängt von der zweiten Variation ab:

$$\Delta_2 = \int_a^b 2\psi\, dx,$$

wo

$$2\psi = a_{00} z z + a_{11} z' z' + a_{22} z'' z'' + 2a_{12} z' z'' + 2a_{02} z z'' + 2a_{01} z z'.$$

Durch theilweise Integration führt man nun Δ_2 auf die Form zurück:

$$\Delta_2 = \int_a^b z\, \Psi(z)\, dx,$$

wo

$$\Psi(z) = \psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx} + \frac{d^2\psi'(z'')}{dx^2}.$$

Dieser letztere Ausdruck vereinfacht sich aber nach (20.) in:

$$\Psi(z) = \mathfrak{A}_0 z - \frac{d\mathfrak{A}_1 z'}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{A}_2 z''}{dx^2},$$

indem man hat:

$$\mathfrak{A}_0 = a_{00} - a'_{01} + a''_{02},$$
$$\mathfrak{A}_1 = a_{11} - a'_{12} - 2a_{02},$$
$$\mathfrak{A}_2 = a_{22}.$$

Es ist nun nach (41.)

$$u\mathfrak{A}_0 z - z\mathfrak{A}_0 u = 0,$$
$$-\left(u\frac{d\mathfrak{A}_1 z'}{dx} - z\frac{d\mathfrak{A}_1 u'}{dx}\right) = \frac{d\mathfrak{A}_1(u'z - z'u)}{dx},$$
$$u\frac{d^2\mathfrak{A}_2 z''}{dx^2} - z\frac{d^2\mathfrak{A}_2 u''}{dx^2} = 2\frac{d\mathfrak{A}_2(u''z' - z''u')}{dx} - \frac{d^2\mathfrak{A}_2(u''z - z''u)}{dx^2},$$

woraus man durch Addition erhält:

$$u\Psi(z) - z\Psi(u) = -\frac{d\Psi_1(z'_1)}{dx},$$

wenn man setzt:

$$-\Psi_1(z'_1) = \mathfrak{A}_1(u'z - z'u) + 2\mathfrak{A}_2(u''z' - z''u') - \frac{d\mathfrak{A}_2(u''z - z''u)}{dx}.$$

Wenn nun u ein Werth von z ist, welcher der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügt, so verschwindet das Glied $z\Psi(u)$ aus der vorhergehenden Gleichung und man erhält durch Integration:

$$\int u\Psi(z)\,dx = -\Psi_1(z'_1).$$

Mit Hülfe dieser Gleichung und durch die Substitution $z = uz_1$ geht nun die zweite Variation über in:

$$\Delta_2 = \int_a^b z'_1\Psi_1(z'_1)\,dx,$$

welcher Ausdruck nur die unbestimmte Function z'_1 mit ihren Differentialquotienten enthält, weil aus dem mit $\Psi_1(z'_1)$ bezeichneten Ausdrucke z_1 verschwindet und nur die Differentialquotienten dieser Function zurückbleiben.

Man kann nun die Function $\Psi_1(z'_1)$ einfacher durch die partiellen Differentialquotienten ein und derselben Determinante ausdrücken. Denn setzt man:

$$\Delta = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix},$$

so wird:

$$-\Psi_1(z_1') = \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \Delta}{\partial v''} + 2\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \Delta}{\partial v} + \frac{d\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \Delta}{\partial v'}}{dx}.$$

Man weifs nun a priori, dafs die Differenz:

$$v_1' \Psi_1(z_1') - z_1' \Psi_1(v_1')$$

der vollständige Differentialquotient einer Function $\Psi_2(z_2'')$ ist. Wir werden dieses jedoch noch besonders beweisen, indem wir das Integral desselben darstellen.

Die Function $\Psi_1(z_1')$ geht über in $\Psi_1(v_1')$, wenn man für z setzt v. Daher ist:

$$\Psi_1(v_1') = \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \Delta}{\partial z''} + 2\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{d\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \Delta}{\partial z'}}{dx}.$$

Ferner hat man:

$$z_1' = \frac{d\frac{z}{u}}{dx} = \frac{uz' - u'z}{u^2} = -\frac{\partial \Delta}{\partial v''} \cdot \frac{1}{u^2},$$

$$v_1' = \frac{d\frac{v}{u}}{dx} = \frac{uv' - u'v}{u^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial z''} \cdot \frac{1}{u^2}.$$

Um nun jene Differenz gleich in der einfachsten Gestalt zu erhalten, bemerken wir, dafs:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial z''}\frac{\partial \Delta}{\partial v} - \frac{\partial \Delta}{\partial v''}\frac{\partial \Delta}{\partial z} = -u'\Delta,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial z''}\frac{\partial \Delta}{\partial v'} - \frac{\partial \Delta}{\partial v''}\frac{\partial \Delta}{\partial z'} = u\Delta,$$

$$d\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial z''}}{dx} = -\frac{\partial \Delta}{\partial z'}; \qquad d\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial v''}}{dx} = -\frac{\partial \Delta}{\partial v'}.$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichungen nimmt die angegebene Differenz die Gestalt an:

$$v_1' \Psi_1(z_1') - z_1' \Psi_1(v_1') = -\frac{d\frac{\mathfrak{A}_2 \Delta}{u}}{dx} = -\frac{d\Psi_2(z_2'')}{dx}.$$

Wenn nun v ein Werth von z ist, welcher der Differentialgleichung

$\Psi_1(z_1') = 0$ genügt, so verschwindet der Term $z_1' \Psi_1(v_1')$ und man erhält durch Integration

$$\int v_1' \Psi_1(z_1')\, dx = -\frac{\mathfrak{A}_2 \Delta}{u} = -\Psi_2(z_2'').$$

Diese Gleichung dient dazu die zweite Variation weiter zu transformiren. Denn setzt man $z_1' = r_1' z_2'$, so erhält man durch theilweise Integration:

$$\Delta_2 = \int_a^b z_2'' \Psi_2(z_2'')\, dx.$$

Setzt man nun hierin für $\Psi_2(z_2'')$ den angegebenen Werth, ebenso für z_2'' seinen Werth:

$$z_2'' = \frac{u\Delta}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial z''}\right)^2},$$

der am einfachsten aus dem in (71.) angegebenen Werthe von w_2'' dadurch hervorgeht, dafs man für w setzt z, so erhält man die gewünschte Form (65.) der zweiten Variation:

$$\Delta_2 = \int_a^b a_{22} \frac{\Delta^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial z''}\right)^2} dx.$$

In dieselbe gehen die Werthe von u und v ein:

$$u = a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 + a_4 r_4,$$
$$v = b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3 + b_4 r_4,$$

mit den 4 willkürlichen Constanten a und den 4 willkürlichen Constanten b, welche aber noch der Gleichung $\Psi_1(v_1') = 0$ identisch zu genügen haben. Von dieser Gleichung weifs man, dafs sie identisch erfüllt wird durch *eine* Relation der Constanten, die man etwa dadurch erhält, dafs man der unabhängigen Variabeln x in jener Gleichung einen bestimmten Werth zuertheilt.

Bezeichnet man nun die Determinante $a_\varkappa b_\lambda - a_\lambda b_\varkappa$ mit $[\varkappa\lambda]$, so wird man bemerken, dafs in den zuletzt angegebenen Ausdruck von Δ_2 nur die Verhältnisse der 6 Determinanten-Constanten eingehen:

$$[12] \quad [13] \quad [14] \quad [23] \quad [24] \quad [34],$$

was auch bei der Gleichung $\Psi_1(v_1') = 0$ zutrifft. Führt man also die 6 Determinanten-Constanten als neue Constanten ein, welche, weil es sich nur um die Verhältnisse derselben handelt, 5 Constanten vertreten, so hat man zwischen diesen 5 neuen Constanten 2 Bedingungsgleichungen. Die erste:

$$[12].[34] + [23].[14] - [13].[24] = 0$$

ist eine identische Gleichung der Determinanten, woraus sie besteht; die zweite macht folgende Gleichung auf die angegebene Art zu einer identischen:

$$\Psi_1(v_1') = \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \Delta}{\partial z''} + 2\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{d\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \Delta}{\partial z'}}{dx} = 0.$$

Der Ausdruck $\frac{\partial \Delta}{\partial z''}$ enthält demnach nur noch 3 vollkommen willkürliche Constanten. Diese 3 willkürlichen Constanten müssen sich so bestimmen lassen, dafs der genannte Ausdruck $\frac{\partial \Delta}{\partial z''}$ innerhalb der Grenzen a, b der Integration nicht verschwindet, wenn Δ ein wirkliches Maximum oder Minimum sein soll.

11.

Es sei ein Integralausdruck gegeben von der Form:

$$\Delta = \int_a^b f(x, y, y', y'', y''')\, dx,$$

es soll y als Function von x so bestimmt werden, dafs jenes Integral ein Maximum oder Minimum werde.

Diese Aufgabe verlangt die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$f'(y) - \frac{df'(y')}{dx} + \frac{d^2 f'(y'')}{dx^2} - \frac{d^3 f'(y''')}{dx^3} = 0$$

mit ihren 6 willkürlichen Constanten. Letztere hat man so zu bestimmen, dafs y, y', y'' für die Grenzen $x = a$ und $x = b$ des Integrals gegebene Werthe erhalten. Die Beantwortung der Frage, ob auf diese Weise ein Maximum oder ein Minimum erreicht wird, oder keines von beiden, hängt von der zweiten Variation Δ_2 ab:

$$\Delta_2 = \int_a^b 2\psi\, dx,$$

in welcher:

$$2\psi = a_{(0)} z^2 + a_{11} z'^2 + a_{22} z''^2 + a_{33} z'''^2 + 2a_{01} z z' + 2a_{02} z z'' + 2a_{03} z z''' + 2a_{12} z' z'' + 2a_{13} z' z''' + 2a_{23} z'' z'''.$$

Man transformirt dieses Integral durch theilweise Integration in:

$$\Delta_2 = \int_a^b z\, \Psi(z)\, dx,$$

indem man setzt:

$$\Psi(z) = \psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx} + \frac{d^2\psi'(z'')}{dx^2} - \frac{d^3\psi'(z''')}{dx^3}.$$

Dieser letztere Ausdruck läfst sich nach (20.) einfacher also darstellen:

$$\Psi(z) = \mathfrak{A}_0 z - \frac{d\mathfrak{A}_1 z'}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{A}_2 z''}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{A}_3 z'''}{dx^3},$$

indem man nach (23.), (24.) und (22.) hat:

$$\mathfrak{A}_0 = a_{00} - a'_{01} + a''_{02} - a'''_{03},$$
$$\mathfrak{A}_1 = a_{11} - a'_{12} + a''_{13} - 2a_{02} + 3a'_{03},$$
$$\mathfrak{A}_2 = a_{22} - a'_{23} - 2a_{13},$$
$$\mathfrak{A}_3 = a_{33}.$$

Es ist nun nach (41.)

$$u\mathfrak{A}_0 z - z\mathfrak{A}_0 u = 0,$$

$$-\left(u\frac{d\mathfrak{A}_1 z'}{dx} - z\frac{d\mathfrak{A}_1 u'}{dx}\right) = \frac{d\mathfrak{A}_1(u'z - z'u)}{dx},$$

$$u\frac{d^2\mathfrak{A}_2 z''}{dx^2} - z\frac{d^2\mathfrak{A}_2 u''}{dx^2} = 2\frac{d\mathfrak{A}_2(u''z' - z''u')}{dx} - \frac{d^2\mathfrak{A}_2(u''z - z''u)}{dx^2},$$

$$-\left(u\frac{d^3\mathfrak{A}_3 z'''}{dx^3} - z\frac{d^3\mathfrak{A}_3 u'''}{dx^3}\right) = 3\frac{d\mathfrak{A}_3(u'''z'' - z'''u'')}{dx} - 3\frac{d^2\mathfrak{A}_3(u'''z' - z'''u')}{dx^2} + \frac{d^3\mathfrak{A}_3(u'''z - z'''u)}{dx^3}.$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man:

$$u\Psi(z) - z\Psi(u) = -\frac{d\Psi_1(z'_1)}{dx},$$

wenn man setzt:

$$-\Psi_1(z'_1) = \mathfrak{A}_1(u'z - z'u) + 2\mathfrak{A}_2(u''z' - z''u') - \frac{d\mathfrak{A}_2(u''z - z''u)}{dx}$$
$$+ 3\mathfrak{A}_3(u'''z'' - z'''u'') - 3\frac{d\mathfrak{A}_3(u'''z' - z'''u')}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{A}_3(u'''z - z'''u)}{dx^2}.$$

Es sei nun u ein Werth von z, welcher der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügt. Unter dieser Annahme verschwindet das Glied $z\Psi(u)$ der vorhergehenden Gleichung, und man erhält durch Integration:

$$\int u\Psi(z)\,dx = -\Psi_1(z'_1),$$

eine Gleichung, deren rechter Theil durch die Substitution $z = uz_1$ in eine Function von z'_1 und deren Differentialquotienten übergeht, indem z_1 ganz daraus verschwindet. Durch dieselbe Substitution geht aber die 2te Variation, wenn man die letzte Gleichung zu Hülfe nimmt, über in:

$$\Delta_2 = \int_a^b z'_1\Psi_1(z'_1)\,dx.$$

Es wird nun darauf ankommen die Differenz:

$$v_1' \Psi_1(z_1') - z_1' \Psi_1(v_1')$$

als einen vollständigen Differentialquotienten darzustellen, indem man hat:

$$z_1' = \frac{d\frac{z}{u}}{dx} = \frac{uz' - u'z}{u^2},$$

$$v_1' = \frac{d\frac{v}{u}}{dx} = \frac{uv' - u'v}{u^2}.$$

Zu diesem Zwecke wollen wir den oben angegebenen Ausdruck von $\Psi_1(z_1')$ in zwei andere zerlegen, indem wir setzen:

$$-\Psi_1^0(z_1') = \mathfrak{A}_1(u'z - z'u) + 2\mathfrak{A}_2(u''z' - z''u') - \frac{d\mathfrak{A}_2(u''z - z''u)}{dx},$$

$$-\Psi_1^I(z_1') = 3\mathfrak{A}_3(u'''z'' - z'''u'') - 3\frac{d\mathfrak{A}_3(u'''z' - z'''u')}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{A}_3(u'''z - z'''u)}{dx^2},$$

wodurch man hat:

$$\Psi_1(z_1') = \Psi_1^0(z_1') + \Psi_1^I(z_1').$$

Der erste von diesen Ausdrücken ist derselbe, der im vorhergehenden Paragraphen mit $\Psi_1(z_1')$ bezeichnet wurde, und wir entnehmen von dort den Werth der Differenz:

$$v_1' \Psi_1^0(z_1') - z_1' \Psi_1^0(v_1') = -\frac{d\frac{1}{u}\mathfrak{A}_2 A}{dx}.$$

Was den zweiten Ausdruck anbetrifft, so wollen wir denselben ordnen nach den Differentialquotienten von $\mathfrak{A}_3$, indem wir setzen:

$$\Psi_1^I(z_1') = \mathfrak{A}_3 F_0(z_1') + \mathfrak{A}_3' F_1(z_1') + \mathfrak{A}_3'' F_2(z_1').$$

Alsdann ist:

$$-F_0(z_1') = (u^{(5)}z - z^{(5)}u) - (u^{(4)}z' - z^{(4)}u') + (u'''z'' - z'''u'')$$
$$-F_1(z_1') = 2(u^{(4)}z - z^{(4)}u) - (u'''z' - z'''u')$$
$$-F_2(z_1') = (u'''z - z'''u).$$

Diese Ausdrücke lassen sich einzeln leichter behandeln als die aus ihnen zusammengesetzte Function $\Psi_1^I(z_1')$. Ohne grofse Mühe wird man finden, dafs:

$$v_1' F_0(z_1') - z_1' F_0(v_1') = \frac{1}{u^2}\{uA_{015} - u'A_{014} + u''A_{013} - u'''A_{012}\},$$
$$v_1' F_1(z_1') - z_1' F_1(v_1') = \frac{1}{u^2}\{2uA_{014} - u'A_{013}\},$$
$$v_1' F_2(z_1') - z_1' F_2(v_1') = \frac{1}{u^2}uA_{013},$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$\Delta = \Delta_{012} = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{\varkappa\lambda\mu} = \begin{vmatrix} u^{(\varkappa)} & u^{(\lambda)} & u^{(\mu)} \\ v^{(\varkappa)} & v^{(\lambda)} & v^{(\mu)} \\ z^{(\varkappa)} & z^{(\lambda)} & z^{(\mu)} \end{vmatrix}.$$

Um den rechten Theil der ersten von jenen drei Gleichungen zu transformiren, benutzen wir die identische Gleichung:

$$u\Delta_{123} - u'\Delta_{023} + u''\Delta_{013} - u'''\Delta_{012} = 0,$$

mit deren Hülfe der rechte Theil der genannten Gleichung sich also darstellt:

$$\frac{1}{u^2}\{u(\Delta_{015} - \Delta_{123}) + u'(\Delta_{023} - \Delta_{014})\} = \frac{d\frac{1}{u}(\Delta_{014} - \Delta_{023})}{dx},$$

wie auch der rechte Theil der zweiten Gleichung auf die Form zurückgeführt wird:

$$\frac{d\frac{1}{u}\Delta_{013}}{dx} + \frac{1}{u}(\Delta_{014} - \Delta_{023}),$$

wenn man erwägt, dafs:

$$\frac{d\Delta_{013}}{dx} = \Delta_{023} + \Delta_{014}; \qquad \frac{d\Delta_{014}}{dx} = \Delta_{024} + \Delta_{015}; \qquad \frac{d\Delta_{023}}{dx} = \Delta_{123} + \Delta_{124}.$$

Die obigen Differenzen werden hiernach:

$$v_1' F_0(z_1') - z_1' F_0(v_1') = \frac{d\frac{1}{u}(\Delta_{014} - \Delta_{023})}{dx},$$

$$v_1' F_1(z_1') - z_1' F_1(v_1') = \frac{d\frac{1}{u}\Delta_{013}}{dx} + \frac{1}{u}(\Delta_{014} - \Delta_{023}),$$

$$v_1' F_2(z_1') - z_1' F_2(v_1') = \frac{1}{u}\Delta_{013}.$$

Addirt man diese Gleichungen, nachdem man sie vorher der Reihe nach multiplicirt hat mit $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_3'$, $\mathfrak{A}_3''$, so erhält man:

$$v_1' \Psi_1^I(z_1') - z_1' \Psi_1^I(v_1') = \frac{d}{dx}\left\{\mathfrak{A}_3'\frac{1}{u}\Delta_{013} + \mathfrak{A}_3\frac{1}{u}(\Delta_{014} - \Delta_{023})\right\}.$$

Addirt man endlich diese Gleichung zu der obigen, aus dem vorhergehenden Paragraphen genommenen Gleichung, so erhält man die gesuchte Differenz:

$$v_1' \Psi_1(z_1') - z_1' \Psi_1(v_1') = -\frac{d\Psi_2(z_2'')}{dx},$$

worin:

$$\Psi_2(z_2'') = \frac{1}{u}\{\mathfrak{A}_2\Delta_{012} + \mathfrak{A}_3(\Delta_{023} - \Delta_{014}) - \mathfrak{A}_3'\Delta_{013}\}.$$

Die in diesem Ausdrucke vorkommenden Determinanten lassen sich sämmtlich durch eine einzige ausdrücken. Denn setzt man:

$$\nabla = \begin{vmatrix} u & u' & u'' & u''' \\ v & v' & v'' & v''' \\ w & w' & w'' & w''' \\ z & z' & z'' & z''' \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{d\nabla}{dx} = \nabla' = \begin{vmatrix} u & u' & u'' & u^{(4)} \\ v & v' & v'' & v^{(4)} \\ w & w' & w'' & w^{(4)} \\ z & z' & z'' & z^{(4)} \end{vmatrix},$$

so ist:

$$\Delta_{012} = -\frac{\partial\nabla}{\partial w'''}, \quad \Delta_{023} = -\frac{\partial\nabla}{\partial w'}, \quad \Delta_{014} = \frac{\partial\nabla'}{\partial w''}, \quad \Delta_{013} = \frac{\partial\nabla}{\partial w''}.$$

Man hat daher:

$$-\Psi_2(z_2'') = \frac{1}{u}\left\{\mathfrak{A}_2\frac{\partial\nabla}{\partial w'''} + \mathfrak{A}_3\left(\frac{\partial\nabla}{\partial w'} + \frac{\partial\nabla'}{\partial w''}\right) + \mathfrak{A}_3'\frac{\partial\nabla}{\partial w''}\right\}$$

und wenn man in dieser Gleichung z mit w vertauscht:

$$\Psi_2(w_2'') = \frac{1}{u}\left\{\mathfrak{A}_2\frac{\partial\nabla}{\partial z'''} + \mathfrak{A}_3\left(\frac{\partial\nabla}{\partial z'} + \frac{\partial\nabla'}{\partial z''}\right) + \mathfrak{A}_3'\frac{\partial\nabla}{\partial z''}\right\}.$$

Kehren wir aber zu der angegebenen Differenz zurück, und nehmen an, dafs v ein Werth von z sei, welcher der Differentialgleichung $\Psi_1(z_1) = 0$ genügt, so verschwindet daraus das Glied $z_1'\Psi_1(v_1')$ und man erhält durch Integration:

$$\int v_1'\Psi_1(z_1')\,dx = -\Psi_2(z_2'')$$

mit Hülfe welcher Gleichung der zuletzt angegebene Ausdruck der zweiten Variation, wenn man setzt: $z_1' = v_1'z_2'$, übergeht in:

$$\Delta_2 = \int_a^b z_2''\Psi_2(z_2'')\,dx.$$

Um diesen Integralausdruck wieder zu transformiren, bilden wir die Differenz:

$$w_2''\Psi_2(z_2'') - z_2''\Psi_2(w_2'') = -\frac{d\Psi_3(z_3''')}{dx},$$

in welcher:

$$w_2'' = \frac{u\frac{\partial\nabla}{\partial z'''}}{\left(\frac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}\right)^2}, \qquad z_2'' = -\frac{u\frac{\partial\nabla}{\partial w'''}}{\left(\frac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}\right)^2}$$

und $\Psi_2(z_2'')$ und $\Psi_2''(w_2'')$ die vorhin entwickelten Ausdrücke bedeuten. Man wird den Werth jener Differenz in einer einfachen Gestalt erhalten, wenn man sich folgender Relationen bedient:

$$\frac{\partial\nabla}{\partial w'''}\frac{\partial\nabla}{\partial z'} - \frac{\partial\nabla}{\partial z'''}\frac{\partial\nabla}{\partial w'} = \nabla\frac{\partial^2\nabla}{\partial w'''\partial z'},$$

$$\frac{\partial\nabla}{\partial w'''}\frac{\partial\nabla'}{\partial z''} - \frac{\partial\nabla}{\partial z'''}\frac{\partial\nabla'}{\partial w''} = \frac{\partial\nabla'}{\partial w^{(4)}}\frac{\partial\nabla'}{\partial z''} - \frac{\partial\nabla'}{\partial z^{(4)}}\frac{\partial\nabla'}{\partial w''} = \nabla'\frac{\partial^2\nabla'}{\partial w^{(4)}\partial z''} = \nabla'\frac{\partial^2\nabla}{\partial w'''\partial z''},$$

$$\frac{\partial\nabla}{\partial w'''}\frac{\partial\nabla}{\partial z''} - \frac{\partial\nabla}{\partial z'''}\frac{\partial\nabla}{\partial w''} = \nabla\frac{\partial^2\nabla}{\partial w'''\partial z''},$$

$$\frac{d\dfrac{\partial^2\nabla}{\partial w'''\partial z''}}{dx} = -\frac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'}, \qquad \frac{\partial^2\nabla}{\partial w'''\partial z''} = -\frac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}.$$

Sie wird hierdurch gleich:

$$\frac{\mathfrak{A}_3\left(\nabla\dfrac{d\dfrac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}}{dx} - \nabla'\dfrac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}\right) - \mathfrak{A}_3'\nabla\dfrac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}}{\left(\dfrac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}\right)^2} = -\frac{d\mathfrak{A}_3\dfrac{\nabla}{\dfrac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}}}{dx}.$$

Man hat daher, wenn man für $\mathfrak{A}_3$ seinen Werth setzt $a_{33} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'''\partial y'''}$:

$$\Psi_3(z_3''') = a_{33}\frac{\nabla}{\dfrac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'''\partial y'''}\frac{\nabla}{\dfrac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}}.$$

Läfst man nun w einen Werth von z bedeuten, welcher der Differentialgleichung $\Psi_2(z_2'') = 0$ genügt, so verschwindet das Glied $z_2''\Psi_2(w_2'')$ aus der letzten Differenz, und man erhält durch Integration:

$$\int w_2''\Psi_2(z_2'')\,dx = -\Psi_3(z_3''').$$

Mit Hülfe dieser Gleichung geht endlich der zuletzt angegebene Werth der zweiten Variation, wenn man setzt $z_2'' = w_2''z_3'''$, über in:

$$\Delta_2 = \int_a^b z_3'''\Psi_3(z_3''')\,dx.$$

Setzt man hierin für $\Psi_3(z_3''')$ den vorhin angegebenen Werth, ebenso für z_3'' seinen Werth:

$$z_3''' = \frac{\nabla\dfrac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}}{\left(\dfrac{\partial\nabla}{\partial z'''}\right)^2},$$

so erhält man die gewünschte Form der zweiten Variation:

$$\Delta_2 = \int_a^b a_{33}\frac{\nabla^2}{\left(\dfrac{\partial\nabla}{\partial z'''}\right)^2}dx.$$

Um die zweite Variation auf diese Form zurückzuführen, bedurfte es nicht der weiten Rechnung, die man jedoch als eine Controlle betrachten kann der vorgetragenen allgemeinen Theorie, welche jenes Resultat ohne Weiteres ergiebt. Es sind vielmehr die Relationen zwischen den in den Ausdruck $\frac{\nabla}{\frac{\partial\nabla}{\partial z'''}}$ eingehenden willkürlichen Constanten, welche wenigstens einen Theil dieser Rechnung nothwendig machen. Werfen wir also einen Blick auf die Art und Weise des Eingehens der willkürlichen Constanten in den genannten Ausdruck.

Da u, v, w Werthe von z bedeuten, welche sämmtlich der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügen, so haben sie die Form (67.)

$$\begin{aligned} u &= a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots a_6 r_6, \\ v &= b_1 r_1 + b_2 r_2 + \cdots b_6 r_6, \\ w &= c_1 r_1 + c_2 r_2 + \cdots c_6 r_6. \end{aligned}$$

Die 18 in diese Ausdrücke eingehenden Constanten a, b, c sind jedoch nicht ganz willkürlich, sondern v ist ein Werth von z, welcher der Differentialgleichung $\Psi_1(z_1') = 0$ und w ein Werth von z, welcher der Differentialgleichung $\Psi_2(z_2'') = 0$ genügt. Der ersteren Gleichung, v für z gesetzt, wird durch ***eine*** Relation zwischen den Constanten identisch genügt, weil $\Psi_1(z_1') = 0$ das erste Integral ist der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$. Der zweiten Gleichung, w für z gesetzt, wie auch der Gleichung $\Psi_1(z_1') = 0$, wird durch ***zwei*** Relationen zwischen den Constanten identisch genügt, weil $\Psi_2(z_2'') = 0$ das zweite Integral ebenderselben Differentialgleichung ist. Diese drei Relationen machen also folgende drei Gleichungen zu identischen:

$$\Psi_1(v_1') = 0, \qquad \Psi_1(w_1') = 0, \qquad \Psi_2(w_2'') = 0,$$

und man erhält diese Relationen etwa dadurch, dafs man der Variable x einen bestimmten Werth zuertheilt. Aber es braucht auch nur die letzte Gleichung identisch erfüllt zu werden, die beiden anderen werden dann von selber identisch erfüllt.

In der That, differenzirt man die Gleichung $\Psi_2(w_2'') = 0$ zwei Mal nach x, so erhält man

$$\frac{d\Psi_2(w_2'')}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2\Psi_2(w_2'')}{dx^2} = 0,$$

zwei Gleichungen, welche ebenfalls identisch erfüllt werden. Diese beiden Gleichungen bedingen aber die genannten $\Psi_1(v_1') = 0$, $\Psi_1(w_1') = 0$, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die linken Theile der beiden ersten Glei-

chungen darstellt. Man hat nämlich mit Rücksicht auf die früher aufgestellten Gleichungen, wenn man in ihnen w oder v für z setzt:

$$v_1' \Psi_1(w_1') - w_1' \Psi_1(v_1') = -\frac{d\Psi_2(w_2'')}{dx}$$

und:

$$\frac{dv_1'}{dx} \cdot \Psi_1(w_1') - \frac{dw_1'}{dx} \cdot \Psi_1(v_1') = -\frac{d^2\Psi_2(w_2'')}{dx^2};$$

denn es fallen die noch hinzukommenden Glieder

$$w_1'(u\Psi(v) - v\Psi(u)) - v_1'(u\Psi(w) - w\Psi(u))$$

fort, weil u, v, w der Annahme nach Werthe von z bedeuten, welche der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ identisch genügen.

Um nun statt der genannten 18 Constanten a, b, c die bequemeren neuen Determinantenconstanten einzuführen, wollen wir mit dem Zeichen $[\varkappa\lambda\mu]$ die Determinante bezeichnen:

$$[\varkappa\lambda\mu] = \begin{vmatrix} a_\varkappa & a_\lambda & a_\mu \\ b_\varkappa & b_\lambda & b_\mu \\ c_\varkappa & c_\lambda & c_\mu \end{vmatrix}.$$

Da $\varkappa$, λ, μ irgend welche von den Zahlen 1, 2, ... 6 bedeuten, so wird man 20 verschiedene Determinantenconstanten haben, deren Verhältnisse allein in den zuletzt angegebenen Werth der zweiten Variation Δ_2 eingehen. Sie repräsentiren daher nur 19 Constanten. Zwischen diesen Determinantenconstanten haben wir aber die Gleichung:

$$u\Psi_2(w_2'') = \mathfrak{A}_2 \frac{\partial\nabla}{\partial z'''} + \mathfrak{A}_3\left(\frac{\partial\nabla}{\partial z'} + \frac{\partial\nabla'}{\partial z''}\right) + \mathfrak{A}_3' \frac{\partial\nabla}{\partial z''} = 0,$$

in welche auch nur die Verhältnisse jener Determinantenconstanten eingehen, und von welcher Gleichung man weifs, dafs ihr durch drei Relationen identisch genügt wird. Diese drei Relationen wird man daher aus den drei Gleichungen:

$$u\Psi_2(w_2'') = 0, \qquad \frac{du\Psi_2(w_2'')}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2u\Psi_2(w_2'')}{dx^2} = 0$$

erhalten können, indem man der unabhängigen Variabeln x bestimmte Werthe zuertheilt. Da aber in diese drei Gleichungen auch nur die Verhältnisse der Determinantenconstanten in linearer Weise eingehen, so bleiben von den 19 Constanten nur noch 16 willkürlich.

Andererseits hat man aber zwischen den 20 Determinantenconstanten folgende 30 Gleichungen, in welche ebenfalls nur ihre Verhältnisse eingehen:

$$[123]\cdot[145]-[124]\cdot[135]+[125]\cdot[134]=0$$
$$[123]\cdot[146]-[124]\cdot[136]+[126]\cdot[134]=0$$
$$[123]\cdot[156]-[125]\cdot[136]+[126]\cdot[135]=0$$
$$[124]\cdot[156]-[125]\cdot[146]+[126]\cdot[145]=0$$
$$[134]\cdot[156]-[135]\cdot[146]+[136]\cdot[145]=0$$

$$[213]\cdot[245]-[214]\cdot[235]+[215]\cdot[234]=0$$
$$[213]\cdot[246]-[214]\cdot[236]+[216]\cdot[234]=0$$
$$[213]\cdot[256]-[215]\cdot[236]+[216]\cdot[235]=0$$
$$[214]\cdot[256]-[215]\cdot[246]+[216]\cdot[245]=0$$
$$[234]\cdot[256]-[235]\cdot[246]+[236]\cdot[245]=0$$

$$[321]\cdot[345]-[324]\cdot[315]+[325]\cdot[314]=0$$
$$[321]\cdot[346]-[324]\cdot[316]+[326]\cdot[314]=0$$
$$[321]\cdot[356]-[325]\cdot[316]+[326]\cdot[315]=0$$
$$[324]\cdot[356]-[325]\cdot[346]+[326]\cdot[345]=0$$
$$[314]\cdot[356]-[315]\cdot[346]+[316]\cdot[345]=0$$

$$[423]\cdot[415]-[421]\cdot[435]+[425]\cdot[431]=0$$
$$[423]\cdot[416]-[421]\cdot[436]+[426]\cdot[431]=0$$
$$[423]\cdot[456]-[425]\cdot[436]+[426]\cdot[435]=0$$
$$[421]\cdot[456]-[425]\cdot[416]+[426]\cdot[415]=0$$
$$[431]\cdot[456]-[435]\cdot[416]+[436]\cdot[415]=0$$

$$[523]\cdot[541]-[524]\cdot[531]+[521]\cdot[534]=0$$
$$[523]\cdot[546]-[524]\cdot[536]+[526]\cdot[534]=0$$
$$[523]\cdot[516]-[521]\cdot[536]+[526]\cdot[531]=0$$
$$[524]\cdot[516]-[521]\cdot[546]+[526]\cdot[541]=0$$
$$[534]\cdot[516]-[531]\cdot[546]+[536]\cdot[541]=0$$

$$[623]\cdot[645]-[624]\cdot[635]+[625]\cdot[634]=0$$
$$[623]\ [641]-[624]\cdot[631]+[621]\cdot[634]=0$$
$$[623]\cdot[651]-[625]\cdot[631]+[621]\cdot[635]=0$$
$$[624]\cdot[651]-[625]\cdot[641]+[621]\cdot[645]=0$$
$$[634]\cdot[651]-[635]\cdot[641]+[631]\cdot[645]=0.$$

Von diesen 30 Gleichungen, welche sich alle aus einer von ihnen durch Vertauschung der Elemente ableiten lassen, sind jedoch nur 10 von einander unabhängig. Denn es lassen sich die 10 Determinanten:

[123] [124] [356] [456] [156] [245] [246] [235] [236] [256]

durch die übrigen

[125] [126] [134] [135] [136] [145] [146] [345] [346] [234]

ausdrücken wie folgt:

$$[123] = \frac{[134]}{N}([126]\cdot[135]-[125]\cdot[136])$$

$$[124] = \frac{[134]}{N}([126]\cdot[145]-[125]\cdot[146])$$

$$[356] = \frac{[346]\cdot[135]-[345]\cdot[136]}{[134]}$$

$$[456] = \frac{[346]\cdot[145]-[345]\cdot[146]}{[134]}$$

$$[156] = -\frac{N}{[134]}$$

$$[245] = \frac{[345]}{N}([126]\cdot[145]-[125]\cdot[146])+\frac{[145]\cdot[234]}{[134]}$$

$$[246] = \frac{[346]}{N}([126]\cdot[145]-[125]\cdot[146])+\frac{[146]\cdot[234]}{[134]}$$

$$[235] = \frac{[345]}{N}([126]\cdot[135]-[125]\cdot[136])+\frac{[135]\cdot[234]}{[134]}$$

$$[236] = \frac{[346]}{N}([126]\cdot[135]-[125]\cdot[136])+\frac{[136]\cdot[234]}{[134]}$$

$$[256] = \frac{[125]\cdot[346]-[126]\cdot[345]}{[134]}-\frac{[234]\cdot N}{[134]\cdot[134]}$$

$$N = [145]\cdot[136]-[146]\cdot[135];$$

und diese Ausdrücke genügen allen jenen 30 Gleichungen. Die beiden ersten Ausdrücke ergeben sich aus den Gleichungen (1.) und (2.). Die drei folgenden aus den Gleichungen (15.), (20.), (5.). Hierauf die Ausdrücke 6 und 7 aus den Gleichungen (16.), (17.). Die drei letzten Ausdrücke der Determinanten endlich aus den Gleichungen (11.), (12.), (29.).

Da hiernach zwischen den Verhältnissen der Determinantenconstanten noch die 10 zuletzt angegebenen von einander unabhängigen Gleichungen bestehen, so reducirt sich die angegebene Zahl 16 der willkürlichen Constanten, welche in die transformirte zweite Variation eingehen, auf 6.

Diese 6 willkürlichen Constanten müssen sich nun so bestimmen lassen, dafs der Ausdruck $\frac{\partial \nabla}{\partial z'''}$ für keinen Werth der unabhängigen Variabeln x zwischen den Grenzen der Integration a und b verschwindet, wenn das Integral Δ ein Maximum oder Minimum sein soll.

Heidelberg, im Mai 1857.

22.

Propriétés d'un système de courbes algébriques ayant en commun un certain nombre de points.

(Par M. *Woepcke.*)

I.

Nous avons vu (Tome LIII de ce Journal, page 260) que si l'on a un système de trois courbes de l'ordre n passant par $\frac{1}{2}n(n-1)+1+r$ mêmes points, on pourra mener, par les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ autres intersections de C_2 avec C_3 une courbe c_1 de l'ordre $n-1$ qui coupera, en outre, chacune des deux courbes C_2 et C_3 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points, et qu'alors, si par ces deux groupes de $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points et deux fois $2(n-1)-r$ points, pris respectivement parmi les intersections de C_1 avec C_2 et C_3, on mène deux autres courbes c_3 et c_2 de l'ordre $n-1$, ces deux courbes passent par $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ mêmes points situés sur la courbe C_1.

Mais la courbe c_3 est aussi bien déterminée par les $2(n-1)-r$ intersections de C_1 avec C_2 et les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points situés sur C_1 qu'elle a en commun avec c_2, que par les mêmes $2(n-1)-r$ intersections et les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points situés sur C_2 qu'elle a en commun avec c_1. On pourra donc aller de la courbe c_1 à la courbe c_2, et de celle-ci à la courbe c_3, qui alors devra passer par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ intersections de c_1 avec C_2. C'est ce qui nous permet d'énoncer le même théorème de la manière suivante qui se prête facilement aux généralisations que nous allons donner ci-après.

Soient C_1, C_2, C_3 trois courbes de l'ordre n, passant par $\frac{1}{2}n(n-1)+1+r$ mêmes points, r étant un des nombres $0, 1, 2, \ldots, 2n-3$. Par les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ autres intersections $i_{1,2}$ des courbes C_1 et C_2 et par r points pris à volonté sur la courbe C_1, faisons passer une courbe $c_{1,2}$ de l'ordre $n-1$ qui coupera, en outre, C_2 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points. Par ceux-ci et $2(n-1)-r$ points pris parmi les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points $i_{2,3}$ communs aux courbes C_2 et C_3 outre ceux qu'elles ont en commun avec C_1, menons une courbe $c_{2,3}$ de l'ordre $n-1$; elle passera par toutes les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ intersections $i_{2,3}$ et coupera, en outre, C_3 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points. Par ces derniers points et $2(n-1)-r$ points pris parmi les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points $i_{1,3}$ communs aux courbes C_1 et C_3

outre ceux qu'elles ont en commun avec C_2, ***menons de nouveau une courbe*** $c_{1,3}$ ***de l'ordre*** $n-1$. ***Je dis que cette courbe passera par toutes les intersections*** $i_{1,3}$ ***et qu'elle passera, en outre, par les*** $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ ***intersections de*** $c_{1,2}$ ***avec*** C_1 ***différentes des*** $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ ***intersections*** $i_{1,2}$.

Par les $\frac{1}{2}n(n-1)+1+r$ points communs aux courbes C_1, C_2, C_3 faisons passer maintenant une quatrième courbe C_4 de l'ordre n. Alors, par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points différents des intersections $i_{2,3}$ en lesquels C_3 est rencontrée par $c_{2,3}$, nous pourrons mener, outre $c_{1,3}$, une courbe $c_{3,4}$ de l'ordre $n-1$ passant par $2(n-1)-r$ et dès lors par tous les points $i_{3,4}$. De même nous pourrons mener une courbe $c_{1,4}$ par les intersections de $c_{3,4}$ avec C_4 différentes des intersections $i_{3,4}$ et par $2(n-1)-r$ des points $i_{1,4}$. De ce qui précède il suit que $c_{1,3}$ et $c_{1,4}$ passeront par $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ mêmes points situés sur C_1 et distincts des intersections $i_{1,3}$ et $i_{1,4}$, et je prétends que ce sont les mêmes $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points situés sur C_1 par lesquels passaient déjà $c_{1,3}$ et $c_{1,2}$.

En effet, chacune des courbes $c_{1,2}$, $c_{1,3}$, $c_{1,4}$ a en commun avec C_1 les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points $i_{1,2}$, $i_{1,3}$, $i_{1,4}$ respectivement, outre lesquels chacune d'elles ne peut avoir en commun avec C_1 que $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points. Mais les courbes $c_{1,2}$ et $c_{1,3}$ passent par $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ mêmes points de la courbe C_1 distincts des points $i_{1,2}$ et $i_{1,3}$, et les courbes $c_{1,3}$ et $c_{1,4}$ passent par $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ mêmes points de la courbe C_1 différents des points $i_{1,3}$ et $i_{1,4}$. Il faut donc que les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points de C_1 que $c_{1,3}$ a en commun avec $c_{1,2}$ et $c_{1,4}$, soient les mêmes, parceque ces points sont distincts des $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points $i_{1,3}$ et que la courbe $c_{1,3}$ ne peut rencontrer C_1 qu'en $n(n-1)$ points.

En faisant un raisonnement analogue pour une cinquième courbe, et enfin pour un nombre quelconque de courbes de l'ordre n qu'on fera passer par les $\frac{1}{2}n(n-1)+1+r$ points communs aux courbes C_1, C_2, C_3, on obtient le théorème général suivant.

Si on fait passer m ***courbes de l'ordre*** n, ***soient*** $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$, ***par*** $\frac{1}{2}n(n-1)+1+r$ ***mêmes points,*** r ***étant un des nombres*** $0, 1, 2, \ldots, 2n-3$, ***il existera, en général, une infinité*** *) ***de systèmes de*** $\frac{1}{2}m(m-1)$ ***courbes de l'ordre*** $n-1$, ***déterminées de la manière ci-dessus exposée, correspondant respectivement aux autres intersections des courbes*** C ***prises***

*) Pour $r=0$ il n'existe qu'un seul système de cette espèce.

deux à deux, et dont toujours $m-1$ ***passent par*** $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ ***mêmes points situés sur chacune des courbes*** C.

De même, si on fait passer m ***courbes de l'ordre*** n, ***soient*** $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$, ***par*** $\frac{1}{2}n(n+1)+1+r$ ***mêmes points,*** r ***étant un des nombres*** $0, 1, 2, \ldots, n-3$, ***il existera, en général, une infinité de systèmes de*** $\frac{1}{2}m(m-1)$ ***courbes de l'ordre*** $n-2$, ***correspondant respectivement aux autres intersections des courbes*** C ***prises deux à deux, et dont toujours*** $m-1$ ***passent par*** $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ ***mêmes points situés sur chacune des courbes*** C.

Les $\frac{1}{2}m(m-1)$ courbes de l'ordre $n-1$ ou $n-2$ se coupent, trois à trois, en $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ groupes de $\frac{1}{2}n(n-1)-r$ ou $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)-r$ points, et sur chacune de ces courbes il se trouve $m-2$ de ces groupes.

Il n'est pas besoin de dire que ces deux théorèmes donnent lieu à un très-grand nombre de corollaires et d'applications. Nous n'en citerons ici que quelques-uns des plus simples.

Soient $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$ une série de cercles se coupant en un même point P. Sur la circonférence du cercle C_1 prenons un point quelconque p_1; par p_1 et le second point d'intersection de C_1 avec C_2 menons une droite qui coupera C_2 en un point p_2; par p_2 et le second point d'intersection de C_2 avec C_3 menons une droite qui coupera C_3 en p_3; et ainsi de suite. Je dis que la dernière droite qu'on mène par p_m et le second point d'intersection de C_m avec C_1, passera de nouveau par le point p_1, que le polygone de m côtés ainsi obtenu sera semblable au polygone formé par les centres des cercles, et que chacune de ses diagonales, soit $p_\alpha p_\beta$, passe par le second point d'intersection de deux des cercles proposés, à savoir C_α et C_β.

Soient $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$ une série de coniques ayant un contact du second ordre en un point P et se coupant deux à deux dans un autre point que nous appellerons $i_{\alpha,\beta}$ pour les deux coniques C_α et C_β. Sur C_1 prenons arbitrairement un point p_1 et menons $p_1 i_{1,2}$ qui coupera C_2 en un point p_2; menons de même $p_2 i_{2,3}$ qui coupera C_3 en un point p_3; et ainsi de suite. La droite $p_m i_{1,m}$ viendra repasser par p_1, et chaque diagonale $p_\alpha p_\beta$ du polygone $p_1 p_2 p_3 \ldots p_m$ passera par un point $i_{\alpha,\beta}$ intersection des coniques C_α et C_β.

Soient $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$ une série de courbes du troisième ordre passant par sept mêmes points et se coupant, en outre, deux à deux en deux points. Appelons les deux points d'intersection des courbes C_α et C_β les

points $i_{\alpha,\beta}$. Les deux points $i_{1,2}$ déterminent une droite $c_{1,2}$, les points $i_{2,3}$ une droite $c_{2,3}$, les points $i_{3,4}$ une droite $c_{3,4}$, et ainsi de suite jusqu'à la droite $c_{m,1}$. Je dis que ces m droites forment un polygone de m côtés dont chaque sommet se trouve sur une des courbes C respectivement, et que, dans chaque sommet de ce polygone concourent, en outre, $m-3$ autres droites c, ou que chaque diagonale du polygone passera par un couple de points i.

Prenons un des cas les plus simples de ce dernier corollaire. Soient C_1, C_2, C_3 trois cercles passant par deux mêmes points. Sur la circonférence de C_1 prenons un point quelconque a, de même sur C_2 un point b, et sur C_3 un point c. La droite ab coupera C_2 en un second point, et la droite ac coupera C_3 en un second point; appelons ces deux points α_2 et α_3. De même ba coupera C_1 en un point β_1, et bc coupera C_3 en un point β_3. Enfin ca coupera C_1 en un point γ_1 et cb coupera C_2 en un point γ_2. Je dis que les droites $\alpha_2\alpha_3$ et $\beta_1\beta_3$ se rencontreront en un point p_3 situé sur la circonférence de C_3; que les droites $\alpha_2\alpha_3$ et $\gamma_1\gamma_2$ se rencontreront en un point p_2 situé sur la circonférence de C_2; et que les droites $\beta_1\beta_3$ et $\gamma_1\gamma_2$ se rencontreront en un point p_1 situé sur la circonférence de C_1; enfin que le triangle $p_1p_2p_3$ sera semblable au triangle abc.

Faisons encore une application aux courbes du quatrième ordre. Soient C_1, C_2, C_3 trois cercles passant par deux mêmes points. Sur la circonférence de C_1 prenons deux points a, a'; sur la circonférence de C_2 deux points b, b'; et sur la circonférence de C_3 deux points c, c'. Le cercle C_1 et les deux droites bc, $b'c'$ couperont le cercle C_2 et les deux droites ac, $a'c'$ encore en six points $i_{1,2}$; de même C_1, bc, $b'c'$ et C_3, ab, $a'b'$ se couperont encore en six points $i_{1,3}$; et C_2, ac, $a'c'$ et C_3, ab, $a'b'$ se couperont encore en six points $i_{2,3}$. Je dis qu'il existera deux courbes du troisième ordre passant ensemble par six mêmes points situés sur le système C_1, bc, $b'c'$, passant l'une par les six points $i_{1,2}$ et l'autre par les six points $i_{1,3}$, coupant, en outre, l'une le système C_2, ac, $a'c'$ en six points p_2 et l'autre le système C_3, ab, $a'b'$, en six points p_3, et se rencontrant enfin en trois points π de telle façon que les vingt-un points $i_{2,3}$, p_2, p_3 et π sont situés sur trois droites.

II.

D'après ce qui a été démontré (Tome LIII, page 260 de ce Journal) trois courbes C de l'ordre n qui passent par $\frac{1}{2}n(n-1)+1+r$ mêmes points,

donnent lieu à trois courbes C' de l'ordre $n-1$ qui, à leur tour, passent par $\frac{1}{2}n(n-1)-r$ mêmes points.

Nous faisons observer que, en vertu de ce même théorème, si $r<n-1$, les trois courbes C' donnent lieu, à leur tour, à trois courbes C'' de l'ordre $n-2$ qui passent par $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+r$ mêmes points.

De même, si $r>0$, les courbes C'' donneront lieu à trois courbes C''' de l'ordre $n-3$ passant par $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)-(r-1)$ mêmes points.

Si $r<n-2$, les courbes C''' donnent pareillement lieu à trois courbes C^{IV} de l'ordre $n-4$ passant par $\frac{1}{2}(n-4)(n-5)+r-1$ mêmes points, lesquelles, si $r>1$, donnent lieu à trois courbes C^{V} de l'ordre $n-5$ passant par $\frac{1}{2}(n-4)(n-5)-(r-2)$ mêmes points.

En continuant ainsi on voit qu'on peut arriver à trois courbes de l'ordre $n-2p$, si l'on fait $r<n-p$ et $>p-2$; et à trois courbes de l'ordre $n-(2p+1)$, si l'on fait $r<n-p$ et $>p-1$. Conséquemment, pour arriver jusqu'à trois droites, il faut prendre $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n-3}{2}$ pour r, si n est impair, et $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n}{2}-1$, si n est pair.

Prenons par exemple trois cercles C_1, C_2, C_3 passant par deux mêmes points P et Q, et trois droites D_1, D_2, D_3 passant par un même point R. Le cercle C_1 et la droite D_1 couperont, en outre, le cercle C_2 et la droite D_2 en quatre points $i_{1,2}$. De même C_1 et D_1 couperont C_3 et D_3 en quatre points $i_{1,3}$; enfin C_2 et D_2 couperont C_3 et D_3 en quatre points $i_{2,3}$. Par les quatre points $i_{2,3}$ nous pouvons faire passer (de deux manières différentes) deux droites que nous désignerons ensemble par $c_{2,3}$, et qui couperont le cercle C_2 en deux points p_2 et le cercle C_3 en deux points p_3. Je dis que les quatre points $i_{1,2}$ et les deux points p_2 seront sur une conique $c_{1,2}$, que les quatre points $i_{1,3}$ et les deux points p_3 seront sur une conique $c_{1,3}$, et que les coniques $c_{1,2}$ et $c_{1,3}$ se couperont en quatre points dont deux seront situés sur les deux droites $c_{2,3}$, et les deux autres sur le cercle C_1, mais de telle façon que si l'on désigne ces deux derniers points par p_1, les trois droites qui passent respectivement par les deux points p_1, les deux points p_2, et les deux points p_3, et que l'on peut désigner respectivement par c_1'', c_2'', c_3'', concourent en un même point S.

III.

Mentionnons encore deux théorèmes relatifs à des lignes droites qui découlent immédiatement du théorème démontré tome LIII, page 260.

1. Soient D_1, D_2, D_3 et D'_1, D'_2, D'_3 deux faisceaux de droites issus de deux points A et B. Appelons $i_{1,2}$ les deux points d'intersection de D_1 avec D'_2 et de D'_1 avec D_2; de même appelons $i_{1,3}$ les deux points d'intersection de D_1 avec D'_3 et de D'_1 avec D_3; et $i_{2,3}$ les deux points d'intersection de D_2 avec D'_3 et de D'_2 avec D_3. Les trois droites $c_{1,2}$, $c_{1,3}$, $c_{2,3}$ déterminées respectivement par les couples de points $i_{1,2}$, $i_{1,3}$, $i_{2,3}$ concourront en un même point C.

On voit aisément que, de la même manière, le faisceau C, ainsi obtenu, donne lieu, à son tour, combiné avec le faisceau A, au faisceau B; ou combiné avec le faisceau B, au faisceau A.

De ce théorème on déduit, comme on sait, le théorème corrélatif, que si l'on a sur une droite trois points a, b, c et sur une autre droite trois points α, β, γ, les points d'intersection de $a\beta$ avec $b\alpha$, de $a\gamma$ avec $c\alpha$ et de $b\gamma$ avec $c\beta$ sont en ligne droite.

Si chacun des deux faisceaux se compose de m droites, les points i donnent lieu à $\frac{1}{2}m(m-1)$ droites c qui se coupent, trois à trois, en $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ points, et sur chacune des droites c se trouvent $m-2$ de ces points.

2. Par le sommet a d'un triangle abc menons une droite A, par le sommet b une droite B, et par le sommet c une droite C; appelons $i_{1,2}$ le point d'intersection de A avec B, $i_{1,3}$ le point d'intersection de A avec C, et $i_{2,3}$ le point d'intesection de B avec C. Par $i_{2,3}$ menons une droite quelconque $c_{2,3}$ coupant ab en p_3 et ac en p_2. Je dis que les deux droites $i_{1,2}p_2$ et $i_{1,3}p_3$ se coupent sur bc.

Dessau, au mois de juillet 1857.

23.

Integration der linearen Differentialgleichung

$$(1.)\quad (a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y = 0.$$

(Von Herrn *Spitzer*.)

Laplace setzt das Integral obiger Differentialgleichung voraus unter folgender Form:

$$(2.)\quad y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V\,du,$$

unter V eine Function von u, und unter u_1 und u_2 constante Zahlen verstanden.

Man hat dann:

$$y' = \int_{u_1}^{u_2} u\,e^{ux} V\,du, \qquad y'' = \int_{u_1}^{u_2} u^2 e^{ux} V\,du,$$

und setzt man der Kürze halber:

$$a_2u^2+a_1u+a_0 = U_0,$$
$$b_2u^2+b_1u+b_0 = U_1,$$

so ist das Resultat der Substitution von (2.) in die vorgelegte Gleichung

$$(3.)\quad \int_{u_1}^{u_2} (U_0+U_1x)e^{ux}V\,du = 0.$$

Nun ist aber

$$\int_{u_1}^{u_2} U_1 x e^{ux} V du = \left\{e^{ux}U_1V\right\}_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\frac{\partial(U_1V)}{\partial u}\,du,$$

und wird diefs in (3.) eingeführt, so erhält man:

$$\left\{e^{ux}U_1V\right\}_{u_1}^{u_2} + \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\left\{U_0V - \frac{\partial(U_1V)}{\partial u}\right\}du = 0,$$

welche wirklich identisch wird, wenn

$$(4.)\quad U_0V - \frac{\partial(U_1V)}{\partial u} = 0$$

ist, und wenn ferner u_1 und u solche constante Zahlen sind, welche die Gleichung

$$(5.)\quad e^{ux}U_1V = 0$$

befriedigen. Aus (4.) folgt:

$$V = \frac{1}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} du},$$

welche, wenn

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{u-\alpha} + \frac{B}{u-\beta}$$

ist, die Gestalt annimmt

$$V = (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1} e^{um}.$$

Die Gleichung (5.) geht über in

$$(6.) \quad (u-\alpha)^A (u-\beta)^B e^{u(m+x)} = 0$$

und wird, falls A und B positiv sind, befriedigt für

$$u = \alpha, \qquad u = \beta.$$

Man hat daher in diesem Falle für das Integral der vorgelegten Gleichung:

$$y = \int_\alpha^\beta \frac{1}{U_1} e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} du.$$

Ich will nun untersuchen, in welchem Falle der vorgelegten Differentialgleichung genügt wird durch folgenden Ausdruck:

$$(7.) \quad y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V \log[(a_2 + b_2 x) W] du,$$

unter W eine, einstweilen noch unbestimmte Function von u verstanden. Der Ausdruck (7.) läfst sich auch so schreiben:

$$y = \log(a_2 + b_2 x) \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V du + \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V \log W du,$$

alsdann ist:

$$y' = \frac{b_2}{a_2 + b_2 x} \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V du + \log(a_2 + b_2 x) \int_{u_1}^{u_2} u e^{ux} V du + \int_{u_1}^{u_2} u e^{ux} V \log W du,$$

$$y'' = -\frac{b_2^2}{(a_2 + b_2 x)^2} \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V du + \frac{2b_2}{a_2 + b_2 x} \int_{u_1}^{u_2} u e^{ux} V du$$

$$+ \log(a_2 + b_2 x) \int_{u_1}^{u_2} u^2 e^{ux} V du + \int_{u_1}^{u_2} u^2 e^{ux} V \log W du,$$

und folglich hat man:

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y$$

$$= \frac{b_2(a_1 + b_1 x) - b_2^2}{a_2 + b_2 x} \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V du + 2b_2 \int_{u_1}^{u_2} u e^{ux} V du$$

$$+ \log(a_2 + b_2 x) \int_{u_1}^{u_2} (U_0 + U_1 x) e^{ux} V du + \int_{u_1}^{u_2} (U_0 + U_1 x) e^{ux} V \log W du.$$

Der mit $\log(a_2+b_2x)$ multiplicirte Ausdruck verschwindet in Folge der Gleichung (3.), nehmen wir ferner an, dafs

$$\frac{b_2(a_1+b_1x)-b_2^2}{a_2+b_2x}$$

eine constante Zahl und folglich gleich b_1 ist, so hat man, wenn man

$$2b_2u+b_1 = U_1'$$

setzt,

$$(a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y$$
$$=\int_{u_1}^{u_2} e^{ux}VU_1'\,du+\int_{u_1}^{u_2}(U_0+U_1x)e^{ux}V\log W\,du.$$

Nach der Methode des theilweisen Integrirens hat man:

$$\int_{u_1}^{u_2} U_1x\,e^{ux}V\log W\,du = \left\{e^{ux}U_1V\log W\right\}_{u_1}^{u_2}-\int_{u_1}^{u_2}e^{ux}\frac{\partial(U_1V\log W)}{\partial u}du,$$

nun ist aber vermöge der Gleichung (5.) der aufser dem Integralzeichen stehende Ausdruck gleich Null, folglich hat man:

$$(a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y$$
$$=\int_{u_1}^{u_2}e^{ux}\left[VU_1'+U_0V\log W-\frac{\partial(U_1V\log W)}{\partial u}\right]du,$$

und dieses verschwindet, wenn man W so wählt, dafs

$$U_1'V+U_0V\log W-\frac{\partial(U_1V\log W)}{\partial u}=0$$

ist. Diese Gleichung ist sehr leicht zu integriren, man findet nämlich

$$W = CU_1.$$

Wenn daher

$$\frac{b_2(a_1+b_1x)-b_2^2}{a_2+b_2x} = b_1,$$

d. h. wenn

$$a_1b_2-a_2b_1 = b_2^2$$

ist, so ist das complete Integral der Gleichung (1.)

$$y = A\int_{u_1}^{u_2}e^{ux}V\,du+B\int_{u_1}^{u_2}e^{ux}V\log\left[(a_2+b_2x)(b_2u^2+b_1u+b_0)\right]du.$$

Es ist auffallend, dafs Herr Prof. *Jos. Petzval*, der sich doch so viel mit der Integration der linearen Differentialgleichungen, und vorzüglich mit denen der genannten Form beschäftigte, nicht zu diesem Integrale gelangte.

24.

Note sur un théorème de M. *Brioschi.*

(Par M. *Faà de Bruno.*)

Il me semble que l'équation

$$(1.) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{r} \alpha_{m,r} \frac{dV}{da_r} = (r - m + 1) c_{m-1} V,$$

qui forme l'objet du théorème, que M. ***Brioschi*** a inséré dans ce Journal (vol. 53, page 372) peut être démontré très-facilement en suivant la voie que je vais exposer.

On a en effet (voir le Mémoire de ***Jacobi,*** tome 15, page 102)

$$(2.) \qquad \Sigma \alpha_{m,r} x^{n-r} = 0.$$

Mais d'après un théorème connu, on a aussi

$$(3.) \qquad \frac{dV}{da_n} x^{n-r} = \frac{dV}{da_r}.$$

Partant l'équation (2.) pourra se transformer en celle-ci

$$(4.) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{r} \alpha_{m,r} \frac{dV}{da_r} = 0.$$

Or, il est évident que le premier membre de cette équation devra s'évanouir avec V et le contenir par conséquent en facteur, car il ne peut pas y avoir d'autre condition entre les coefficients que celle $V = 0$.

Il viendra donc

$$\Sigma \alpha_{m,r} \frac{dV}{da_r} = qV,$$

q étant un facteur algébrique qu'on déterminera très-aisément. Il suffit pour cela d'observer que le premier membre est de degré $2m+1$ par rapport aux coefficients c, et de degré $2m$ par rapport aux coefficients a. D'ailleurs son poids est celui de $V+m+r-1-r$; donc q ne pourra être que de la forme

$$q = q' c_{m-1}$$

q' étant un coefficient numérique, qu'on trouvera égal à $n-m+1$, en comptant combien de fois le coefficient c_{m-1} entre positivement et négativement dans les quantités α.

Corollaire. En faisant varier m de 1 à n dans la formule (1.) on déduit celle-ci:

$$\frac{dV}{da_r} = nc_0\frac{dV}{d\alpha_{r,1}} + (n-1)c_1\frac{dV}{d\alpha_{r,2}} + \cdots + c_{m-1}\frac{dV}{d\alpha_{r,n}},$$

et par l'échange de a en c,

$$-\frac{dV}{dc_r} = ma_0\frac{dV}{d\alpha_{r,1}} + (n-1)a_1\frac{dV}{d\alpha_{r,2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dV}{d\alpha_{r,n}}.$$

De là, au moyen d'un théorème connu

$$\frac{dR}{da_r} = \varphi'(x)\frac{dR}{d\alpha_{r,n}}, \qquad \frac{dR}{dc_r} = -f'(x)\frac{dR}{d\alpha_{r,n}},$$

x étant la racine commune, et enfin

$$f'(x)\frac{dV}{da_r} + \varphi'(x)\frac{dV}{dc_r} = 0.$$

Turin, le 22 Juin 1857.

25.

Propriétés de certains systèmes de surfaces du second ordre.

(Par M. *Woepcke.*)

I.

Soient S_1, S_2, S_3, S_4 *quatre surfaces du second ordre passant par cinq mêmes points. Les surfaces* S_1, S_2, S_3 *se couperont, en outre, en trois points* $i_{1,2,3}$; *et pareillement* S_1, S_2, S_4 *se couperont en trois points* $i_{1,2,4}$; S_1, S_3, S_4 *en trois points* $i_{1,3,4}$; *et* S_2, S_3, S_4 *en trois points* $i_{2,3,4}$. *Ces quatre groupes de trois points déterminent quatre plans qu'on peut désigner respectivement par* $P_{1,2,3}$, $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$ *et* $P_{2,3,4}$. *Je dis que* S_1, S_2, $P_{1,2,3}$ *et* $P_{1,2,4}$ *passent par un même point* $p_{1,2}$; *que* S_1, S_3, $P_{1,2,3}$ *et* $P_{1,3,4}$ *passent par un même point* $p_{1,3}$; *que* S_1, S_4, $P_{1,2,4}$ *et* $P_{1,3,4}$ *passent par un même point* $p_{1,4}$; *que* S_2, S_3, $P_{1,2,3}$ *et* $P_{2,3,4}$ *passent par un même point* $p_{2,3}$; *que* S_2, S_4, $P_{1,2,4}$ *et* $P_{2,3,4}$ *passent par un même point* $p_{2,4}$; *que* S_3, S_4, $P_{1,3,4}$ *et* $P_{2,3,4}$ *passent par un même point* $p_{3,4}$; *que* S_1, $P_{1,2,3}$, $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$ *passent par un même point* q_1; *que* S_2, $P_{1,2,3}$, $P_{1,2,4}$, $P_{2,3,4}$ *passent par un même point* q_2; *que* S_3, $P_{1,2,3}$, $P_{1,3,4}$, $P_{2,3,4}$ *passent par un même point* q_3; *et que* S_4, $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$, $P_{2,3,4}$ *passent par un même point* q_4.

En effet, considérons les systèmes $(S_1, P_{2,3,4})$, $(S_2, P_{1,3,4})$ et $(S_3, P_{1,2,4})$ comme trois surfaces du troisième ordre. Le système $(S_4, P_{1,2,3})$ passe par dix-sept des points d'intersection de ces trois surfaces, à savoir

1°. par les huit points d'intersection des trois surfaces S_1, S_2, S_3;

2°. par les trois points $i_{1,2,4}$ intersections des surfaces S_1, S_2 et $P_{1,2,4}$;

3°. par les trois points $i_{1,3,4}$ intersections des surfaces S_1, S_3 et $P_{1,3,4}$;

4°. par les trois points $i_{2,3,4}$ intersections des surfaces S_2, S_3 et $P_{2,3,4}$.

Conséquemment il passe aussi par les dix autres points d'intersection des trois systèmes, à savoir

1°. par les quatrièmes points d'intersection de S_1, S_2, $P_{1,2,4}$, de S_1, S_3, $P_{1,3,4}$ et de S_2, S_3, $P_{2,3,4}$ respectivement;

2°. par les six points dont deux sont les intersections de S_1, $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$,

deux les intersections de S_2, $P_{1,2,4}$, $P_{2,3,4}$ et deux les intersections de S_3, $P_{1,3,4}$, $P_{2,3,4}$;

3°. par le point d'intersection des trois plans $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$, $P_{2,3,4}$.

Or, quant au quatrième point d'intersection de S_1, S_2, $P_{1,2,4}$, il ne peut pas être situé sur S_4, attendu que les huit points d'intersection des surfaces S_1, S_2, S_4, à savoir les cinq points communs aux quatre surfaces S et les trois points $i_{1,2,4}$, se trouvent déjà parmi les dix-sept premiers points; ce point sera donc situé sur $P_{1,2,3}$; c'est le point $p_{1,2}$. Il en est de même des quatrièmes points d'intersection de S_1, S_3, $P_{1,3,4}$ et de S_2, S_3, $P_{2,3,4}$; ce sont les points $p_{1,3}$ et $p_{2,3}$.

Quant aux deux points d'intersection de S_1, $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$, un seulement de ces deux points peut être situé sur S_4, attendu que des quatre intersections de S_1, S_4, $P_{1,2,4}$ trois, à savoir les points $i_{1,2,4}$, se trouvent parmi les dix-sept premiers points. Conséquemment l'autre point doit être situé sur $P_{1,2,3}$; ce sera le point q_1. Il en est de même de l'un des deux points d'intersection de S_2, $P_{1,2,4}$, $P_{2,3,4}$ et de l'un des deux points d'intersection de S_3, $P_{1,3,4}$, $P_{2,3,4}$; ce seront les points q_2 et q_3.

Le plan $P_{1,2,3}$ coupant ainsi les trois droites d'intersection des trois plans $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$, $P_{2,3,4}$ en trois points distincts, ne peut pas passer par leur point d'intersection, il faut donc que ce soit S_4 qui passe par ce point qui sera le point q_4.

Quant enfin au second point d'intersection de S_1, $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$, il ne peut pas être également situé sur $P_{1,2,3}$, attendu que les plans $P_{1,2,3}$, $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$ n'ont qu'un seul point d'intersection, à savoir le point q_1; il faut donc que ce point soit sur S_4; ce sera le point $p_{1,4}$. Il en est de même des seconds points d'intersection de S_2, $P_{1,2,4}$, $P_{2,3,4}$ et de S_3, $P_{1,3,4}$, $P_{2,3,4}$; ce seront les points $p_{2,4}$ et $p_{3,4}$.

II.

Soient S_1, S_2, S_3, S_4 ***quatre surfaces du second ordre passant par six mêmes points. Les surfaces*** S_1, S_2, S_3 ***se couperont, en outre, en deux points*** $i_{1,2,3}$; ***et pareillement*** S_1, S_2, S_4 ***se couperont en deux points*** $i_{1,2,4}$; S_1, S_3, S_4 ***en deux points*** $i_{1,3,4}$; ***et*** S_2, S_3, S_4 ***en deux points*** $i_{2,3,4}$. ***Par les deux points*** $i_{1,2,3}$ ***menons un plan*** $P_{1,2,3}$; ***il coupera, en outre,*** S_1 ***et*** S_2 ***en deux points*** $p_{1,2}$, S_1 ***et*** S_3 ***en deux points*** $p_{1,3}$ ***et*** S_2 ***et*** S_3 ***en deux points*** $p_{2,3}$. ***Par les deux points*** $p_{1,2}$ ***et par un point*** $i_{1,2,4}$ ***faisons***

passer un plan $P_{1,2,4}$; *par les deux points* $p_{1,3}$ *et par un point* $i_{1,3,4}$ *un plan* $P_{1,3,4}$; *et par les deux points* $p_{2,3}$ *et par un point* $i_{2,3,4}$ *un plan* $P_{2,3,4}$. *Je dis que* $P_{1,2,4}$ *passera aussi par l'autre point* $i_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$ *par l'autre point* $i_{1,3,4}$ *et* $P_{2,3,4}$ *par l'autre point* $i_{2,3,4}$; *que* S_1, S_4, $P_{1,2,4}$ *et* $P_{1,3,4}$ *se rencontrent en deux points* $p_{1,4}$; *que* S_2, S_4, $P_{1,2,4}$ *et* $P_{2,3,4}$ *se rencontrent en deux points* $p_{2,4}$; *que* S_3, S_4, $P_{1,3,4}$ *et* $P_{2,3,4}$ *se rencontrent en deux points* $p_{3,4}$; *et que les quatre plans* P *passent par un même point.*

En effet, considérons les systèmes $(S_1, P_{2,3,4})$, $(S_2, P_{1,3,4})$ et $(S_3, P_{1,2,4})$ comme trois surfaces du troisième ordre. Le système $(S_4, P_{1,2,3})$ passe par dix-sept des points d'intersection de ces trois surfaces, à savoir

1°. par les huit points d'intersection des trois surfaces S_1, S_2, S_3;

2°. par les deux points $p_{1,2}$ et un point $i_{1,2,4}$ intersections des surfaces S_1, S_2, $P_{1,2,4}$;

3°. par les deux points $p_{1,3}$ et un point $i_{1,3,4}$, intersections des surfaces S_1, S_3, $P_{1,3,4}$;

4°. par les deux points $p_{2,3}$ et un point $i_{2,3,4}$, intersections des surfaces S_2, S_3, $P_{2,3,4}$.

Conséquemment il passera aussi par les dix autres points d'intersection des trois systèmes, à savoir

1°. par les quatrièmes points d'intersection de S_1, S_2, $P_{1,2,4}$, de S_1, S_3, $P_{1,3,4}$ et de S_2, S_3, $P_{2,3,4}$ respectivement;

2°. par les six points dont deux sont les intersections de S_1, $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$, deux les intersections de S_2, $P_{1,2,4}$, $P_{2,3,4}$ et deux les intersections de S_3, $P_{1,3,4}$, $P_{2,3,4}$;

3°. par le point d'intersection des trois plans $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$, $P_{2,3,4}$.

Quant au quatrième point d'intersection de S_1, S_2, $P_{1,2,4}$ il ne peut pas être sur $P_{1,2,3}$, attendu que les quatre points d'intersection de S_1, S_2, $P_{1,2,3}$, à savoir les deux points $i_{1,2,3}$ et les deux points $p_{1,2}$, se trouvent déjà parmi les dix-sept premiers points. Il faut donc que ce point soit sur S_4, c'est à dire que $P_{1,2,4}$ passe aussi par l'autre point $i_{1,2,4}$. On démontre de la même manière que $P_{1,3,4}$ et $P_{2,3,4}$ passent aussi par l'autre point $i_{1,3,4}$ et par l'autre point $i_{2,3,4}$ respectivement.

Quant aux deux intersections de S_1, $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$, elles ne peuvent pas être situées sur $P_{1,2,3}$, attendu que les deux points d'intersection de S_1, $P_{1,2,3}$, $P_{1,2,4}$, à savoir les deux points $p_{1,2}$, se trouvent déjà parmi les dix-sept premiers points; conséquemment elles doivent se trouver sur S_4; ce sont

les points $p_{1,4}$. Il en est de même des deux points d'intersection de S_2, $P_{1,2,4}$ $P_{2,3,4}$ et des deux points d'intersection de S_3, $P_{1,3,4}$, $P_{2,3,4}$; ce sont les points $p_{2,4}$ et $p_{3,4}$.

Enfin, S_4 coupant ainsi les trois droites d'intersection des plans $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$, $P_{2,3,4}$ en six points distincts, ne peut pas passer par leur point de concours; c'est donc $P_{1,2,3}$ qui passe par ce point, c'est à dire que les quatre plans P se coupent en un même point.

Corollaires.

1. Désignons par 1, 2, 3, 4 les sommets d'un tétraèdre et par F_1, F_2, F_3, F_4 les faces du tétraèdre opposées à ces sommets respectivement; par un point quelconque π et le sommet 1 faisons passer un plan Π_1, par π et 2 un plan Π_2, par π et 3 un plan Π_3, par π et 4 un plan Π_4. Les trois points d'intersection (Π_1, Π_2, F_3), (Π_1, F_2, Π_3), (F_1, Π_2, Π_3) déterminent un plan $P_{1,2,3}$; les trois intersections (Π_1, Π_2, F_4), (Π_1, F_2, Π_4), (F_1, Π_2, Π_4) un plan $P_{1,2,4}$; les trois intersections (Π_1, Π_3, F_4), (Π_1, F_3, Π_4), (F_1, Π_3, Π_4) un plan $P_{1,3,4}$; et les trois intersections (Π_2, Π_3, F_4), (Π_2, F_3, Π_4), (F_2, Π_3, Π_4) un plan $P_{2,3,4}$. Je dis que les droites d'intersection $(P_{1,2,3}, P_{1,2,4})$, $(P_{1,2,3}, P_{1,3,4})$, $(P_{1,2,4}, P_{1,3,4})$, $(P_{1,2,3}, P_{2,3,4})$, $(P_{1,2,4}, P_{2,3,4})$, $(P_{1,3,4}, P_{2,3,4})$ rencontrent respectivement les arêtes (F_1, F_2), (F_1, F_3), (F_1, F_4), (F_2, F_3), (F_2, F_4), (F_3, F_4), et que les points d'intersection $(P_{1,2,3}, P_{1,2,4}, P_{1,3,4})$, $(P_{1,2,3}, P_{1,2,4}, P_{2,3,4})$, $(P_{1,2,3}, P_{1,3,4}, P_{2,3,4})$, $(P_{1,2,4}, P_{1,3,4}, P_{2,3,4})$ sont respectivement situés sur Π_1, Π_2, Π_3, Π_4.

2. Désignons par F et φ respectivement deux faces opposées d'un octaèdre de sorte que F_1 soit opposé à φ_1, F_2 à φ_2 etc. et que F_1, F_2, F_3, F_4 soient suivant l'ordre quatre faces concourant en un même sommet, et φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 les quatre autres faces concourant au sommet opposé. Cela posé faisons passer un plan $P_{1,2,3}$ par les deux points d'intersection (F_1, φ_2, F_3) et $(\varphi_1, F_2, \varphi_3)$. Alors les intersections $(P_{1,2,3}, F_1, F_2)$, $(P_{1,2,3}, \varphi_1, \varphi_2)$ et (φ_1, F_2, F_4) déterminent un plan $P_{1,2,4}$; les intersections $(P_{1,2,3}, F_1, \varphi_3)$, $(P_{1,2,3}, \varphi_1, F_3)$ et (F_1, F_3, φ_4) un plan $P_{1,3,4}$; et les intersections $(P_{1,2,3}, F_2, F_3)$, $(P_{1,2,3}, \varphi_2, \varphi_3)$ et (F_2, φ_3, F_4) un plan $P_{2,3,4}$. Je dis que ces plans et ces faces passent quatre à quatre par dix points de la manière suivante:

1°. $P_{1,2,4}$, F_1, φ_2, φ_4;

2°. $P_{1,3,4}$, φ_1, φ_3, F_4;

3°. $P_{2,3,4}$, φ_2, F_3, φ_4;

4°. $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$, F_1, F_4;
5°. $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$, φ_1, φ_4;
6°. $P_{1,2,4}$, $P_{2,3,4}$, φ_2, F_4;
7°. $P_{1,2,4}$, $P_{2,3,4}$, F_2, φ_4;
8°. $P_{1,3,4}$, $P_{2,3,4}$, F_3, F_4;
9°. $P_{1,3,4}$, $P_{2,3,4}$, φ_3, φ_4;
10°. $P_{1,2,3}$, $P_{1,2,4}$, $P_{1,3,4}$, $P_{2,3,4}$.

III.

Si on fait passer m surfaces du second ordre par cinq mêmes points, il existe $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ ***plans déterminés par les autres intersections des surfaces du second ordre prises trois à trois. Ces plans passent*** $m-2$ ***à*** $m-2$ ***par*** $\frac{1}{2}m(m-1)$ ***points situés sur les intersections des surfaces prises deux à deux, et trois à trois par*** $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)(m-3)$ ***points situés sur les surfaces une à une. Des premiers points il se trouve*** $m-1$ ***sur chaque surface et*** 3 ***sur chaque plan; des autres il se trouve*** $\frac{1}{6}(m-1)(m-2)(m-3)$ ***sur chaque surface et*** $3(m-3)$ ***sur chaque plan.***

En effet, considérons quatre quelconques des m surfaces, soient S_δ, $S_\varkappa$, S_μ, S_ϱ; en vertu de ce qui a été démontré ci-dessus, les surfaces S_δ, $S_\varkappa$ et les plans $P_{\delta,\varkappa,\mu}$, $P_{\delta,\varkappa,\varrho}$ passent par un même point $p_{\delta,\varkappa}$ distinct des trois points $i_{\delta,\varkappa,\mu}$. De même, en remplaçant la surface S_ϱ par une autre quelconque, soit S_σ, les surfaces S_δ, $S_\varkappa$ et les plans $P_{\delta,\varkappa,\mu}$, $P_{\delta,\varkappa,\sigma}$ passent par un même point $p_{\delta,\varkappa}$ distinct des trois points $i_{\delta,\varkappa,\mu}$. Or, S_δ, $S_\varkappa$ et $P_{\delta,\varkappa,\mu}$ ne se coupent qu'en quatre points dont trois sont les points $i_{\delta,\varkappa,\mu}$. Il faut donc que le point $p_{\delta,\varkappa}$ par lequel passe le plan $P_{\delta,\varkappa,\varrho}$ et celui par lequel passe le plan $P_{\delta,\varkappa,\sigma}$, soient identiques. Conséquemment il passe par $p_{\delta,\varkappa}$ autant de plans qu'on peut mettre d'indices à la place de ϱ, hormis δ et $\varkappa$, c'est à dire $m-2$.

En second lieu il résulte de ce qui a été démontré ci-dessus, que sur S_δ il se trouve un point $q_{\delta,\varkappa,\mu,\varrho}$ en lequel viennent concourir les plans $P_{\delta,\varkappa,\mu}$, $P_{\delta,\varkappa,\varrho}$ et $P_{\delta,\mu,\varrho}$. Remplaçant la surface S_ϱ par la surface S_σ, il s'agit de savoir si le point $q_{\delta,\varkappa,\mu,\sigma}$ intersection de $P_{\delta,\varkappa,\mu}$, $P_{\delta,\varkappa,\sigma}$ et $P_{\delta,\mu,\sigma}$, et également situé sur S_δ, est distinct de $q_{\delta,\varkappa,\mu,\varrho}$, ou non. Si les deux points q coincidaient, on pourrait remplacer successivement aussi $\varkappa$ et μ par d'autres indices, et il s'ensuivrait que tous ces points q affectés de l'indice δ et de trois autres indices quelconques coincidassent, c'est à dire que tous les plans affectés de l'indice δ passassent par un même point q_δ situé sur S_δ; de même tous les

plans affectés de l'indice $\varkappa$ passeraient par un même point $q_\varkappa$ situé sur $S_\varkappa$; donc tous les plans affectés des indices δ et $\varkappa$ passeraient par deux mêmes points q_δ et $q_\varkappa$; mais nous avons vu que ces plans passent aussi par le point $p_{\delta,\varkappa}$; conséquemment tous les plans affectés de deux mêmes indices coincideraient, d'où l'on déduirait de nouveau, en allant de proche en proche, la coincidence de tous les plans P. Les deux points $q_{\delta,\varkappa,\mu,\varrho}$ et $q_{\delta,\varkappa,\mu,\sigma}$ doivent donc être distincts; d'où il suit qu'il se trouve sur S_δ autant de points q que les m indices moins un admettent de combinaisons trois à trois. On aura donc en tout $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)(m-3)$ points q.

IV.

Si on fait passer m surfaces du second ordre par 6 mêmes points, il existe une infinité de systèmes de $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ plans passant par les autres intersections des surfaces du second ordre prises trois à trois et passant $(m-2)$ à $(m-2)$ par $\frac{1}{2}m(m-1)$ couples de points situés sur les intersections des surfaces prises deux à deux, et quatre à quatre par $2\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)$ autres points. Des premiers points il se trouve $2(m-1)$ sur chaque surface et 6 sur chaque plan, des autres il se trouve $m-3$ sur chaque plan.

En effet, il résulte du théorème ci-dessus relatif à quatre surfaces que dès qu'un plan $P_{\delta,\varkappa,\mu}$ est mené par les deux points $i_{\delta,\varkappa,\mu}$, il rencontre les deux surfaces S_δ et $S_\varkappa$ en deux points $p_{\delta,\varkappa}$ tels qu'ils sont sur un même plan $P_{\delta,\varkappa,\varrho}$ avec les deux points $i_{\delta,\varkappa,\varrho}$ intersections de S_δ et $S_\varkappa$ avec une quatrième quelconque S_ϱ des m surfaces proposées. S_ϱ étant quelconque, il s'ensuit qu'il passe par les points $p_{\delta,\varkappa}$, outre le plan $P_{\delta,\varkappa,\mu}$, autant de plans qu'on peut mettre d'indices à la place de ϱ, hormis δ, $\varkappa$ et μ, donc en tout $m-2$ plans. Mais on arrive au plan quelconque $P_{\delta,\varkappa,\mu}$ en menant d'abord par les deux points $i_{1,2,3}$ arbitrairement le premier plan $P_{1,2,3}$ qui, une fois fixé, détermine tout le système des plans P; en considérant ensuite que le plan $P_{1,2,\mu}$ passe par les points $p_{1,2}$ et $i_{1,2,\mu}$ et détermine avec S_1 et S_μ les points $p_{1,\mu}$; puis que le plan $P_{1,\varkappa,\mu}$ passe par les points $p_{1,\mu}$ et $i_{1,\varkappa,\mu}$ et détermine avec $S_\varkappa$ et S_μ les points $p_{\varkappa,\mu}$ par lesquels et les points $i_{\delta,\varkappa,\mu}$ passe enfin le plan $P_{\delta,\varkappa,\mu}$ lui-même, ce qu'il s'agissait de voir.

Examinons en second lieu si le point d'intersection des plans $P_{\delta,\varkappa,\mu}$, $P_{\delta,\varkappa,\varrho}$, $P_{\delta,\mu,\varrho}$, $P_{\varkappa,\mu,\varrho}$ qui correspondent au groupe S_δ, $S_\varkappa$, S_μ, S_ϱ, peut coincider avec celui des plans $P_{\delta,\varkappa,\mu}$, $P_{\delta,\varkappa,\sigma}$, $P_{\delta,\mu,\sigma}$, $P_{\varkappa,\mu,\sigma}$ qui correspondent

au groupe de surfaces qu'on obtient en remplaçant S_ϱ par S_σ. Si cela était, le point d'intersection de ces derniers plans devrait à son tour coincider avec celui des plans $P_{\delta,\varkappa,\nu}$, $P_{\delta,\varkappa,\sigma}$, $P_{\delta,\nu,\sigma}$, $P_{\varkappa,\nu,\sigma}$, et de la même manière celui-ci coinciderait avec le point d'intersection des plans $P_{\delta,\lambda,\nu}$, $P_{\delta,\lambda,\sigma}$, $P_{\delta,\nu,\sigma}$, $P_{\lambda,\nu,\sigma}$, lequel coinciderait de nouveau avec le point d'intersection des plans $P_{\varepsilon,\lambda,\nu}$, $P_{\varepsilon,\lambda,\sigma}$, $P_{\varepsilon,\nu,\sigma}$, $P_{\lambda,\nu,\sigma}$. Les indices de ces derniers plans sont entièrement différents de ceux des plans que nous avons pris pour point de départ. On voit donc que si deux de ces points d'intersection de quatre plans coincidaient, tous les plans P passeraient par un même point; mais on a vu que ces plans passent, en outre, $m-2$ à $m-2$ par un couple de points p; d'où il suit que tous les plans affectés de deux mêmes indices coincideraient, par suite de quoi enfin tous les plans P devraient coincider, ce qui ne peut pas être. Il faut donc que les points d'intersection des quatre plans correspondant à chaque groupe de quatre surfaces soient distincts, et qu'il y en ait autant que les m indices admettent de combinaisons quatre à quatre.

Berlin, au mois d'août 1857.

26.

Addition au mémoire sur la forme canonique des fonctions binaires.

(Par M. *A. Cayley.*)

Dans le mémoire ***sur la forme canonique des fonctions binaires*** (pag. 48 de ce volume) j'ai dit que M. ***Sylvester*** avait en outre étendu sa théorie aux fonctions binaires des degrés pairs 4 et 6; j'aurais dû dire, des degrés pairs 4, 6 et 8. J'ai aussi omis de faire observer que les termes ***canonisant*** et ***lambdaique*** appartenaient à M. ***Sylvester***. Enfin en citant dans la note les mémoires de M. ***Sylvester*** qui ont rapport à cette théorie j'ai omis de citer le mémoire ***On the calculus of forms otherwise the theory of invariants***, §. VIII (Camb. and Dublin Math. Journal t. IX, p. 93) section qui porte le titre ***On the reduction of a sextic function of two variables to the canonical form.***

Londres, 16 Juillet 1857.

27.

Über eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen.

(Von Herrn *A. Clebsch.*)

§. 1.

Die Gleichungen von welchen der Theorie nach die Bewegung einer Flüssigkeit abhängt, werden im Allgemeinen in doppelter Weise dargestellt. Entweder betrachtet man als die unbekannten Gröfsen des Problems die Geschwindigkeiten, welche zu einer gewissen Zeit an einer Stelle der Flüssigkeit existiren, man behandelt sie als Functionen des Ortes und der Zeit, und gelangt auf diese Weise zu einem System von vier partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welches den Namen des *Euler*'schen führt, und hat nach Auflösung dieses Systems ein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen zu lösen, um die Bewegung eines einzelnen Flüssigkeitstheilchens zu bestimmen. Oder man führt die Coordinaten eines Flüssigkeitstheilchens als abhängige Variable ein, und gelangt zu einem System von abermals vier partiellen Differentialgleichungen, mittelst dessen man jene Coordinaten als Funktionen der Zeit und des Anfangszustandes bestimmt. Dies ist der Weg, welchen *Lagrange* in seiner analytischen Mechanik eingeschlagen hat. Man umgeht so die Auflösung eines hinzutretenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, aber die Gleichungen des partiellen Systems werden bis auf eine von der zweiten Ordnung; auch scheint es mifslich, dafs die charakteristischen Eigenschaften der wichtigen *stationären* Bewegung in dieser Form wenig deutlich hervortreten.

Man kann indefs das Problem noch auf eine dritte Art behandeln, welche gerade in dem erwähnten Falle eigenthümliche Vorzüge darbietet. Für die stationäre Bewegung nämlich kann man die Differentialgleichungen ersetzen durch die Gleichungen des folgenden Problems:

Ein dreifaches, über den Raum ausgedehntes Integral zu einem Minimum zu machen, bei welchem die zu integrirende Funktion die lebendige

Kraft eines Theilchens ist, vermehrt um eine beliebige Gröfse, welche nur für alle diejenigen Theilchen dieselbe bleibt, welche die nämliche Bahn durchlaufen. Die erwähnte Funktion ist dabei ausgedrückt durch diejenigen Funktionen, welche, Constanten gleich gesetzt, die Bewegungscurven der Theilchen geben, und durch die ersten partiellen Ableitungen dieser Funktionen.

Durch diesen Satz, welcher im Folgenden, nebst einigen andern Sätzen, abgeleitet werden soll, und welcher eine merkwürdige Analogie mit dem Principe der kleinsten Wirkung zeigt, erhält man also für die stationäre Bewegung ein System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, und durch Integration findet man unmittelbar die Bewegungscurven; rückwärts durch Differentiation die Geschwindigkeiten. Für den nicht stationären Zustand wird allerdings das entsprechende Resultat viel complicirter; doch wollte ich es mir nicht versagen, die allgemeine Entwicklung aufzustellen, welche auch diesen Fall umfafst. Ich werde sogar vorläufig ein allgemeines System partieller Differentialgleichungen betrachten, und die Resultate einer, der angedeuteten entsprechenden, Transformation aufstellen.

Für die stationäre Bewegung in der ***Ebene*** hat bereits Herr Dr. ***Meissel*** in einer, in ***Poggendorf***'s Annalen Bd. 95 erschienenen Abhandlung einen Versuch gemacht, eine Transformation von möglichst grofser Allgemeinheit zu geben, indem er die gewöhnliche Annahme ausgeschlossen hat, nach welcher die Geschwindigkeiten eines Moleküls den partiellen Ableitungen ***einer*** Funktion gleich gesetzt werden. Indefs bemerkt man leicht, dafs Herr ***Meissel*** a. a. O. zu einigen falschen Schlüssen verleitet worden ist, welche die Allgemeinheit des Resultats wiederum fast ganz aufheben. Die Gleichung, welche Herr ***Meissel*** (p. 278, 5) gegeben hat, mufs in der That durch eine andere ersetzt werden, welche ich im Folgenden (§. 7, 59) aufgestellt habe.

Die Quelle der nachstehenden Untersuchungen bildet die Theorie der Funktionaldeterminanten, welche unmittelbar die wahre Form erkennen läfst, unter welcher sich die Geschwindigkeiten im Allgemeinen darstellen.

Ich wende mich zunächst dem folgenden allgemeinen System von Gleichungen zu.

§. 2.

Es seien $u_1, u_2, \ldots u_n$ und V Funktionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ und t, und als solche bestimmt durch die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \cdots + u_n\frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots + u_n\frac{\partial u_2}{\partial x_n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} = \frac{\partial u_n}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_n}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_n}{\partial x_2} + \cdots + u_n\frac{\partial u_n}{\partial x_n}, \end{cases}$$

$$(2.)\quad 0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}.$$

Die Bedeutung der letzten Gleichung läfst sich unmittelbar analytisch interpretiren. Bildet man die Funktionaldeterminante der n Funktionen

$$a,\quad a',\quad a^{(2)},\quad \ldots\quad a^{(n-1)}$$

nach den Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$, und ordnet dieselbe nach den Ableitungen von a, so dafs sie die Gestalt annimmt:

$$(3.)\quad R = \Delta_1\frac{\partial a}{\partial x_1} + \Delta_2\frac{\partial a}{\partial x_2} + \cdots + \Delta_n\frac{\partial a}{\partial x_n},$$

so sind die Δ wiederum Funktionaldeterminanten, bei welchen a und immer *eine* der Variabeln x ausgeschlossen wird. Dann hat man bekanntlich die identische Gleichung (vgl. *Jacobi,* theoria novi multiplicatoris, dieses Journal Bd. 27 p. 203, oder Mathem. Werke I, p. 51):

$$(4.)\quad \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \Delta_n}{\partial x_n} = 0,$$

und es sind zugleich die Ausdrücke $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$, welche $n-1$ willkürliche Funktionen ($a', a^{(2)}, \ldots a^{(n-1)}$) enthalten, die allgemeinsten, welche der Gleichung (4.) Genüge leisten. Man kann daher untersuchen, was aus den Gleichungen (1.) wird, wenn man in denselben die Funktionen $a', a^{(2)}, \ldots a^{(n-1)}$ als abhängige Variable einführt, indem man setzt:

$$(5.)\quad u_1 = \Delta_1,\quad u_2 = \Delta_2,\quad \ldots\quad u_n = \Delta_n.$$

Da wir die Gleichung (2.) identisch erfüllt haben, so sind nur die Gleichungen (1.) übrig, welche sich in die folgende symbolische Gleichung zusammenfassen lassen:

$$(6.)\quad \delta V = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \Delta_k}{\partial t}\delta x_k + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} \Delta_i \frac{\partial \Delta_k}{\partial x_i}\delta x_k,$$

in welcher bei der Variation nur $x_1, x_2, \ldots x_n$, nicht aber t, als veränderlich zu betrachten sind.

Bezeichnet man durch $2T$ den Ausdruck:

$$(7.) \qquad 2T = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2,$$

so hat man durch Variation dieses Ausdrucks:

$$(8.) \qquad \delta T = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \Delta_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_k} \delta x_k,$$

und statt der Gleichung (6.) kann man die folgende betrachten:

$$(9.) \qquad \delta(V-T) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \Delta_k}{\partial t} \delta x_k + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \Delta_i \left(\frac{\partial \Delta_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k.$$

Setzt man noch der Kürze wegen

$$(10.) \qquad M_k = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta_i \left(\frac{\partial \Delta_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_k} \right),$$

so geht die Gleichung (9.) über in

$$(10\,a.) \qquad \delta(V-T) = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial \Delta_k}{\partial t} + M_k \right) \delta x_k.$$

Diese Form läfst bereits Eigenschaften der Transformation erkennen. Bildet man nämlich die Summe:

$$M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2 + \cdots + M_n \Delta_n = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \Delta_i \Delta_k \left(\frac{\partial \Delta_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_k} \right),$$

so sieht man, dafs dieselbe durch Vertauschung von i und k ihr Zeichen wechselt, also identisch verschwinden mufs. Hieraus geht nach den bekannten Eigenschaften der Determinanten hervor, dafs die Ausdrücke M die Gestalt annehmen müssen:

$$(11.) \qquad \begin{cases} M_1 = A^{(1)} \dfrac{\partial a'}{\partial x_1} + A^{(2)} \dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_1} + \cdots + A^{(n-1)} \dfrac{\partial a^{(n-1)}}{\partial x_1}, \\ M_2 = A^{(1)} \dfrac{\partial a'}{\partial x_2} + A^{(2)} \dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_2} + \cdots + A^{(n-1)} \dfrac{\partial a^{(n-1)}}{\partial x_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\

so können wir die Gleichung (12.) unmittelbar integriren; denn aus der Gleichung

$$(13.)\qquad \delta(V-T) = A^{(1)}\delta a' + A^{(2)}\delta a^{(2)} + \cdots + A^{(n-1)}\delta a^{(n-1)},$$

wo rechts nur $n-1$, links n Variationen vorkommen, folgt ohne Weiteres:

$$(14.)\qquad \begin{cases} A^{(1)} = \Pi'(a') \\ A^{(2)} = \Pi'(a^{(2)}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A^{(n-1)} = \Pi'(a^{(n-1)}) \end{cases}$$

$$(14\,\text{a.})\qquad V-T = \Pi(a', a^{(2)}, \ldots a^{(n-1)}).$$

In diesen Gleichungen ist Π eine willkürliche Funktion der a, und $\Pi'(a^{(i)})$ bezeichnet die partielle Ableitung dieser Function nach $a^{(i)}$. Man kann also in diesem Falle ***die Gleichungen*** (1.), (2.) ***ersetzen durch die*** $n-1$ ***Gleichungen*** (14.), ***welche von der zweiten Ordnung sind.***

Sind die Δ nicht von t unabhängig, so kann man ebenfalls ein System von $n-1$ Differentialgleichungen aufstellen, welche aber vom dritten Grade und viel verwickelter sind. Die Gleichung (12.) nämlich stellt das System dar:

$$(15.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(V-T)}{\partial x_1} = A^{(1)}\dfrac{\partial a'}{\partial x_1} + A^{(2)}\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_1} + \cdots + A^{(n-1)}\dfrac{\partial a^{(n-1)}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \Delta_1}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial(V-T)}{\partial x_2} = A^{(1)}\dfrac{\partial a'}{\partial x_2} + A^{(2)}\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_2} + \cdots + A^{(n-1)}\dfrac{\partial a^{(n-1)}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \Delta_2}{\partial t}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot

also nach dem oben erwähnten Satze:

$$\frac{\partial S_1^{(m)}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_2^{(m)}}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial S_n^{(m)}}{\partial x_n} = 0$$

für jeden Werth von m von 1 bis $n-1$; eine Gleichung, welche mit Hülfe des Ausdrucks von $S_h^{(m)}$ übergeht in

$$0 = \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \frac{\partial (V-T)}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k}} \right\}.$$

Setzt man auch noch für $\frac{\partial (V-T)}{\partial x_k}$ aus (15.) seinen Werth ein, so hört die Gleichung auf eine identische zu sein, und man erhält Gleichungen zur Bestimmung der a. Man hat dann nämlich:

$$(16.) \quad 0 = \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k}} \left(A^{(1)} \frac{\partial a'}{\partial x_k} + A^{(2)} \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_k} + \cdots A^{(n-1)} \frac{\partial a^{(n-1)}}{\partial x_k} + \frac{\partial \Delta_k}{\partial t} \right) \right\}.$$

Diese Gleichung indefs vereinfacht sich noch bedeutend. Unter dem Differentiationszeichen $\frac{\partial}{\partial x_h}$ ist in $A^{(1)}$ multiplicirt:

$$\frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_1}} \cdot \frac{\partial a'}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_2}} \cdot \frac{\partial a'}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_n}} \cdot \frac{\partial a'}{\partial x_n},$$

und dies ist nichts als diejenige Funktionaldeterminante, welche aus Δ_h entsteht, wenn man darin $a^{(m)}$ durch a' ersetzt; dieselbe enthält also zwei gleiche Funktionen und mufs daher verschwinden, wenn nicht $m = 1$ ist, wo sie mit Δ_h zusammenfällt. So ist also der Coefficient von $A^{(1)}$ Null, ebenso der von $A^{(2)}$ etc. bis auf den von $A^{(m)}$, welcher Δ_h wird. Und so verwandelt sich die Gleichung (16.) in:

$$(17.) \quad 0 = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial}{\partial x_h} (\Delta_h . A^{(m)}) + \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k}} \cdot \frac{\partial \Delta_k}{\partial t} \right).$$

Fügt man noch hinzu, dafs nach dem wiederholt angewandten Satze:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \Delta_h}{\partial x_h} = 0, \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_h}} \right) = 0,$$

so nimmt die Gleichung (17.) endlich folgende Gestalt an:

$$(18.) \quad 0 = \Delta_1 \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_1} + \Delta_2 \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_2} + \cdots + \Delta_n \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_n} + Q^{(m)},$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist

$$(18\,\text{a.}) \qquad Q^{(m)} = \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2 \Delta_k}{\partial t\, \partial x_h} \cdot \frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k}}.$$

Die Gleichungen (18.) dienen zur Bestimmung der a. Denkt man sich diese Gleichungen aufgelöst, und sodann in $V-T$ statt $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Variable eingeführt $a', a^{(2)}, \ldots a^{(n-1)}$ und eine beliebige andere Funktion a, so hat man nach den Gleichungen (15.):

$$\Delta_1 \frac{\partial (V-T)}{\partial x_1} + \Delta_2 \frac{\partial (V-T)}{\partial x_2} + \ldots \Delta_n \frac{\partial (V-T)}{\partial x_n} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

und zugleich links nichts Anderes als $R\left[\frac{\partial (V-T)}{\partial a}\right]$; wenn wir nämlich R die Determinante sämmtlicher a nach den x nennen, und durch die eckige Klammer andeuten, dafs in ihr die x durch die a ausgedrückt zu denken sind. Man hat also

$$R\left[\frac{\partial (V-T)}{\partial a}\right] = \frac{\partial T}{\partial t},$$

mithin durch Integration:

$$(19.) \qquad V-T = \int \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}\right] da + \Pi(a', a'', \ldots a^{(n-1)}, t),$$

wo Π eine willkürliche Funktion ist. Die Gleichungen (18.), (19.) geben somit die Funktionen a, V; die Differentiation der Gleichung (19.) führt noch auf Bedingungsgleichungen für die willkürlichen Funktionen, welche die vollständige Integration der Gleichungen (18.) ergeben würde.

Ich bemerke nur noch, dafs sobald *irgend Einer* der Ausdrücke $Q^{(m)}$ verschwindet, die entsprechende Gleichung (18.) das Integral giebt

$$(20.) \qquad A^{(m)} = \Omega(a', a^{(2)}, \ldots a^{(n-1)}, t),$$

wo Ω eine willkürliche Funktion ist. Jene Ausdrücke verschwinden *sämmtlich* in dem oben bereits betrachteten Falle.

§. 3.

Ehe ich fortfahre, ist es nöthig die Ausdrücke der A wirklich zu entwickeln. Dieselben sind aus den Gleichungen (9.), (10.), (11.) gegeben; es mufs nämlich sein

$$(21.) \qquad A^{(1)} \frac{\partial a'}{\partial x_k} + A^{(2)} \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_k} + \ldots + A^{(n-1)} \frac{\partial a^{(n-1)}}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta_i \left(\frac{\partial \Delta_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_k}\right).$$

Der rechte Theil mufs in den linken umgeformt werden. Zu dem Ende betrachte ich die dreifache Summe

$$(22.) \qquad S_k = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{m=1}^{m=n-1} \frac{\partial \Delta_h}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}} .$$

Die Summe

$$\sum_{m=1}^{m=n-1} \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}} ,$$

welche in S_k mit $\frac{\partial \Delta_h}{\partial x_i}$ multiplicirt ist, stellt offenbar eine Funktionaldeterminante dar, und zwar diejenige, welche aus Δ_h entsteht, wenn man die nach x_i darin ausgeführten Ableitungen durch die nach x_k ausgeführten ersetzt. Diese Determinante aber enthält im Allgemeinen zwei Reihen in denen nach x_k differenzirt ist, und verschwindet also; nur wenn die Indices k und i gleich sind, bleibt sie durch jene Vertauschung ungeändert, nämlich Δ_h; und wenn $k = h$ ist, so enthält Δ_h selbst bereits keine Ableitungen nach x_k mehr, und der Werth der resultirenden Determinante wird $-\Delta_i$, da nach einem bekannten Satze

$$\frac{\partial \Delta_k}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}} = -\frac{\partial \Delta_i}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k}}$$

ist. Somit reducirt sich die Summe (22.) auf

$$S_k = \sum_{h=1}^{h=n} \Delta_h \frac{\partial \Delta_h}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \Delta_k}{\partial x_i} \Delta_i$$

und man sieht also, dafs S_k sich von dem rechten Theile der Gleichung (21.) nur durch das Vorzeichen unterscheidet.

Aber die Gleichung (22.) nimmt auch unmittelbar die Gestalt an:

$$S_k = \sum_{m=1}^{m=n-1} \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k} \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \Delta_h}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}} \right\} .$$

Dies ist bereits die in (21.) verlangte Form, da in der Klammer der Index k nicht mehr vorkommt; man kann also setzen

$$(23.) \qquad A^{(m)} = -\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \Delta_h}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}} .$$

Diesem Ausdruck kann man noch eine passendere Gestalt geben, indem man

bemerkt, dafs

$$0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}} \right);$$

denn man kann nun schreiben

$$A^{(m)} = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sum_{h=1}^{h=n} \Delta_h \frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}} \right\}.$$

Nun war aber oben die Bezeichnung eingeführt:

$$2T = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2.$$

Wenden wir diese an, so erhalten wir endlich $A^{(m)}$ in seiner einfachsten Gestalt:

$$(24.) \quad -A^{(m)} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_1}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{dx_2}} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_n}}.$$

Dies ist also der Ausdruck von $A^{(m)}$, in den, wie man sieht, zweite Ableitungen eingehen; die Gleichung (18.) führt mithin auf die dritten. Ich bemerke noch, dafs die Gleichung (23.) uns erlaubt, den Gleichungen (18.) die Gestalt zu geben:

$$(25.) \quad \Delta_1 \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_1} + \Delta_2 \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_2} + \cdots + \Delta_n \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_n} + \frac{\partial A^{(m)}}{\partial t} = R^{(m)},$$

wo der Kürze wegen

$$(25\,a.) \quad R^{(m)} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \Delta_h}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}}$$

gesetzt ist; eine Form, von welcher im Folgenden Gebrauch gemacht werden soll.

Für den einfacheren Fall aber, dafs die Δ (oder die u) von t unabhängig sind, giebt die Gleichung (24.) aus (14.) folgende:

$$(26.) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_1}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_2}} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_n}} + \Pi'(a^m) = 0.$$

Das hierdurch dargestellte System von Gleichungen ist kein anderes, als dasjenige, welches man aus der Aufgabe erhält, ***das Integral***

$$(27.) \quad \int^{(n)} (T - \Pi)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

zu einem Minimum zu machen, wo

$$(28.) \quad 2T = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2;$$

ein Theorem, welches für die Transformation der betreffenden Differentialgleichungen von Wichtigkeit ist; und interessant dadurch, dafs es die Identität der Probleme erkennen läfst, welche durch die Gleichungen (1.), (2.) und (27.) gegeben sind.

§. 4.

Verbinden wir jetzt das aufgestellte System von Differentialgleichungen mit dem Systeme vollständiger Differentialgleichungen

$$(29.) \qquad \frac{dx_1}{dt} = u_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = u_2, \qquad \ldots \qquad \frac{dx_n}{dt} = u_n,$$

für welches wir nun auch setzen können

$$(30.) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \Delta_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \Delta_2, \qquad \ldots \qquad \frac{dx_n}{dt} = \Delta_n.$$

Es zeigt zunächst die identische Gleichung

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \Delta_n}{\partial x_n} = 0,$$

dafs Ein Multiplicator der Gleichungen gleich Eins ist; und man also das letzte Integral auffinden kann, wenn man die ersten $n-1$ kennt.

Man sieht ferner ein, dafs, sobald die Δ von t frei sind, *die Integrale der Gleichungen unmittelbar die folgenden werden:*

$$(31.) \qquad a' = \text{Const.}, \qquad a^{(2)} = \text{Const.}, \qquad \ldots \qquad a^{(n-1)} = \text{Const.}$$

Denn aus den Gleichungen (30.) folgt:

$$\frac{da^{(m)}}{dt} = \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt} + \cdots = \Delta_1\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_1} + \Delta_2\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_2} + \cdots,$$

was identisch Null ist. *Auch die A sind, gleich Constanten gesetzt, Integrale der vorliegenden Gleichungen,* da sie nach (14.) Funktionen der a sind.

Für den allgemeinen Fall kann man noch folgende Theoreme hinzufügen:

1. *Sobald Eines der a von t unabhängig ist, wird* $a = \text{Const.}$ *ein Integral der Gleichungen* (30.)

2. *Sobald der Ausdruck* (25 a.)

$$R^{(m)} = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial \Delta_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}}$$

verschwindet, ist

$$A^{(m)} = \text{Const.}$$

ein Integral der vorliegenden Gleichungen.

Denn es ist alsdann nach (30.), (25.)

$$\frac{dA^{(m)}}{dt} = \Delta_1 \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_1} + \Delta_2 \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_2} + \cdots \Delta_n \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_n} + \frac{\partial A^{(m)}}{\partial t} = R^{(m)} = 0.$$

§. 5.

Setzen wir nunmehr $n = 3$, so gehen die Gleichungen (1.), (2.) in die *Euler*schen über, nämlich in:

$$(32.)\quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial V}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \end{cases}$$

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

wo u_1, u_2, u_3 die an der Stelle (x_1, x_2, x_3) zur Zeit t stattfindenden Geschwindigkeiten sind, und $V = U - \frac{p}{q}$, wenn U die Kräftefunktion bezeichnet, p den Druck, q die constante Dichtigkeit. Ich setze nun, den Gleichungen (5.) zufolge:

$$(33.)\quad \begin{cases} u_1 = \Delta_1 = \frac{\partial a'}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_3} - \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial a'}{\partial x_3}, \\ u_2 = \Delta_2 = \frac{\partial a'}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_1} - \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial a'}{\partial x_1}, \\ u_3 = \Delta_3 = \frac{\partial a'}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_2} - \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial a'}{\partial x_2}. \end{cases}$$

Dann ist nach einer bekannten Transformation

$$(34.)\quad 2T = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = P'P^{(2)} - PP;$$

wenn der Kürze wegen gesetzt wird:

$$(35.)\quad \begin{cases} P' = \left(\frac{\partial a'}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial a'}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial a'}{\partial x_3}\right)^2, \\ P^{(2)} = \left(\frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_3}\right)^2, \\ P = \frac{\partial a'}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_1} + \frac{\partial a'}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_2} + \frac{\partial a'}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_3}, \end{cases}$$

und die Ausdrücke der A werden:

$$(36.)\quad \begin{cases} -A^{(1)} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ P^{(2)} \frac{\partial a'}{\partial x_i} - P \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_i} \right\}, \\ -A^{(2)} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ P' \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_i} - P \frac{\partial a'}{\partial x_i} \right\}. \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen, von denen dann das Problem im Allgemeinen abhängt, sind

$$(37.)\quad \begin{cases} 0 = \Delta_1 \frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1} + \Delta_2 \frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2} + \Delta_3 \frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_3} + \frac{\partial A^{(1)}}{\partial t} - R^{(1)}, \\ 0 = \Delta_1 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial x_1} + \Delta_2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial x_2} + \Delta_3 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial x_3} + \frac{\partial A^{(2)}}{\partial t} - R^{(2)}, \end{cases}$$

wo

$$(37\text{ a.})\quad \begin{cases} R^{(1)} = \frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial x_1 \partial t}\left(\frac{\partial \Delta_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial x_2 \partial t}\left(\frac{\partial \Delta_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Delta_3}{\partial x_1}\right) \\ \qquad + \frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial x_3 \partial t}\left(\frac{\partial \Delta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_2}\right), \\ -R^{(2)} = \frac{\partial^2 a'}{\partial x_1 \partial t}\left(\frac{\partial \Delta_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial^2 a'}{\partial x_2 \partial t}\left(\frac{\partial \Delta_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Delta_3}{\partial x_1}\right) \\ \qquad + \frac{\partial^2 a'}{\partial x_3 \partial t}\left(\frac{\partial \Delta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_2}\right). \end{cases}$$

Die Integrale der Gleichungen

$$(38.)\quad \frac{dx_1}{dt} = \Delta_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \Delta_2, \qquad \frac{dx_3}{dt} = \Delta_3$$

stellen ein veränderliches Kurvensystem dar, auf welchem sich die Theilchen bewegen. Nach den in §. 4 aufgeführten Sätzen ***hat man nun für diese Gleichungen das Integral***

$$A^{(m)} = \text{Const.},$$

wenn in einer der Gleichungen (37.) ***das Glied*** $R^{(m)}$ ***verschwindet.*** Dies ist z. B. der Fall, wenn $a^{(2)}$ von der Zeit unabhängig ist; dann ist also

$$A^{(1)} = \text{Const.}$$

ein Integral. Aber auch

$$a^{(2)} = \text{Const.}$$

ist ein solches. Verbinden wir dies mit dem Principe des letzten Multiplicators, ***so können wir also die Gleichungen*** (38.) ***integriren, sobald eines der Oberflächensysteme, auf welchen die Bewegung vor sich geht, von der Zeit unabhängig ist.*** Das letzte Integral sei $\varphi = \text{Const.}$; dann mufs also φ der Gleichung genügen

$$W = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \Delta_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \Delta_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0;$$

und weil der Multiplicator 1 ist, wird dieser Ausdruck auch gleich der Determinante:

$$W \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_1} & \frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_2} & \frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_3} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_3} & \frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial t} & \frac{\partial A^{(1)}}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Führt man statt x_1, x_2, x_3 nun $a^{(2)}$, $A^{(1)}$ und irgend eine neue Variable v ein, und bezeichnet die neuen Ableitungen durch eine Klammer, so geht diese identische Gleichung über in:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\left\{\frac{\partial v}{\partial t}+\Delta_1\frac{\partial v}{\partial x_1}+\Delta_2\frac{\partial v}{\partial x_2}+\Delta_3\frac{\partial v}{\partial x_3}\right\} \equiv D\cdot\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\end{vmatrix},$$

wo D die Determinante von v, $a^{(2)}$, $A^{(1)}$ nach x_1, x_2, x_3 ist. Setzt man noch der Kürze wegen

$$(39.)\qquad w = \frac{\partial v}{\partial t}+\Delta_1\frac{\partial v}{\partial x_1}+\Delta_2\frac{\partial v}{\partial x_2}+\Delta_3\frac{\partial v}{\partial x_3},$$

so folgt aus der identischen Gleichung:

$$-1 = D\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right), \qquad w = D\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$

und es wird sonach das gesuchte letzte Integral

$$(40.)\qquad \varphi = \int\frac{w\,dt-dv}{D}.$$

Dieser Fall tritt z. B. ein, ***wenn die Bewegung um eine Vertikale nach allen Seiten dieselbe ist,*** in diesem Falle also kann man, da *ein* Integral (die durch jene Vertikale gelegte Bewegungsebene) von t unabhängig ist, sämmtliche Integrale angeben.

Ist die Bewegung eine stationäre, so hat man nach (26.) etc. ***diejenigen Gleichungen aufzulösen, welche das Integral***

$$(41.)\qquad \iiint\left(\frac{P'P^{(2)}-PP}{2}-\Pi(a',a^{(2)})\right)dx_1\,dx_2\,dx_3$$

zu einem Minimum machen, nämlich die Gleichungen

$$(42.)\qquad A^{(1)} = \Pi'(a'), \qquad A^{(2)} = \Pi'(a^{(2)}).$$

Die Funktionen a', $a^{(2)}$ geben dann die Oberflächensysteme, in deren Schnitt-

kurven die Bewegung vor sich geht:

$$a' = \text{Const.}, \qquad a^{(2)} = \text{Const.}$$

Dies ist das in der Einleitung ausgesprochene Theorem. Der Druck wird endlich, den Gleichungen (14 a.) und (19.) zufolge, im Allgemeinen durch die Formel gegeben

$$U - \frac{p}{q} - T = \int \left[\frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial t}\right] da + \Pi(a', a^{(2)}, t),$$

und für die stationäre Bewegung insbesondere durch

$$U - \frac{p}{q} - T = \Pi(a', a^{(2)}).$$

Dies ist zugleich die wahre Form, welche die Gleichung der lebendigen Kraft annimmt.

§. 6.

Die Einführung neuer Variabeln in die vorliegenden Gleichungen hat keine erheblichen Schwierigkeiten. Für den stationären Zustand hat man Nichts zu thun, als den Ausdruck T zu transformiren, was offenbar nur die Kenntnifs der Form voraussetzt, welche das Quadrat des Linienelementes annimmt. Ist dasselbe

$$(43.) \qquad ds^2 = u_{11}dy_1^2 + u_{22}dy_2^2 + 2u_{12}dy_1dy_2 \ldots,$$

wo y_1, y_2, y_3 die neuen (von t unabhängig gedachten) Variabeln sind, so ist die Transformationsdeterminante

$$(44.) \qquad D = \sqrt{\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}},$$

ferner

$$2T = P'P^{(2)} - PP,$$

wo

$$(45.) \qquad P = -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_1} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_2} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_3} \\ \frac{\partial a'}{\partial y_1} & \frac{\partial a'}{\partial y_2} & \frac{\partial a'}{\partial y_3} & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{D^2},$$

und wo P' aus P erhalten wird, wenn man $a^{(2)}$ durch a', $P^{(2)}$, wenn man

a' durch $a^{(2)}$ ersetzt. Aus der Theorie der Determinanten ergiebt sich ferner leicht, dafs $2T$ auch die Gestalt annimmt:

$$(45\text{ a.}) \qquad 2T = \frac{1}{D^2} \cdot \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \frac{\partial a'}{\partial y_1} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_1} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \frac{\partial a'}{\partial y_2} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_2} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \frac{\partial a'}{\partial y_3} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_3} \\ \frac{\partial a'}{\partial y_1} & \frac{\partial a'}{\partial y_2} & \frac{\partial a'}{\partial y_3} & 0 & 0 \\ \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_1} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_2} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_3} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(vgl. ***Hesse***, über Determinanten in der Geometrie, dieses Journal Bd. 49. p. 248, Formel (6.), (7.)).

Sodann wird also das Integral, welches ein Minimum werden soll:

$$\iiint (T - \Pi) . D \, dy_1 \, dy_2 \, dy_3,$$

und es fliefsen daraus nach bekannter Methode die Gleichungen:

$$(46.) \qquad \begin{cases} 0 = D . \Pi'(a') + \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(D \cdot \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a'}{\partial y_i}} \right), \\ 0 = D . \Pi'(a^{(2)}) + \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(D \cdot \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_i}} \right). \end{cases}$$

Diese Gleichung giebt auch für den allgemeineren Fall die Transformationsformel der A:

$$(47.) \qquad -A^{(m)} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(D \cdot \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial y_i}} \right).$$

Wir bedürfen dieser Formel zur Transformation der Gleichung (37.). Bemerken wir ferner, dafs der erste Theil jener Gleichung, nämlich

$$U = \Delta_1 \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_1} + \Delta_2 \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_2} + \Delta_3 \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_3},$$

nichts ist als die Funktionaldeterminante von a', $a^{(2)}$, $A^{(m)}$ nach den x, so folgt unmittelbar, dafs $D.U$ die Funktionaldeterminante von a', $a^{(2)}$, $A^{(m)}$ nach den y ist; dafs also, wenn man setzt

$$(48.)\quad \begin{cases} \nabla_1 = \dfrac{\partial a'}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial y_3} - \dfrac{\partial a'}{\partial y_3}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial y_2}, \\ \nabla_2 = \dfrac{\partial a'}{\partial y_3}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial y_1} - \dfrac{\partial a'}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial y_3}, \\ \nabla_3 = \dfrac{\partial a'}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial y_2} - \dfrac{\partial a'}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial y_1}, \end{cases}$$

die identische Gleichung stattfindet:

$$(49.)\quad \sum_{i=1}^{i=3} \Delta_i \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_i} = \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{k=3} \nabla_k \frac{\partial A^{(m)}}{\partial y_k}.$$

Nimmt man hier auf beiden Seiten den Coefficienten von $\frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_i}$, so erhält man die Transformation von Δ_i, nämlich

$$(50.)\quad \Delta_i = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\nabla_k}{D}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial y_k}.$$

Diese Gleichung, bei deren Ableitung die Natur der a', $a^{(2)}$, $A^{(m)}$ vollkommen gleichgültig blieb, involvirt die allgemeinere Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} & \frac{\partial\psi}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_3} & \frac{\partial\psi}{\partial y_3} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \end{vmatrix}.$$

und wenn man diese Gleichung auf (37 a.) anwendet, so erhält man

$$(51.)\quad DR^{(1)} = \sum_{i=1}^{i=3} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\nabla_1}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \frac{\nabla_2}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_2} + \frac{\nabla_3}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\right) & \frac{\partial x_i}{\partial y_1} \\ \frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\nabla_1}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \frac{\nabla_2}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_2} + \frac{\nabla_3}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\right) & \frac{\partial x_i}{\partial y_2} \\ \frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_3} & \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\nabla_1}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \frac{\nabla_2}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_2} + \frac{\nabla_3}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\right) & \frac{\partial x_i}{\partial y_3} \end{vmatrix}.$$

Hier ist in $\frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_1}$ multiplicirt der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{i=3}\Big[\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\nabla_1}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \frac{\nabla_2}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_2} + \frac{\nabla_3}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\right) - \frac{\partial x_i}{\partial y_2}\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\nabla_1}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \frac{\nabla_2}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_2} + \frac{\nabla_3}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\right)\Big],$$

oder

$$\sum_{i=1}^{i=3}\sum_{k=1}^{k=3}\left\{\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\nabla_k}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\right) - \frac{\partial x_i}{\partial y_2}\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\nabla_k}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\right)\right\},$$

oder auch, wenn man die Differentiation ausführt:

$$\sum_{k=1}^{k=3}\left\{\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\nabla_k}{D}\right)\cdot\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}-\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\nabla_k}{D}\right)\cdot\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial x_i}{\partial y_2}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\right\}$$
$$+\sum_{k=1}^{k=3}\frac{\nabla_3}{D}\left\{\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_2\,\partial y_k}-\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial x_i}{\partial y_2}\frac{\partial x_i}{\partial y_3\,\partial y_k}\right\};$$

und wenn man nun bemerkt, dafs nach (43.)

$$(52.)\qquad \sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial x_i}{\partial y_h}=u_{kh},$$

so geht der betrachtete Coefficient über in:

$$\sum_{k=1}^{k=3}\left\{\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\nabla_k}{D}\right).u_{3k}-\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\nabla_k}{D}\right).u_{2k}+\frac{\nabla_k}{D}\left(\frac{\partial u_{3k}}{\partial y_2}-\frac{\partial u_{2k}}{\partial y_3}\right)\right\},$$

und so wird endlich die gesuchte Form von $R^{(1)}$:

$$(53.)\qquad DR^{(1)}=\sum_{k=1}^{k=3}\frac{\nabla_k}{D}\left[\frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_1}\left(\frac{\partial u_{3k}}{\partial y_2}-\frac{\partial u_{2k}}{\partial y_3}\right)+\frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_2}\left(\frac{\partial u_{1k}}{\partial y_3}-\frac{\partial u_{3k}}{\partial y_1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_3}\left(\frac{\partial u_{2k}}{\partial y_1}-\frac{\partial u_{1k}}{\partial y_2}\right)\right]$$
$$+\sum_{k=1}^{k=3}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\nabla_k}{D}\right) & u_{1k}\\ \frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\nabla_k}{D}\right) & u_{2k}\\ \frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_3} & \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\nabla_k}{D}\right) & u_{3k}\end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung und die Gleichung (49.) absolviren zusammen die Transformation der Gleichungen (37.), die also gleichfalls auf die Transformation des Linienelementes allein zurückkommt.

Sind insbesondere die y drei Systeme von Oberflächen, welche sich rechtwinklig schneiden, so verschwinden u_{12}, u_{23}, u_{31}, und man erhält an Stelle der $R^{(1)}$ die Ausdrücke:

$$(54.)\qquad R^{(1)}=\left\{\frac{\partial}{\partial y_2}\left(u_{33}\frac{\nabla_3}{D}\right)-\frac{\partial}{\partial y_3}\left(u_{22}\frac{\nabla_2}{D}\right)\right\}\frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_1}$$
$$+\left\{\frac{\partial}{\partial y_3}\left(u_{11}\frac{\nabla_1}{D}\right)-\frac{\partial}{\partial y_1}\left(u_{33}\frac{\nabla_3}{D}\right)\right\}\frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_2}+\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\left(u_{22}\frac{\nabla_2}{D}\right)-\frac{\partial}{\partial y_2}\left(u_{11}\frac{\nabla_1}{D}\right)\right\}\frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_3}$$

und das Entsprechende für $R^{(2)}$ durch Vertauschung von a' und $a^{(2)}$. Die Transformation endlich der Gleichungen (38.) ist in der Gleichung (50.) enthalten; denn multiplicirt man dieselbe mit $\frac{\partial y_h}{\partial x_i}$ und summirt nach i, so erhält man

$$(55.)\qquad \frac{dy_h}{dt}=\frac{\nabla_h}{D}.$$

§. 7.

In einzelnen Fällen ist man im Stande *eine* der Funktionen a', $a^{(2)}$ von vorn herein aus der Natur des mechanischen Problems zu bestimmen; man behält dann für die zurückbleibende Funktion a eine Differentialgleichung, welche im Allgemeinen von der dritten, bei der stationären Bewegung von der zweiten Ordnung ist.

Sei die Bewegung der Art, dafs alle Theilchen sich in parallelen Ebenen zu bewegen genöthigt sind, deren Gleichungen durch $x_3 = \text{Const.}$ dargestellt sein mögen. Man kann dann setzen

$$(56.) \qquad a^{(2)} = x_3, \qquad a' = f(x_1, x_2, t).$$

Die Gleichungen (35.), (36.) geben nunmehr:

$$(57.) \quad \begin{cases} P' = \left(\frac{\partial a'}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial a'}{\partial x_2}\right)^2, & P^{(2)} = 1, \quad P = 0, \\ -A^{(1)} = \frac{\partial^2 a'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a'}{\partial x_2^2}, & A^{(2)} = 0, \end{cases}$$

und die Ausdrücke der Geschwindigkeiten werden aus (33.)

$$(58.) \qquad u_1 = \Delta_1 = \frac{\partial a'}{\partial x_2}, \qquad u_2 = \Delta_2 = -\frac{\partial a'}{\partial x_1}, \qquad u_3 = 0.$$

Daher verschwindet von den Gleichungen (37.) die zweite identisch, und man hat als einzige Gleichung:

$$(59.) \qquad \frac{\partial a'}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1} - \frac{\partial a'}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{\partial A^{(1)}}{\partial t} = 0,$$

wo A durch (57.) definirt ist. Im Falle der stationären Bewegung geben die Gleichungen (42.), (57.)

$$(60.) \qquad \frac{\partial^2 a'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a'}{\partial x_2^2} + \Pi'(a') = 0.$$

Die Integrale der zu (59.) gehörigen Differentialgleichungen sind:

$$(61.) \qquad A^{(1)} = \text{Const.}$$

und ein zweites, welches man aus dem Principe des letzten Multiplicators erhält, nämlich (40.)

$$(62.) \qquad \text{Const.} = \int \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial a'}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial a'}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) dt - dv}{\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2}},$$

wo statt x_1, x_2 unter dem Integralzeichen $A^{(1)}$ und die beliebige Funktion v als Variable eingeführt worden sind.

Einen zweiten Fall, in welchem gleichfalls die Differentialgleichungen auf *eine* sich reduciren, giebt die Bewegung, welche um eine Axe nach allen Richtungen dieselbe ist. Diese Axe sei die der x_3. Man kann dann die Coordinaten einführen

$$(63.) \qquad x_1 = r\cos\varphi, \qquad x_2 = r\sin\varphi, \qquad x_3 = z.$$

Das Quadrat des Linienelementes ist dann bekanntlich

$$(64.) \qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Zugleich erhält man

$$(65.) \quad \begin{cases} P' &= \left(\frac{\partial a'}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial a'}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial a'}{\partial \varphi}\right)^2, \\ P^{(2)} &= \left(\frac{\partial a^{(2)}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial a^{(2)}}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial a^{(2)}}{\partial \varphi}\right)^2, \\ P &= \frac{\partial a'}{\partial r}\frac{\partial a^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial a'}{\partial z}\frac{\partial a^{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial a'}{\partial \varphi}\frac{\partial a^{(2)}}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Die Transformationsdeterminante ist r. Nun geben die Gleichungen (47.), da $2T = P'P^{(2)} - PP$:

$$(66.) \quad \begin{cases} -A^{(1)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left|P^{(2)}\frac{\partial a'}{\partial r} - P\frac{\partial a^{(2)}}{\partial r}\right|\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(P^{(2)}\frac{\partial a'}{\partial z} - P\frac{\partial a^{(2)}}{\partial z}\right) \\ \qquad\qquad + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(P^{(2)}\frac{\partial a'}{\partial \varphi} - P\frac{\partial a^{(2)}}{\partial \varphi}\right), \\ -A^{(2)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left|P'\ \frac{\partial a^{(2)}}{\partial r} - P\frac{\partial a'}{\partial r}\right|\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(P'\ \frac{\partial a^{(2)}}{\partial z} - P\frac{\partial a'}{\partial z}\right) \\ \qquad\qquad + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(P'\ \frac{\partial a^{(2)}}{\partial \varphi} - P\frac{\partial a'}{\partial \varphi}\right). \end{cases}$$

In Erwägung der um x_3 symmetrischen Bewegung kann man nun versuchen zu setzen

$$a^{(2)} = \varphi, \qquad a' = f(r, z, t).$$

Dann gehen die Gleichungen (65.) über in

$$P' = \left(\frac{\partial a'}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial a'}{\partial z}\right)^2, \qquad P^{(2)} = \frac{1}{r^2}, \qquad P = 0.$$

Und die Gleichungen (66.) geben:

$$(67.) \qquad -A^{(1)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a'}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a'}{\partial z}\right), \qquad A^{(2)} = 0.$$

Die Gleichungen (48.) gehen nunmehr über in

$$(68.) \qquad \nabla_1 = -\frac{\partial a'}{\partial z}, \qquad \nabla_2 = 0, \qquad \nabla_3 = \frac{\partial a'}{\partial r}.$$

Nimmt man hinzu, dafs $D = r$, so sieht man erstlich aus (54.), dafs die Ausdrücke R beide verschwinden; und dann giebt die Gleichung (49.):

$$(69.) \qquad \frac{\partial a'}{\partial r}\cdot\frac{\partial A^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial a'}{\partial z}\cdot\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r} + r\frac{\partial A^{(1)}}{\partial t} = 0,$$

wo $A^{(1)}$ durch (67.) definirt ist; und für die stationäre Bewegung:

$$(70.) \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a'}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a'}{\partial z}\right) + \Pi'(a') = 0.$$

Die Differentialgleichungen, welche zuletzt zu integriren sind, werden

$$(71.) \qquad \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r}\frac{\partial a'}{\partial z}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{r}\frac{\partial a'}{\partial r}.$$

Ein Integral ist wiederum $A^{(1)} = \text{Const.}$; das andere wird aus der Theorie des Multiplicators erhalten, nämlich

$$(72.) \qquad \text{Const.} = \int \frac{\left(r\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial a'}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial a'}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dt - r\,dv}{\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial A^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r}},$$

wo unter dem Integralzeichen statt r, z eingeführt sind $A^{(1)}$, welches während der Integration constant bleibt, und v, eine beliebige Funktion von r und z.

Berlin, den 26. Mai 1857.

28.

Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe.

(Von Herrn *R. Lipschitz.*)

Euler untersucht in einer Abhandlung über Methoden zur Auffindung bestimmter Integrale, die im 19ten Bande der Petersburger Commentarien p. 66 *) mitgetheilt ist, die Reihen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos nu}{n^\sigma} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nu}{n^\sigma},$$

wo σ eine ganze Zahl, und findet, dafs die erste derselben, wenn σ gerade, die zweite, wenn σ ungerade ist, gleich einer algebraischen ganzen Function der Gröfse u wird, deren Coefficienten nichts Irrationales enthalten, als das Verhältnifs des Kreises zu seinem Durchmesser, die Transcendente π. Zwar sind diese beiden Reihen nicht mehr convergent, wenn $\sigma = 0$ gesetzt wird, und so ist weder $\sum_{n=1}^{n=\infty} \cos nu = -\frac{1}{2}$, noch $\sum_{n=1}^{n=\infty} \sin nu = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} u$, wie ***Euler*** annimmt; doch überzeugt man sich leicht, dafs die aus diesen Voraussetzungen hergeleiteten Resultate richtig sind. Hebt man die Beschränkung auf, dafs σ eine ganze Zahl sein soll, so erfordert die Convergenz der beiden Reihen nur, dafs σ gröfser ist als Null. Um diese Behauptung zu rechtfertigen, werde die Reihe $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{nu\sqrt{-1}}}{n^\sigma}$, deren reeller und imaginärer Theil jene beiden Reihen geben, in ein bestimmtes Integral verwandelt. Da σ und n positive Gröfsen bezeichnen, so hat man, vermittelst der ***Euler***schen Gleichung

$$\frac{1}{n^\sigma} = \frac{\int_0^\infty e^{-n\alpha} \alpha^{\sigma-1} \partial\alpha}{\int_0^\infty e^{-\alpha} \alpha^{\sigma-1} \partial\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty e^{-n\alpha} \alpha^{\sigma-1} \partial\alpha,$$

---

*) und im 4ten Bande der Integralrechnung p. 260 ff.

nach ausgeführter Summation einer geometrischen Reihe, das Resultat

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{nu\sqrt{-1}}}{n^\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha+u\sqrt{-1}}}{1-e^{-\alpha+u\sqrt{-1}}} \alpha^{\sigma-1} \partial\alpha,$$

und durch Sonderung des Reellen und Imaginären

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos nu}{n^\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha}\cos u - e^{-2\alpha}}{1-2e^{-\alpha}\cos u + e^{-2\alpha}} \alpha^{\sigma-1} \partial\alpha,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nu}{n^\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha}\sin u}{1-2e^{-\alpha}\cos u + e^{-2\alpha}} \alpha^{\sigma-1} \partial\alpha.$$

In diesen Integralen ist die zu integrirende Function das Product des Ausdrucks $e^{-\alpha}\alpha^{\sigma-1}$, der innerhalb der Grenzen der Integration positiv bleibt, in einen Bruch, dessen Zähler nicht unendlich grofs, dessen Nenner nicht gleich Null wird, vorausgesetzt, dafs $\cos u$ nicht gleich der Einheit ist. Da nun das Integral $\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha = \Gamma(\sigma)$, so lange σ positiv ist, einen festen endlichen Werth hat, so gilt nach einem Fundamentalsatze der Integralrechnung von den in Rede stehenden Integralen dasselbe. Also haben die entsprechenden Reihen, falls $\cos u$ nicht gleich Eins ist, für jeden positiven Werth von σ eine Summe, und sind im Allgemeinen stetige Functionen der Variabeln u und σ. Indem ich die Reihen unter diesem Gesichtspunct betrachtete, wurde ich auf eine Reihe von etwas allgemeinerem Bildungsgesetz geführt, die, so viel mir bekannt, noch nicht untersucht ist. Da sie mir von einigem Interesse zu sein schien, werde ich das Ergebnifs meiner Beschäftigung mit derselben im Folgenden mittheilen.

§. 1.

Es seien v, x reelle, k, σ positive Gröfsen, so werde die Reihe

$$(1.) \quad \frac{1}{(k+x\sqrt{-1})^\sigma} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{e^{2n\pi v\sqrt{-1}}}{(k+(n+x)\sqrt{-1})^\sigma} + \frac{e^{-2n\pi v\sqrt{-1}}}{(k+(-n+x)\sqrt{-1})^\sigma} \right),$$

die eine Function der vier Elemente v, x, k, σ ist, durch $F(v, x, k, \sigma)$ bezeichnet. Die Potenzen der imaginären Ausdrücke sind so zu verstehn, dafs $(k+\theta\sqrt{-1})^\sigma = (k^2+\theta^2)^{\frac{1}{2}\sigma} e^{\sigma\varphi\sqrt{-1}}$ ist, wo φ der zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegende Bogen der trigonometrischen Tangente $\frac{\theta}{k}$ ist. Um zu erkennen, welchen Bedingungen die Elemente zu genügen haben, damit die Reihe convergire, ist es zweckmäfsig, sie durch ein bestimmtes Integral auszudrücken. Hiebei ist es nothwendig, zu unterscheiden, zwischen welchen ganzen Zahlen die Gröfse x enthalten, oder welcher ganzen Zahl sie gleich ist; zunächst werde daher angenommen, dafs $0 < x < 1$ ist.

Da alsdann im allgemeinen Gliede der Reihe (1.) die Gröfsen $(n+x)$ und $(n-x)$ positiv sind, so ist

$$\frac{1}{(k+(n+x)\sqrt{-1})^\sigma} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}}{(n+x-k\sqrt{-1})^\sigma}, \quad \frac{1}{(k+(-n+x)\sqrt{-1})^\sigma} = \frac{e^{\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}}{(n-x+k\sqrt{-1})^\sigma}$$

und durch Anwendung der *Euler*schen Formel

$$\frac{1}{(n\pm x\mp k\sqrt{-1})^\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty e^{-(n\pm x\mp k\sqrt{-1})\alpha}\,\alpha^{\sigma-1}\,\partial\alpha$$

gewinnt die Reihe die Gestalt:

$$F(v,x,k,\sigma) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty e^{-(x-k\sqrt{-1})\alpha}\,\alpha^{\sigma-1}\,\partial\alpha$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{e^{2n\pi v\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-(n+x-k\sqrt{-1})\alpha}\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha + e^{-2n\pi v\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-(n-x+k\sqrt{-1})\alpha}\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha\right\}.$$

Setzt man nun die Factoren $e^{2n\pi v\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}$ und $e^{-2n\pi v\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}$ unter das Integralzeichen, und summirt die beiden geometrischen Reihen, deren Exponent den analytischen Modul $e^{-\alpha}$ hat, so entsteht die Gleichung:

$$(2.)\qquad F(v,x,k,\sigma)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty\left(\frac{e^{-(x-k\sqrt{-1})\alpha-\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}}{1-e^{-\alpha+2\pi v\sqrt{-1}}} + \frac{e^{-(1-x+k\sqrt{-1})\alpha-2\pi v\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}}{1-e^{-\alpha-2\pi v\sqrt{-1}}}\right)\alpha^{\sigma-1}\,\partial\alpha.$$

Eine Sonderung des Reellen und Imaginären zeigt, dafs beide Theile des Integrals feste Werthe haben, wofern nicht $e^{2\pi v\sqrt{-1}}=1$, d. h. v gleich Null oder einer ganzen Zahl ist; dieser Fall aber bedarf einer besondern Prüfung. Der Werth der Reihe ist derselbe, mag v Null oder eine ganze Zahl sein; immer hat man

$$F(0,x,k,\sigma) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty\cos(k\alpha-\tfrac{1}{2}\pi\sigma)\frac{e^{-x\alpha}+e^{-(1-x)\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\,\alpha^{\sigma-1}\,\partial\alpha$$

$$+\frac{\sqrt{-1}}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty\sin(k\alpha-\tfrac{1}{2}\pi\sigma)\frac{e^{-x\alpha}-e^{-(1-x)\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\,\alpha^{\sigma-1}\,\partial\alpha,$$

wo jedes der beiden Integrale für sich zu untersuchen ist. Theilt man das erste derselben in zwei Integrale, das eine von Null bis zu einer kleinen positiven Gröfse ε, das andere von ε bis ∞ genommen, so hat das Integral $\int_\varepsilon^\infty\cos(k\alpha-\frac{1}{2}\pi\sigma)\frac{e^{-x\alpha}+e^{-(1-x)\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha$ stets einen bestimmten Werth, da der Factor $\frac{\cos(k\alpha-\frac{1}{2}\pi\sigma)}{1-e^{-\alpha}}$ innerhalb der Grenzen der Integration nicht unendlich wird, ferner die Ausdrücke $e^{-x\alpha}\alpha^{\sigma-1}$ und $e^{-(1-x)\alpha}\alpha^{\sigma-1}$ positiv bleiben, und die Integrale $\int_\varepsilon^\infty e^{-x\alpha}\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha$ und $\int_\varepsilon^\infty e^{-(1-x)\alpha}\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha$, weil x und $(1-x)$ positiv sind,

respective unter den endlichen Gröfsen $\frac{\Gamma(\sigma)}{x^\sigma}$ und $\frac{\Gamma(\sigma)}{(1-x)^\sigma}$ liegen. Das Integral $\int_0^\varepsilon \cos(k\alpha - \frac{1}{2}\pi\sigma)\frac{e^{-x\alpha}+e^{-(1-x)\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha$ hat aber nur dann einen endlichen Werth, wenn die Gröfse $\sigma \geqq 1$ ist. Denn da der Ausdruck $\cos(k\alpha - \frac{1}{2}\pi\sigma)(e^{-x\alpha}+e^{-(1-x)\alpha})\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}$ für $\sigma > 1$ nicht unendlich, und für $\sigma < 1$ nicht Null wird, so hat das zu untersuchende Integral den Charakter des Integrals $\int_0^\varepsilon \alpha^{\sigma-2}\partial\alpha$, das im ersten Fall einen endlichen Werth, im zweiten Fall keinen Sinn hat. Unter der Voraussetzung, dafs $\sigma = 1$, wird das Integral

$$\int_0^\varepsilon \frac{\cos(k\alpha - \frac{1}{2}\pi)}{1-e^{-\alpha}}(e^{-x\alpha}+e^{-(1-x)\alpha})\partial\alpha = \int_0^\varepsilon \frac{\sin k\alpha}{1-e^{-\alpha}}(e^{-x\alpha}+e^{-(1-x)\alpha})\partial\alpha$$

und bleibt endlich, weil für $\alpha = 0$ die zu integrirende Funktion sich dem Werth $2k$ nähert. Mithin hat auch das von 0 bis ∞ genommene Integral nur dann eine Bedeutung, wenn σ gröfser oder gleich der Einheit ist. Zerlegt man dagegen das Integral $\int_0^\infty \sin(k\alpha - \frac{1}{2}\pi\sigma)\frac{e^{-x\alpha}-e^{-(1-x)\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha$ auf gleiche Weise, so ergiebt sich, dafs beide Theile stets endlich sind. Da sowohl der Bruch $\frac{e^{-x\alpha}-e^{-(1-x)\alpha}}{1-e^{-\alpha}}$, als der Ausdruck $\sin(k\alpha - \frac{1}{2}\pi\sigma)$ für $\alpha = 0$ endliche Werthe haben, und das Integral $\int_0^\varepsilon \alpha^{\sigma-1}\partial\alpha = \frac{\varepsilon^\sigma}{\sigma}$ ist, indem σ positiv vorausgesetzt ist, so mufs auch das Integral $\int_0^\varepsilon \sin(k\alpha - \frac{1}{2}\pi\sigma)\frac{e^{-x\alpha}-e^{-(1-x)\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha$ einer endlichen Gröfse gleich sein. Dafs aber das Integral

$$\int_\varepsilon^\infty \sin(k\alpha - \tfrac{1}{2}\pi\sigma)\frac{e^{-x\alpha}-e^{-(1-x)\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha$$

einen festen Werth hat, folgt aus denselben Gründen, wie die gleiche Behauptung für das zwischen denselben Grenzen genommene obige Integral. Nimmt man jetzt alles zusammen, so ergiebt sich, dafs die Reihe $F(v, x, k, \sigma)$ stets eine Summe hat, wenn v nicht gleich Null oder einer ganzen Zahl ist, und dafs in diesem besondern Falle zwar der imaginäre Theil derselben für jedes positive σ, der reelle Theil aber nur unter der Bedingung convergirt, dafs $\sigma \geqq 1$ sei. Dies Resultat ist unter der Voraussetzung abgeleitet, dafs $0 < x < 1$ ist; es hat indefs keine Schwierigkeit, dasselbe für jedes reelle x nachzuweisen. Denn welchen Werth x auch habe, immer läfst sich eine positive ganze Zahl m von der Beschaffenheit angeben, dafs für $n \geqq m$ die Gröfsen $(n+x)$ und

$(n-x)$ positiv sind. Dann gestattet die Reihe, vom $(m+1)$ten Gliede an genommen, dieselbe Behandlung wie oben, und wird durch ein Integral ausgedrückt, das genau dieselben Eigenschaften besitzt als das untersuchte. Die Convergenz der Reihe hängt aber von diesem Integral ab, da die Summe der m ersten Glieder eine endliche Gröfse ist; denn keines derselben kann unendlich grofs werden, so lange k positiv ist, und ihre Anzahl ist eine endliche.

Uebersieht man die Darstellung der Function $F(v, x, k, \sigma)$ durch ein bestimmtes Integral, so tritt hervor, dafs wenn $e^{2\pi v\sqrt{-1}}$ nicht $=1$, oder in diesem Fall, wenn $\sigma > 1$ ist, die Reihen $\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{2n\pi v\sqrt{-1}}}{(k+(n+x)\sqrt{-1})^\sigma}$ und $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{-2n\pi v\sqrt{-1}}}{(k+(-n+x)\sqrt{-1})^\sigma}$ convergiren, und die Reihe $F(v, x, k, \sigma)$ als die Summe derselben angesehen werden kann. Dies darf dagegen nicht geschehen, wenn $e^{2\pi v\sqrt{-1}} = 1$ und $\sigma \leqq 1$ ist; denn für $\sigma = 1$ haben nur noch die reellen Theile, für $\sigma < 1$ weder die reellen noch die imaginären Theile jener beiden Reihen eine Bedeutung.

§. 2.

Die *Euler*sche Formel, welche benutzt wurde, um die Reihe $F(v,x,k,\sigma)$ in ein bestimmtes Integral zu verwandeln, wird jetzt dazu dienen, dieselbe in andrer Weise umzuformen. Da k positiv ist, so hat man im allgemeinen Gliede für jeden Werth von x

$$\frac{1}{(k+(n+x)\sqrt{-1})^\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty e^{-(k+(n+x)\sqrt{-1})\alpha}\,\alpha^{\sigma-1}\,\partial\alpha,$$

$$\frac{1}{(k+(-n+x)\sqrt{-1})^\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty e^{-(k+(-n+x)\sqrt{-1})\alpha}\,\alpha^{\sigma-1}\,\partial\alpha,$$

folglich

$$(3.)\qquad F(r,x,k,\sigma)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty e^{-(k+x\sqrt{-1})\alpha}\,\alpha^{\sigma-1}\,\partial\alpha$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^\infty e^{-(k+x\sqrt{-1})\alpha}\,\alpha^{\sigma-1}\left\{e^{n(2\pi v-\alpha)\sqrt{-1}}+e^{-n(2\pi v-\alpha)\sqrt{-1}}\right\}\partial\alpha$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty e^{-k\alpha}\cos x\alpha\,\alpha^{\sigma-1}\,\partial\alpha + \frac{2}{\Gamma(\sigma)}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^\infty e^{-k\alpha}\cos x\alpha\,\alpha^{\sigma-1}\cos n(2\pi v-\alpha)\,\partial\alpha$$

$$-\frac{\sqrt{-1}}{\Gamma(\sigma)}\left\{\int_0^\infty e^{-k\alpha}\sin x\alpha\,\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^\infty e^{-k\alpha}\sin x\alpha\,\alpha^{\sigma-1}\cos n(2\pi v-\alpha)\partial\alpha\right\}.$$

Die Reihen, welche hier den reellen und imaginären Theil der Function $F(v, x, k, \sigma)$ darstellen, sind in der Form

$$(4.)\quad \int_0^\infty f(\alpha)\,\partial\alpha + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^\infty f(\alpha)\cos n(z-\alpha)\,\partial\alpha = \varphi(z)$$

enthalten, die sich von der sogenannten ***Fourier***schen Reihe nur durch die Ausdehnung der Integrale unterscheidet. Mit Hülfe von Sätzen, welche ***Dirichlet*** in seiner Untersuchung „Sur la convergence des séries trigonométriques etc." (dieses Journal Bd. IV. p. 157) begründet hat, wird nun gezeigt werden, dafs die Reihe (4.) gleich einer Summe von unendlich vielen aequidistanten Werthen der Function $f(\alpha)$, mit einem constanten Factor multiplicirt, ist, die nothwendig convergirt, wenn, wie in unserm Falle, die Reihe (4.) convergent ist.

Addirt man die $(n+1)$ ersten Glieder dieser Reihe, so kommt

$$(5.)\quad \int_0^\infty f(\alpha)\,\partial\alpha + 2\int_0^\infty f(\alpha)\cos(z-\alpha)\,\partial\alpha + \cdots + 2\int_0^\infty f(\alpha)\cos n(z-\alpha)\,\partial\alpha = \int_0^\infty f(\alpha)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(z-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(z-\alpha)}\,\partial\alpha,$$

und man erhält die Summe der Reihe, indem man den Grenzwerth sucht, dem sich dieses Integral für ein über jede Grenze wachsendes n nähert. Da die Reihe für Werthe von z, die um ein Vielfaches von 2π verschieden sind, dieselbe ist, so wird angenommen, dafs $0 \leqq z < 2\pi$ sei. Es bezeichne nun $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ eine Reihe von Gröfsen, die den Ungleichheiten

$$z < a_1 < z + 2\pi < a_2 < z + 4\pi \ldots$$

genügen, und werde das Integral, welches die rechte Seite der Gleichung (5.) bildet, in eine unendliche Anzahl von Integralen getheilt, die sich von 0 bis z, von z bis a_1, von a_1 bis $z+2\pi$, u. s. f. erstrecken.

Macht man in denselben respective die Substitutionen

$$\alpha = z - 2\beta,\quad \alpha = z + 2\beta,\quad \alpha = z + 2\pi - 2\beta,\quad \alpha = z + 2\pi + 2\beta,\quad \ldots,$$

so nehmen sie diese Gestalt an:

$$(6.)\quad 2\int_0^{\frac{1}{2}z} f(z-2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,\partial\beta, \qquad 2\int_0^{\frac{1}{2}(a_1-z)} f(z+2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,\partial\beta,$$

$$2\int_0^{\frac{1}{2}(z+2\pi-a_1)} f(z+2\pi-2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,\partial\beta, \qquad 2\int_0^{\frac{1}{2}(a_2-z-2\pi)} f(z+2\pi+2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,\partial\beta,$$

wo die Integrationen sämmtlich von 0 bis zu einem positiven Werth gehn, der kleiner ist als π. Bezeichnet man einen solchen allgemein durch l, so folgt aus den Principien der angeführten Abhandlung, dafs, wenn $\psi(\beta)$ eine Function von der Beschaffenheit ist, dafs das Integral $\int_0^\beta \psi(\beta)\,\partial\beta = \Psi(\beta)$ von $\beta = 0$ bis $\beta = l$ stetig und endlich bleibt, das Integral $\int_0^l \psi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,\partial\beta$, wenn

n ohne Ende wächst, den Werth $\frac{1}{2}\pi\psi(0)$ zur Grenze hat (Cf. *Dirichlet* „sur les séries, dont le terme général dépend de deux angles" etc. dieses Journal Bd. XVII, p. 54). Daher geht das erste der Integrale (6.), wenn z nicht Null ist, für $n=\infty$ in $\pi f(z)$ über, während es, wenn z Null ist, durch Zusammenfallen der Grenzen verschwindet; es wird ferner, ohne die Voraussetzung $z=0$ auszuschliefsen, das zweite $=\pi f(z)$, das dritte $=\pi f(z+2\pi)$, das vierte $=\pi f(z+4\pi)$, u. s. f. So entstehen für die Reihe (4.) diese Gleichungen

$$(7.)\quad \begin{cases} \varphi(z) = 2\pi \sum_{s=0}^{s=\infty} f(z+2s\pi), & 0<z<2\pi, \\ \varphi(0) = \pi f(0) + 2\pi \sum_{s=1}^{s=\infty} f(2s\pi). \end{cases}$$

Um nun eine Anwendung auf die Gleichung (3.) zu machen, setze man nach einander $f\alpha = e^{-k\alpha}\cos x\alpha\,\alpha^{\sigma-1}$, $f\alpha = e^{-k\alpha}\sin x\alpha\,\alpha^{\sigma-1}$, und $z=2\pi v$, wo $0<v<1$ ist, so kommt

$$(8.)\quad \int_0^\infty e^{-k\alpha}\cos x\alpha\,\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^\infty e^{-k\alpha}\cos x\alpha\,\alpha^{\sigma-1}\cos n(2\pi v-\alpha)\,\partial\alpha$$
$$= 2\pi \sum_{s=0}^{s=\infty} e^{-k(2\pi v+2\pi s)}\cos x(2\pi v+2\pi s).(2\pi v+2\pi s)^{\sigma-1},$$

$$(9.)\quad \int_0^\infty e^{-k\alpha}\sin x\alpha\,\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^\infty e^{-k\alpha}\sin x\alpha\,\alpha^{\sigma-1}\cos n(2\pi v-\alpha)\,\partial\alpha$$
$$= 2\pi \sum_{s=0}^{s=\infty} e^{-k(2\pi v+2\pi s)}\sin x(2\pi v+2\pi s).(2\pi v+2\pi s)^{\sigma-1}.$$

Für den Fall, dafs $v=0$ ist, bemerke man, dafs die Function $e^{-k\alpha}\cos x\alpha\,\alpha^{\sigma-1}$, wenn $\alpha=0$, $\sigma>1$ ist, verschwindet, wenn $\alpha=0$, $\sigma=1$ ist, den Werth 1 hat, während die Function $e^{-k\alpha}\sin x\alpha\,\alpha^{\sigma-1}$, wenn $\alpha=0$, für jeden vorkommenden d. h. positiven Werth von σ, gleich Null wird. Da nun die Reihen, welche die rechte Seite der Gleichungen (8.) und (9.) zeigt, als der reelle und imaginäre Theil derselben Reihe aufgefafst werden können, so kann man diese in der folgenden vereinigen

$$(10.)\quad F(v,x,k,\sigma) = \frac{2\pi}{I\sigma}\sum_{s=0}^{s=\infty} e^{-(2\pi s+2\pi v)(k+x\sqrt{-1})}(2\pi s+2\pi v)^{\sigma-1},$$

wo $0<v<1$, und für $v=0$, $\sigma>1$ vorausgesetzt wird. Für $v=0$, $\sigma=1$ hat man dagegen

$$(10.^*)\quad F(0,x,k,1) = \pi + 2\pi\sum_{s=1}^{s=\infty} e^{-2\pi s(k+x\sqrt{-1})}.$$

Wird in der Gleichung (10.) für v die Gröfse $1-v$ gesetzt, wo jetzt

$0 < v < 1$, und für $v = 1$, $\sigma > 1$ sein mufs, so kommt, da $F(1-v, x, k, \sigma) = F(-v, x, k, \sigma)$ ist, die in der Folge anzuwendende Gleichung

$$(11.) \quad F(-v, x, k, \sigma) = \frac{2\pi}{\Gamma\sigma} \sum_{s=1}^{s=\infty} e^{-(2\pi s - 2\pi v)(k+x\sqrt{-1})} (2\pi s - 2\pi v)^{\sigma-1}.$$

§. 3.

Die im vorigen Paragraphen ausgeführte Transformation der Reihe $F(v, x, k, \sigma)$ liefert ein Mittel, ihre Summe, wenn σ eine ganze Zahl ist, durch einen endlichen Ausdruck darzustellen. Es sei $\sigma = 1$: dann gehen die umgeformten Reihen (10.), (10.*), (11.) in geometrische Reihen über, bei denen der analytische Modul des Exponenten $e^{-2\pi k} < 1$ ist. Die ausgeführte Summation giebt die Gleichungen

$$(12.) \quad F(v, x, k, 1) = 2\pi \frac{e^{-2\pi v(k+x\sqrt{-1})}}{1 - e^{-2\pi(k+x\sqrt{-1})}},$$

$$(12.^*) \quad F(0, x, k, 1) = -\pi + 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\pi(k+x\sqrt{-1})}} = \pi \frac{1 + e^{-2\pi(k+x\sqrt{-1})}}{1 - e^{-2\pi(k+x\sqrt{-1})}},$$

$$(13.) \quad F(-v, x, k, 1) = 2\pi \frac{e^{-2\pi(1-v)(k+x\sqrt{-1})}}{1 - e^{-2\pi(k+x\sqrt{-1})}},$$

von denen mehrere besondre Fälle im 9ten Capitel der „Introductio in Analysin" von *Euler* aufgestellt sind. Ist aber σ eine andre ganze Zahl als die Einheit, so wird die rechte Seite der Gleichungen (10.) und (11.) der $(\sigma-1)$te Differentialquotient der Reihe für $\sigma = 1$ nach k, und zwar positiv oder negativ genommen, je nachdem σ ungerade oder gerade ist. Offenbar bedarf es hier nicht der Unterscheidung von $v > 0$ und $v = 0$, und man hat demnach unter der Einen Bedingung, dafs $v < 1$ sei:

$$(14.) \quad F(v, x, k, \sigma) = (-1)^{\sigma-1} \frac{2\pi}{\Gamma\sigma} \frac{\partial^{\sigma-1} \frac{e^{-2\pi v(k+x\sqrt{-1})}}{1 - e^{-2\pi(k+x\sqrt{-1})}}}{\partial k^{\sigma-1}},$$

$$(15.) \quad F(-v, x, k, \sigma) = (-1)^{\sigma-1} \frac{2\pi}{\Gamma\sigma} \frac{\partial^{\sigma-1} \frac{e^{-2\pi(1-v)(k+x\sqrt{-1})}}{1 - e^{-2\pi(k+x\sqrt{-1})}}}{\partial k^{\sigma-1}}.$$

Nun erhält man die Summenausdrücke für einige einfache Reihen, wenn man die Gleichungen (12.) und (13.), (14.) und (15.) durch Addition oder Subtraction verbindet. Diejenigen, welche $\sigma = 1$ entsprechen, sind die folgenden:

$$(16.) \quad \frac{F(v, x, k, 1) + F(-v, x, k, 1)}{2}$$

$$= \frac{1}{k+x\sqrt{-1}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \cos 2n\pi v \left(\frac{1}{k+(n+x)\sqrt{-1}} + \frac{1}{k+(-n+x)\sqrt{-1}} \right)$$

$$= \pi \frac{e^{-2\pi v(k+x\sqrt{-1})} + e^{-2\pi(1-v)(k+x\sqrt{-1})}}{1 - e^{-2\pi(k+x\sqrt{-1})}},$$

$$(17.)\quad \frac{F(v,x,k,1)-F(-v,x,k,1)}{2\sqrt{-1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\sin 2n\pi v\left(\frac{1}{k+(n+x)\sqrt{-1}}-\frac{1}{k+(-n+x)\sqrt{-1}}\right)$$
$$=\pi\frac{e^{-2\pi v(k+x\sqrt{-1})}-e^{-2\pi(1-v)(k+x\sqrt{-1})}}{1-e^{-2\pi(k+x\sqrt{-1})}},$$

von denen die erste für $v=0$ mit der Gleichung (12.*) zusammenfällt und daher für jedes $v<1$ gilt, die zweite aber nur für $0<v<1$ richtig ist. Sondert man hier das Reelle vom Imaginären, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$(18.)\quad \frac{k}{k^2+x^2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos 2n\pi v\left\{\frac{k}{k^2+(n+x)^2}+\frac{k}{k^2+(n-x)^2}\right\}$$
$$=\pi\frac{(e^{2\pi(1-v)k}-e^{-2\pi(1-v)k})\cos 2\pi vx+(e^{2\pi vk}-e^{-2\pi vk})\cos 2\pi(1-v)x}{e^{2\pi k}-2\cos 2\pi x+e^{-2\pi k}},$$

$$(19.)\quad \frac{x}{k^2+x^2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos 2n\pi v\left(\frac{n+x}{k^2+(n+x)^2}-\frac{n-x}{k^2+(n-x)^2}\right)$$
$$=\pi\frac{(e^{2\pi(1-v)k}+e^{-2\pi(1-v)k})\sin 2\pi vx+(e^{2\pi vk}+e^{-2\pi vk})\sin 2\pi(1-v)x}{e^{2\pi k}-2\cos 2\pi x+e^{-2\pi k}},$$

$$(20.)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\sin 2n\pi v\left(\frac{n+x}{k^2+(n+x)^2}+\frac{n-x}{k^2+(n-x)^2}\right)$$
$$=\pi\frac{(e^{2\pi(1-v)k}+e^{-2\pi(1-v)k})\cos 2\pi vx-(e^{2\pi vk}+e^{-2\pi vk})\cos 2\pi(1-v)x}{e^{2\pi k}-2\cos 2\pi x+e^{-2\pi k}},$$

$$(21.)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\sin 2n\pi v\left(\frac{k}{k^2+(n+x)^2}-\frac{k}{k^2+(n-x)^2}\right)$$
$$=\pi\frac{-(e^{2\pi(1-v)k}-e^{-2\pi(1-v)k})\sin 2\pi vx+(e^{2\pi vk}-e^{-2\pi vk})\sin 2\pi(1-v)x}{e^{2\pi k}-2\cos 2\pi x+e^{-2\pi k}}.$$

§. 4.

Wir haben bisher das Element k der Reihe $F(v,x,k,\sigma)$ positiv vorausgesetzt; es entsteht nun die Frage, wie sich dieselbe verhält, wenn k abnehmend in die Null übergeht. Aus der Definition, welche von den Potenzen der imaginären Ausdrücke gegeben ist, folgt, dafs der Term $(k+\theta\sqrt{-1})^\sigma$, wenn k abnehmend sich der Null nähert, entweder $(\theta^2)^{\frac{1}{2}\sigma}e^{\frac{1}{2}\pi\sigma}$ oder $(\theta^2)^{\frac{1}{2}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\pi\sigma}$ zur Grenze hat, je nachdem θ positiv oder negativ ist, und dieses Gesetz bestimmt die einzelnen Glieder unsrer Reihe.

Um zuerst ihre Convergenz zu untersuchen, bezeichne man durch m die kleinste ganze Zahl, welche die Eigenschaft hat, dafs für $n\geqq m$ die Grösen $(n+x)$ und $(n-x)$ positiv sind, dann wird die Summe der Reihe

vom $(m+1)$ten Gliede ab die folgende

$$(22.) \quad \sum_{n=m}^{n=\infty} \left(\frac{e^{2n\pi v\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}}{(n+x)^\sigma} + \frac{e^{-2n\pi v\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}}{(n-x)^\sigma} \right),$$

die durch Anwendung der *Euler*schen Integrale in dieses bestimmte Integral verwandelt wird

$$(23.) \quad \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-(m+x)\alpha+2m\pi v\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}}{1-e^{-\alpha+2\pi v\sqrt{-1}}} + \frac{e^{-(m-x)\alpha-2m\pi v\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}}{1-e^{-\alpha-2\pi v\sqrt{-1}}} \right) \alpha^{\sigma-1}\partial\alpha.$$

Dasselbe ist dem Integral der Gleichung (2.) ähnlich gebildet, und besitzt auch denselben Character: der imaginäre Theil hat stets einen endlichen Werth, der reelle Theil ist endlich, mit Ausnahme des Falls, dafs $e^{2\pi v\sqrt{-1}} = 1$ und gleichzeitig $\sigma \leqq 1$ ist. Was aber die m ersten Glieder der Reihe betrifft, so kann keines derselben unendlich werden, wenn x weder gleich Null noch gleich einer ganzen positiven oder negativen Zahl ist. Dagegen ist klar, dafs unter dieser Voraussetzung in Einem Gliede der Nenner gleich Null, folglich das Glied selbst unendlich grofs wird, wenn k die Grenze Null erreicht. Es unterscheidet sich also die Reihe $F(v, x, 0, \sigma)$ in Bezug auf Convergenz nur dadurch von der Reihe $F(v, x, k, \sigma)$, dafs in der erstern x weder gleich Null, noch gleich einer ganzen Zahl sein darf.

Es läfst sich ferner zeigen, dafs die Function $F(v, x, k, \sigma)$ beim stetigen Uebergange von einem positiven Werth von k zu dem Werth $k = 0$ sich gleichfalls stetig ändert. Dies folgt nicht aus der Stetigkeit der Glieder der Reihe, wohl aber aus dem Umstande, dafs ihre sämmtlichen Differentialquotienten, nach dem Element k genommen, unter denselben Bedingungen als die Reihe selbst endlich bleiben, wenn in denselben $k = 0$ gesetzt wird. Differentiirt man nämlich die Reihe $F(v, x, k, \sigma)$ nach k, so entsteht

$$\frac{\partial F(v, x, k, \sigma)}{\partial k} = -\sigma F(v, x, k, \sigma+1),$$

mithin eine Reihe, in der die Elemente v, x, k ungeändert bleiben, und nur für σ der Werth $\sigma+1$ kommt. Die sämmtlichen Differentialquotienten der Reihe $F(v, x, k, \sigma)$ nach k genommen, sind also Reihen derselben Form, in denen nur das vierte Element verschiedene, aber nothwendig positive Werthe hat. Hiedurch wird die aufgestellte Behauptung erwiesen.

Um endlich zu beurtheilen, in wie weit die Umformung des §. 2. ihre Anwendbarkeit behält, wenn das Element k verschwindet, ist zu beachten, dafs dieselbe auf der *Euler*schen Formel

$$\frac{1}{(k+(\pm n+x)\sqrt{-1})^{\sigma}} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^{\infty} e^{-(k+(\pm n+x)\sqrt{-1})\alpha}\,\alpha^{\sigma-1}\,\partial\alpha$$

beruht. Bekanntlich gilt dieselbe für ein gegen die Null abnehmendes k nur, wenn $\sigma<1$ ist; der Werth der linken Seite bestimmt sich nach der obigen Definition, während auf der rechten $k=0$ zu setzen ist. Daher ist jetzt die Umformung nur unter der Bedingung gestattet, dafs $\sigma<1$ ist; es ergeben sich ferner die Beschränkungen, dafs x weder Null noch eine ganze Zahl, und dafs für den reellen Theil der Reihe $0<v<1$, für den imaginären $0\leqq v<1$ sei: dann aber gilt die Gleichung

$$(24.)\qquad F(v,x,0,\sigma) = \frac{(2\pi)^{\sigma}}{\Gamma(\sigma)}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{e^{-(2\pi s+2\pi v)x\sqrt{-1}}}{(s+v)^{1-\sigma}}.$$

Um aus derselben einige Folgerungen zu ziehen, werde vorausgesetzt, dafs $0<v<1$, $0<x<1$ sei, dann läfst sich $F(v,x,0,\sigma)$ als die Summe von zwei Reihen von sehr einfacher Gestalt ansehn, und es ist

$$(25.)\qquad F(v,x,0,\sigma) = e^{-\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{e^{2n\pi v\sqrt{-1}}}{(n+x)^{\sigma}} + e^{\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{-2n\pi v\sqrt{-1}}}{(n-x)^{\sigma}}$$

$$= \frac{(2\pi)^{\sigma}e^{-2\pi vx\sqrt{-1}}}{\Gamma(\sigma)}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{e^{-2s\pi x\sqrt{-1}}}{(s+v)^{1-\sigma}},$$

$$(26.)\qquad F(-v,x,0,\sigma) = e^{-\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{e^{-2n\pi v\sqrt{-1}}}{(n+x)^{\sigma}} + e^{\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{2n\pi v\sqrt{-1}}}{(n-x)^{\sigma}}$$

$$= \frac{(2\pi)^{\sigma}e^{2\pi vx\sqrt{-1}}}{\Gamma(\sigma)}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{e^{-2s\pi x\sqrt{-1}}}{(s-v)^{1-\sigma}}.$$

Addirt man die letzten beiden Gleichungen, so kommt

$$(27.)\qquad e^{-\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\cos 2n\pi v}{(n+x)^{\sigma}} + e^{\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos 2n\pi v}{(n-x)^{\sigma}}$$

$$= \frac{(2\pi)^{\sigma}}{2\Gamma(\sigma)}\left\{e^{-2\pi vx\sqrt{-1}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{e^{-2s\pi x\sqrt{-1}}}{(s+v)^{1-\sigma}} + e^{2\pi vx\sqrt{-1}}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{e^{-2s\pi x\sqrt{-1}}}{(s-v)^{1-\sigma}}\right\},$$

und subtrahirt man (26.) von (25.), so entsteht

$$(28.)\qquad e^{-\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin 2n\pi v}{(n+x)^{\sigma}} - e^{\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin 2n\pi v}{(n-x)^{\sigma}} =$$

$$\frac{(2\pi)^{\sigma}}{2\Gamma(\sigma)\sqrt{-1}}\left\{e^{-2\pi vx\sqrt{-1}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{e^{-2s\pi x\sqrt{-1}}}{(s+v)^{1-\sigma}} - e^{2\pi vx\sqrt{-1}}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{e^{-2s\pi x\sqrt{-1}}}{(s-v)^{1-\sigma}}\right\}.$$

Die Sonderung des Reellen und Imaginären zeigt auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens Reihen von derselben Form; führt man die Bezeichnung ein

$$\varphi_1(v, x, \sigma) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\cos 2n\pi v}{(n+x)^\sigma} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\cos 2n\pi v}{(n-x)^\sigma},$$

$$\varphi_2(v, x, \sigma) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\cos 2n\pi v}{(n+x)^\sigma} - \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\cos 2n\pi v}{(n-x)^\sigma},$$

$$\varphi_3(v, x, \sigma) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2n\pi v}{(n+x)^\sigma} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2n\pi v}{(n-x)^\sigma},$$

$$\varphi_4(v, x, \sigma) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2n\pi v}{(n+x)^\sigma} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2n\pi v}{(n-x)^\sigma},$$

so stellen sich jene Gleichungen dar, wie folgt:

(29.) $\varphi_1(v, x, \sigma)$

$$= \frac{(2\pi)^\sigma}{2\cos\frac{1}{2}\pi\sigma\,\Gamma(\sigma)}\{\cos 2\pi vx\,\varphi_1(x, v, 1-\sigma) + \sin 2\pi vx\,\varphi_4(x, v, 1-\sigma)\},$$

(30.) $\varphi_2(v, x, \sigma)$

$$= \frac{(2\pi)^\sigma}{2\sin\frac{1}{2}\pi\sigma\,\Gamma(\sigma)}\{\cos 2\pi vx\,\varphi_3(x, v, 1-\sigma) + \sin 2\pi vx\,\varphi_2(x, v, 1-\sigma)\},$$

(31.) $\varphi_3(v, x, \sigma)$

$$= \frac{(2\pi)^\sigma}{2\sin\frac{1}{2}\pi\sigma\,\Gamma(\sigma)}\{\cos 2\pi vx\,\varphi_2(x, v, 1-\sigma) - \sin 2\pi vx\,\varphi_3(x, v, 1-\sigma)\},$$

(32.) $\varphi_4(v, x, \sigma)$

$$= \frac{(2\pi)^\sigma}{2\cos\frac{1}{2}\pi\sigma\,\Gamma(\sigma)}\{-\cos 2\pi vx\,\varphi_4(x, v, 1-\sigma) + \sin 2\pi vx\,\varphi_1(x, v, 1-\sigma)\}.$$

Aus denselben erhellt, dafs die Reihen $\varphi_1(v, x, \sigma)$ und $\varphi_4(v, x, \sigma)$ lineare Functionen der Reihen $\varphi_1(x, v, 1-\sigma)$ und $\varphi_4(x, v, 1-\sigma)$ sind, und ebenso die Reihen $\varphi_2(v, x, \sigma)$ und $\varphi_3(v, x, \sigma)$ von den Reihen $\varphi_2(x, v, 1-\sigma)$ und $\varphi_3(x, v, 1-\sigma)$. Uebrigens ist die Gleichung (32.) eine Folge der Gleichung (29.), und umgekehrt, und ebenso hängen die beiden Gleichungen (30.) und (31.) von einander ab. Setzt man z. B. in die Gleichung (29.) für v, x, σ respective die Werthe x, v, $1-\sigma$, so kommen auf der rechten Seite die Functionen $\varphi_1(v, x, \sigma)$ und $\varphi_4(v, x, \sigma)$, und die Elimination der Function $\varphi_1(v, x, \sigma)$ aus dieser Gleichung und der ursprünglichen giebt die Gleichung (32.), indem man bemerkt, dafs nach bekannten Eigenschaften der Γ-Functionen

$$\frac{(2\pi)^\sigma}{2\cos\frac{1}{2}\pi\sigma\,\Gamma(\sigma)} \cdot \frac{(2\pi)^{1-\sigma}}{2\cos\{\frac{1}{2}\pi(1-\sigma)\}\,\Gamma(1-\sigma)} = 1$$

ist. Erhebt man die vier Gleichungen auf's Quadrat, und addirt die erste und vierte, die zweite und dritte, so erhält man Relationen, in denen die trigonometrischen Functionen $\cos 2\pi vx$ und $\sin 2\pi vx$ nicht mehr vorkommen,

$$(33.)\qquad \varphi_1^2(v,x,\sigma)+\varphi_4^2(v,x,\sigma)$$
$$=\frac{(2\pi)^{2\sigma}}{4\cos^2\frac{1}{2}\pi\sigma(\Gamma\sigma)^2}\{\varphi_1^2(x,v,1-\sigma)+\varphi_4^2(x,v,1-\sigma)\},$$
$$(34.)\qquad \varphi_2^2(v,x,\sigma)+\varphi_3^2(v,x,\sigma)$$
$$=\frac{(2\pi)^{2\sigma}}{4\sin^2\frac{1}{2}\pi\sigma(\Gamma\sigma)^2}\{\varphi_2^2(x,v,1-\sigma)+\varphi_3^2(x,v,1-\sigma)\}.$$

§. 5.

Wir haben bemerkt, dafs die Umformung der Reihe $F(v,x,0,\sigma)$, deren Resultat durch die Gleichung (24.) dargestellt wird, nur unter der Voraussetzung ausgeführt werden darf, dafs $\sigma<1$ ist, während die Reihe selbst für jedes σ convergirt. Nun verliert allerdings die rechte Seite der Gleichung (24.) jede Bedeutung für $\sigma\geqq 1$, man kann indessen den Werth der Reihe $F(v,x,0,\sigma)$ in dem Fall, dafs σ eine ganze Zahl ist, in geschlossener Form angeben. Dies geschieht auf folgende Weise: Die Gleichungen (12.) und (13.)

$$F(v,x,k,1)=2\pi\frac{e^{-2\pi v(k+x\sqrt{-1})}}{1-e^{-2\pi(k+x\sqrt{-1})}},$$
$$F(v,x,k,\sigma)=(-1)^{\sigma-1}\frac{2\pi}{\Gamma(\sigma)}\frac{\partial^{(\sigma-1)}\frac{e^{-2\pi v(k+x\sqrt{-1})}}{1-e^{-2\pi(k+x\sqrt{-1})}}}{\partial k^{\sigma-1}},$$

wo σ eine ganze Zahl ist, welche gröfser als Eins, gelten für jeden positiven Werth von k. Da nun oben gezeigt ist, dafs die Function $F(v,x,k,\sigma)$, wenn x nicht gleich Null oder einer ganzen Zahl ist, während das Element k sich abnehmend der Null nähert und dieser gleich wird, endlich und stetig bleibt; da ferner von der rechten Seite der Gleichungen (12.) und (13.) dasselbe gilt, wie der Anblick derselben lehrt, so müssen diese Gleichungen noch richtig sein, wenn in ihnen $k=0$ wird. So hat man

$$(35.)\qquad F(v,x,0,1)=2\pi\frac{e^{-2\pi vx\sqrt{-1}}}{1-e^{-2\pi x\sqrt{-1}}},$$
$$(36.)\qquad F(v,x,0,\sigma)=(-1)^{\sigma-1}\frac{2\pi}{\Gamma(\sigma)}\frac{\partial^{\sigma-1}\frac{e^{-2\pi v(k+x\sqrt{-1})}}{1-e^{-2\pi(k+x\sqrt{-1})}}}{\partial k^{\sigma-1}},$$

wo in der zweiten Gleichung nach ausgeführter Differentiation $k=0$ zu setzen ist.

Macht man in den Gleichungen (19.) und (20.) $k=0$, was jetzt ohne Zweifel gestattet ist, so entsteht unter der Voraussetzung, dafs x weder Null noch eine ganze Zahl ist,

$$(37.)\quad \frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos 2n\pi v\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n-x}\right)=\frac{\pi\cos(1-2v)\pi x}{\sin\pi x},$$

$$(38.)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\sin 2n\pi v\left(\frac{1}{n+x}+\frac{1}{n-x}\right)=\frac{\pi\sin(1-2v)\pi x}{\sin\pi x},$$

und man kann die zweite dieser Gleichungen benutzen, um die Summen der *Euler*'schen Reihen zu finden, von denen in der Einleitung gesprochen ist. Nimmt man an, dafs x ein positiver echter Bruch ist, dann läfst sich das allgemeine Glied der Reihe $\sum_{n=1}^{n=\infty}\sin 2n\pi v\left(\frac{1}{n+x}+\frac{1}{n-x}\right)=\psi(x)$ nach steigenden Potenzen von x entwickeln. Setzt man der Kürze wegen $2\pi v=u$, und ordnet die Glieder der Reihe nach Potenzen von x, so nimmt sie diese Gestalt an

$$(39.)\quad \psi(x)=2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nu}{n}+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nu}{n^3}x^2+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nu}{n^5}x^4+\cdots$$
$$=\pi\frac{\sin(\pi-u)x}{\sin\pi x}.$$

Es ist nun klar, dafs die sämmtlichen Differentialquotienten der Function $\psi(x)$ nach x, und die Function $\psi(x)$ selbst, wenn man in denselben $x=0$ setzt, endliche Gröfsen bleiben; denn man hat

$$\psi(0)=2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nu}{n},\qquad \psi'(0)=0,$$

$$\frac{\psi''(0)}{1.2}=2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nu}{n^3},\qquad \psi'''(0)=0,\qquad \text{u. s. w.}$$

und die Convergenz dieser Reihen ist oben bewiesen. Daher ist die Function $\psi(x)$, während x abnimmt und Null wird, endlich und stetig; und da der Bruch $\pi\frac{\sin(\pi-u)x}{\sin\pi x}$ dieselbe Eigenschaft hat, so gilt die Gleichung

$$(40.)\quad \psi(x)=\pi\frac{\sin(\pi-u)x}{\sin\pi x}$$

mit Einschlufs des Werthes $x=0$. Hieraus ergiebt sich zunächst, indem man x sich der Null nähern läfst, da der Sinus für ein unendlich kleines Argument gleich dem Bogen wird,

$$(41.)\quad \psi(0)=\pi\frac{\lim.\sin(\pi-u)x}{\lim.\sin\pi x}=\pi-u.$$

Multiplicirt man die Gleichung (40.) mit $\sin\pi x$, und bildet den zweiten Differentialquotienten nach x, so kommt

$$\sin\pi x.\psi''(x)+2\pi\cos\pi x.\psi'(x)-\pi^2\sin\pi x.\psi(x)=-\pi(\pi-u)^2\sin(\pi-u)x,$$

und dividirt man auf beiden Seiten durch $\sin\pi x$, und läfst x gegen die Null abnehmen, so geht $\cos\pi x$ in die Einheit, $\sin\pi x$ in πx, $\frac{\psi'(x)}{x}$ in $\psi''(0)$ über, und es entsteht

$$(42.) \quad (1+2)\psi''(0)-\pi^2\psi(0) = -(\pi-u)^3.$$

Auf gleiche Weise folgt aus dem vierten Differentialquotienten der mit $\sin\pi x$ multiplicirten Gleichung (40.) die Bestimmung von $\psi^{IV}(0)$

$$(43.) \quad (1+4)\psi^{IV}(0)-(6+4)\pi^2\psi''(0)+\pi^4\psi(0) = (\pi-u)^5,$$

und man erkennt das Gesetz der Gleichungen, durch welche die Gröfsen $\psi(0)$, $\psi''(0)$, $\psi^{IV}(0)$, ... oder respective die Summen der Reihen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nu}{n}, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nu}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nu}{n^5}, \quad \ldots$$

successive erhalten werden. Als Werthe derselben resultiren die ganzen algebraischen Functionen von u, welche ***Euler*** angegeben hat; und die Summen der Reihen $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos nu}{n^{2\mu}}$, wo μ eine ganze Zahl bedeutet, entstehn durch Differentiation der Ausdrücke für die Reihen $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nu}{n^{2\mu+1}}$ nach der Veränderlichen u.

Anmerkung. Es ist in §. 4 bemerkt worden, dafs die Summe der Reihe, wenn x gleich Null oder einer ganzen Zahl ist, durch Abnehmen des Elements k bis zur Null unendlich grofs wird, weil ein Glied derselben dann über jede Grenze wächst. Sei h, eine positive ganze Zahl, gleich x, so enthält das Glied $\frac{e^{2h\pi v\sqrt{-1}}}{(k+2h\sqrt{-1})^\sigma}+\frac{e^{-2h\pi v\sqrt{-1}}}{k^\sigma}$ im Allgemeinen sowohl eine reelle als eine imaginäre unendliche Gröfse, wenn k sich der Null nähert. Hat jedoch v einen solchen Werth, dafs entweder $\cos 2h\pi v$ oder $\sin 2h\pi v$ gleich Null ist, so giebt $\frac{e^{-2h\pi v\sqrt{-1}}}{k^\sigma}$ respective etwas nur imaginäres, oder nur reelles unendlich Grofses, so dafs im ersten Falle der reelle, im zweiten der imaginäre Theil der Reihe endlich bleibt. Es läfst sich nun beweisen, dafs dieser endliche Theil der Reihe stets die Summe Null hat. Man hat

$$\sum_{n=0}^{n=h}\frac{e^{2n\pi v\sqrt{-1}}}{\{(n+h)\sqrt{-1}\}^\sigma} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty \frac{e^{-h\alpha}-e^{-(2h+1)\alpha+2(h+1)\pi v\sqrt{-1}}}{1-e^{-\alpha+2\pi v\sqrt{-1}}}\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha,$$

$$\sum_{n=1}^{n=h-1}\frac{e^{-2n\pi v\sqrt{-1}}}{\{(n+h)\sqrt{-1}\}^\sigma} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty \frac{e^{-(h-1)\alpha-2\pi v\sqrt{-1}}-e^{-2h\pi v\sqrt{-1}}}{1-e^{\alpha-2\pi v\sqrt{-1}}}\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha,$$

und fügt man hiezu die Summe aller Glieder der Reihe vom $(h+2)$ten ab,

die oben durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt ist, so wird die ganze Reihe mit Ausschlufs des Terms $\frac{e^{-2h\pi v\sqrt{-1}}}{k^\sigma}$ nach einer leichten Reduction gleich dem Integral

$$\frac{e^{-2h\pi v\sqrt{-1}}}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\alpha-2\pi v\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}}{1-e^{-\alpha-2\pi v\sqrt{-1}}}+\frac{e^{-\alpha+2\pi v\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\pi\sigma\sqrt{-1}}}{1-e^{-\alpha+2\pi v\sqrt{-1}}}\right)\alpha^{\sigma-1}\partial\alpha.$$

Ist jetzt $\cos 2h\pi v = 0$, so verschwindet der reelle Theil des Integrals, des Ausdrucks $\frac{e^{-2h\pi v\sqrt{-1}}}{k^\sigma}$, folglich auch der Reihe $F(v, h, 0, \sigma)$; ist aber $\sin 2h\pi v = 0$, so wird der imaginäre Theil des Integrals, des Ausdrucks $\frac{e^{-2h\pi v\sqrt{-1}}}{k^\sigma}$, und daher auch der Reihe $F(v, h, 0, \sigma)$ gleich Null, wie behauptet wurde.

Elbing, im Juli 1856.

29.

Über confokale Kegelschnitte.

(Von Herrn *S. Cohn.*)

Jacobi hat zuerst auf die Wichtigkeit der confokalen Kurven und Flächen zweiten Grades aufmerksam gemacht und in einem im 12ten Bande dieses Journals enthaltenen Briefe an *Steiner* eine neue aus den Eigenschaften jener Gebilde hergeleitete Erzeugungsweise der Kegelschnitte und Flächen zweiten Grades mitgetheilt. Das wichtigste Ergebnifs derselben ist diejenige Entstehungsweise der Flächen zweiten Grades, welche der Erzeugung der Kegelschnitte von den Brennpunkten aus entspricht. Nachdem ich die dort angegebene Methode weiter verfolgt hatte, bin ich zu einigen neuen Sätzen über die Kurven und Flächen gelangt, die ich im Folgenden mittheile.

1.

Man versteht unter confokalen Kegelschnitten solche, welche gleiche Excentricität *) haben. Es sei

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$$

die Gleichung einer auf ihre rechtwinkligen Achsen bezogenen Kurve zweiten Grades, wo A und B die Quadrate der beiden Halbachsen bezeichnen und $A>B$ sei. Dann wird bekanntlich $A-B$ das Quadrat der halben Excentricität, und es folgt, dafs

$$\frac{x^2}{A+\lambda}+\frac{y^2}{B+\lambda}=1$$

die Gleichung einer mit der ersten confokalen Kurve sein wird. λ kann alle Werthe von $+\infty$ bis $-A$ annehmen, also zerfällt, wie bekannt, das ganze System Kegelschnitte, welche zwei feste Punkte zu Brennpunkten haben, in ein System von Ellipsen und ein System Hyperbeln. Parabeln kommen in ihnen nicht vor; wenn einer der Brennpunkte im Unendlichen liegt, wird das ganze System confokaler Kurven aus zwei Systemen Parabeln bestehen, von denen das eine seinen unendlich entfernten Punkt nach rechts, das andere

---

*) Excentricität bezeichnet hier immer die Entfernung der beiden Brennpunkte.

nach links hat. Es ist bekannt, dafs durch jeden Punkt u der Kurve

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1,$$

welche eine Ellipse sein möge, eine confokale Hyperbel

$$\frac{x^2}{A-\mu} + \frac{y^2}{B-\mu} = 1$$

geht, welche sie rechtwinklig schneidet. Ist a ein Endpunkt der grofsen Achse der Ellipse, b der Scheitel der Hyperbel auf derselben Seite vom Mittelpunkte, f der gemeinschaftliche Brennpunkt auf derselben Seite der Achse, so ist

$$ab = fu.$$

Zieht man einen Halbmesser der Ellipse, parallel der Tangente im Punkte u, so ist derselbe gleich $\sqrt{\mu}$.

Sind f und f_1 die beiden Brennpunkte, so ist $fu.f_1u = \mu$. Da die Coordinaten x_1 und y_1 des Punktes u zwei Gleichungen genügen müssen, so erhält man für dieselben die Ausdrücke:

$$x_1 = \sqrt{\frac{A.A-\mu}{A-B}}, \qquad y_1 = \sqrt{\frac{B.B-\mu}{B-A}},$$

und setzt man

$$x_1 = \sqrt{A}\cos\varphi, \qquad y_1 = \sqrt{B}\sin\varphi,$$

so wird

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{A-\mu}{A-B}}, \qquad \sin\varphi = \sqrt{\frac{B-\mu}{B-A}}.$$

Allgemein läfst sich nun jeder Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes als Durchschnittspunkt zweier confokaler Kegelschnitte betrachten; sind x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes p, so wird:

$$x = \sqrt{\frac{A+\lambda.A-\mu}{A-B}}, \qquad y = \sqrt{\frac{B+\lambda.B-\mu}{B-A}},$$

wenn $A+\lambda$, $B+\lambda$ die Quadrate der beiden Halbachsen der durch p gehenden Ellipse, $A-\mu$, $B-\mu$ die Quadrate der Halbachsen der zugehörigen Hyperbel sind. Man kann aber leicht die Tangenten an diese beiden Kurven im Punkte p legen, denn man hat nur p mit f und f_1 zu verbinden, und die beiden Halbirungslinien des Winkels fpf_1 zu ziehen. Sind pi und pi_1 die Tangenten vom Punkte p an irgend einen andern confokalen Kegelschnitt, so ist bekanntlich Winkel $ipf = i_1pf_1$; folglich findet man jene beiden Tangenten im Punkte p auch in der Weise, dafs man die beiden Halbirungslinien des Winkels ipi_1 zieht. Daraus folgt aber, dafs wenn man von einem Punkte p

an zwei beliebige confokale Kegelschnitte Tangenten zieht, diese unter sich gleiche Winkel bilden.

Wenn in der Ebene eines Kegelschnittes eine beliebige Gerade g gegeben ist, so kann dieselbe als Tangente an einen mit dem gegebenen confokalen Kegelschnitt betrachtet werden. Nach einem bekannten Satze liegen die Pole derselben Geraden g in Bezug auf alle Kegelschnitte, die zwei feste Punkte zu Brennpunkten haben, auf einer zu g senkrechten geraden Linie. Bestimmt man also den Pol p zu g in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt und fällt von p ein Perpendikel auf g, so ist der Fufspunkt desselben der Berührungspunkt von g mit einem zum gegebenen confokalen Kegelschnitte.

Irgend zwei confokale Kurven derselben Art (e) und (e_1) werden von einer dritten (h) der andern Art geschnitten. Es sei u ein Durchschnittspunkt der Kurven (h) und (e), u' derjenige Durchschnitt von (h) mit (e_1), welcher mit u in demselben Quadranten liegt, so werden u und u' conjugirte Punkte genannt. Wenn nun u_1, u_1' zwei andere conjugirte Punkte auf den Kurven (e) und (e_1) sind, so ist nach einer unter dem Namen des *Ivory*'schen Theorems längst bekannten Eigenschaft der confokalen Kegelschnitte:

$$uu_1' = u_1u'.$$

Wir nahmen oben an, dafs im allgemeinen Ausdruck einer confokalen Kurve:

$$\frac{x^2}{A+\lambda}+\frac{y^2}{B+\lambda}=1$$

λ alle Werthe von $+\infty$ bis $-A$ durchlaufen könne; so lange $B+\lambda>0$ bezeichnet jene Gleichung eine Ellipse, wenn $B+\lambda<0$ eine Hyperbel. $B+\lambda=0$ ist die Grenze zwischen beiden Fällen, die Kurve wird zur geraden Linie, indem sie mit der grofsen Achse zusammenfällt. Wenn daher die Kurve (h) den Kegelschnitt (e) im Punkte u, aber die grofse Achse im Punkte u_0 schneidet, so sind auch u und u_0 als conjugirte Punkte zu betrachten. Wird (e) von einer andern confokalen Kurve (h_1) in v, die grofse Achse in v_0 geschnitten, so sind auch v und v_0 conjugirte Punkte und daher

$$uv_0 = vu_0.$$

Aus dieser Eigenschaft leitet *Jacobi* seine Erzeugungsweise der Kegelschnitte her. Es sei nämlich i ein beliebiger anderer Punkt der Kurve (e), so wird dieser seinen conjugirten i_0 auf der grofsen Achse haben, und daher

$$ui_0 = u_0i, \quad vi_0 = v_0i,$$

oder sämmtliche Punkte i_0 der grofsen Achse haben von den beiden Punkten u und v respective dieselben Entfernungen, wie ihre conjugirten von den beiden Punkten u_0 und v_0.

Wir haben also folgendes Theorem:

Bestimmt man zu jedem Punkte p einer geraden Linie einen andern p', welcher von zwei festen Punkten A', B' respective dieselben Entfernungen hat, als der Punkt p von zwei andern festen Punkten A, B, so ist der Ort von p', während p die gerade Linie durchläuft, ein Kegelschnitt.

Der einfachste Fall ist derjenige, in welchem die Punkte A und B in der gegebenen geraden Linie liegen, dann werden offenbar die Punkte A', B' die Brennpunkte des so entstandenen Kegelschnittes, und die Länge AB seine grofse Achse.

Es wird nach dem Vorhergehenden verständlich sein, wenn ich sage, jeder Geraden g in Bezug auf zwei feste Punkte A, B genommen entspricht ein Kegelschnitt (G) in Bezug auf zwei andere feste Punkte A', B'.

Vorausgesetzt, dafs die festen Punkte A, B, A', B' dieselben bleiben entspricht jeder Geraden g ein besonderer Kegelschnitt (G); ***allen möglichen Geraden g entsprechen Kegelschnitte, welche sämmtlich eine gemeinschaftliche Achse haben und ein und denselben Kegelschnitt (C) umhüllen. Die Kurve (C) ist diejenige, welche der Geraden, in welcher die Punkte A, B liegen, entspricht.***

Umgekehrt entspricht jeder Geraden g_1 in Bezug auf die beiden festen Punkte A', B' genommen, ein Kegelschnitt (G_1) in Bezug auf die festen Punkte A, B. ***Sämmtliche Kegelschnitte (G_1) haben eine gemeinsame Achse und umhüllen den Kegelschnitt C_1, welcher derjenigen Geraden entspricht, in welcher die Punkte A', B' liegen.***

Schneidet die Gerade g_1 die Kurve C in zwei Punkten i und i', ***so ist die Excentricität der Kurve (G_1) gleich der Sehne ii'.***

Es sei rs die Sehne eines Kegelschnittes, dessen Brennpunkte f und f_1 heifsen, so ist

$$fr \pm rf_1 = \pm(fs \pm sf_1)$$
$$fr \mp sf = \pm(sf_1 \mp rf_1),$$

d. h. man kann einen Kegelschnitt zeichnen, welcher r und s zu Brennpunkten hat, und durch die Punkte f und f_1 geht. Die Tangenten dieser Kurve

in f und f_1 halbiren die Winkel rfs und rf_1s, folglich fällt ihr Durchschnittspunkt mit dem Pol von rs zusammen.

2.

Wenn man zu allen Punkten i eines Kegelschnittes (E) ihre entsprechenden i' sucht, so dafs i' von zwei festen Punkten A', B' respective dieselben Entfernungen habe, als i von zwei andern festen Punkten A, B, so entspricht der Kurve (E) eine Kurve 4ten Grades; und allgemein, wenn i eine Kurve $n$ten Grades durchläuft, liegen die Punkte i' auf einer Kurve $2n$ten Grades. In einem bestimmten Falle aber entspricht dem Kegelschnitt (E) wieder eine Kurve zweiten Grades (E'), indem die Kurve 4ten Grades in zwei gleiche Kegelschnitte zerfällt; und zwar tritt dieser Fall ein, *wenn der Kegelschnitt* (E) *die Kurve* (C_1) *des vorigen Abschnitts doppelt berührt.*

Nach dem *Ivory*schen Theorem werden, wenn K und K' zwei confokale Kegelschnitte derselben Art bezeichnen, und m, n zwei Punkte des ersten, m', n' ihre conjugirten auf dem zweiten sind, die Entfernungen

$$mn' = nm'.$$

Ist p ein anderer Punkt der Kurve K, p' sein conjugirter auf K', so ist $mp' = pm'$, $np' = pn'$. Sucht man nun alle diejenigen Punkte i', welche von den Punkten m und n respective dieselben Entfernungen haben, wie die Punkte i von m', n', so beschreibt der Punkt i', während der Punkt i die Kurve K durchläuft, die Kurve K', welche zu K confokal ist. Denkt man sich also einen Kegelschnitt (B), welcher die Punkte m', n' zu Brennpunkten hat, zur grofsen Achse aber die Länge mn, so müfste derselbe nach dem vorhergehenden Satze die Kurve K doppelt berühren. Dies will ich nun direct beweisen.

Irgend eine gerade Linie schneidet den Kegelschnitt K in den Punkten m, n, die confokale Kurve K' in den Punkten μ, ν. Es seien m', n' die conjugirten Punkte zu m, n auf K', μ', ν' die conjugirten Punkte zu μ, ν auf K. Bestimmt man nun den Ort aller derjenigen Punkte, welche von m', n' respective dieselben Entfernungen haben, wie die Punkte q der geraden Linie mn von den Punkten m und n, so ist nach dem Vorhergehenden dieser Ort ein Kegelschnitt B, welcher die Punkte m', n' zu Brennpunkten hat und dessen grofse Achse gleich mn wird. Jeder gemeinschaftliche Durchschnittspunkt i der Kurven B und K mufs einen entsprechenden i_1 auf der geraden

Linie mn haben. Es sei i' der conjugirte Punkt zu i auf der Kurve K', so ist nach dem *Ivory*schen Theorem

$$m'i = mi' = mi_1, \qquad n'i = ni' = ni_1,$$

und daher

$$mi_1 \pm ni_1 = mi' \pm ni' = mn,$$

d. h. die Punkte i_1 und i' müssen zusammenfallen und jedem Durchschnittspunkte der Kurven B und K entspricht ein Durchschnitt der geraden Linie mn mit dem Kegelschnitt K'; woraus folgt, dafs die Kurven B und K einen doppelten Contakt haben und die Berührungspunkte die Punkte μ', ν' sind. W. z. b. w.

Die Tangenten in m' und n', μ' und ν' gehen durch denselben Punkt, wie das Folgende zeigen wird.

Die beiden Kegelschnitte K und B sollen einen doppelten Contakt haben, und P der Pol ihrer gemeinsamen Berührungssehne π sein; so fallen nach einem bekannten Satze die Pole jeder durch den Punkt P gehenden Geraden g in Bezug auf die beiden Kegelschnitte genommen in einem Punkte γ der Sehne π zusammen. Fällt man von diesem Punkte γ ein Perpendikel auf die Gerade g, so ist der Fufspunkt desselben der Berührungspunkt der Geraden g mit einem zu K confokalen Kegelschnitte, und einem andern, der zu B confokal ist. Bezeichnen φ_1 und φ_2 die Brennpunkte der Kurve B, und sind s und t die Berührungspunkte von B und K, so sind die Winkel $\varphi_1 sP$ und $\varphi_2 tP$ einander gleich, also werden die geraden Linien $P\varphi_1$ und $P\varphi_2$ Tangenten an ein und denselben zu K confokalen Kegelschnitt. Man bestimme zur geraden Linie $P\varphi_1$ den gemeinsamen Pol h für beide Kurven K und B, so ist der Fufspunkt eines von h auf die Gerade $P\varphi_1$ gefällten Perpendikels offenbar φ_1 selber und es folgt, dafs die Gerade $P\varphi_1$ im Punkte φ_1 einen zu K confokalen Kegelschnitt berührt. Wir haben daher folgenden Satz:

Wenn zwei Kegelschnitte K und B einen doppelten Contakt haben, so liegen die Brennpunkte des einen auf einer zur andern confokalen Kurve et vice versa.

Man kann diesen Satz auch so aussprechen:

„Wenn zwei Kurven zweiten Grades einen doppelten Contakt haben, so lassen sich um die Berührungspunkte als Brennpunkte und die Brennpunkte der einen von beiden Kurven zwei Kegelschnitte zeichnen, die sich in den Brennpunkten der andern doppelt berühren."

Es folgt sogleich aus diesem Satze, *dafs die Berührungssehnen sämmtlicher Kegelschnitte, die einen gemeinsamen Brennpunkt haben, und einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren, durch zwei gemeinsame Punkte gehen.*)* Diese beiden gemeinsamen Punkte sind die Pole derjenigen Linien, welche durch den gemeinschaftlichen Brennpunkt gehen, und die durch ihn gehenden mit dem gegebenen confokalen Kegelschnitte berühren.

Dieser Satz ergiebt eine leichte Construction der reciproken Polare eines Kegelschnittes in Bezug auf einen beliebigen Kreis genommen. Es sei K der Kegelschnitt, φ der Mittelpunkt des Kreises A. Durch φ gehen zwei zu K confokale Kegelschnitte; man ziehe die beiden Tangenten, welche sie in φ berühren, und bestimme zu diesen die Pole π_1 und π_2 in Bezug auf den Kegelschnitt K. Die Polaren von π_1 und π_2 in Bezug auf den Kreis A genommen sind die rechtwinkligen Axen der reciproken Polare. Es seien ferner t_1, t_1', t_2, t_2' die von den Punkten π_1 und π_2 an die Kurve K gezogenen Tangenten, so sind die Pole dieser vier Linien in Bezug auf den Kreis A genommen die Scheitel der zu construirenden reciproken Polare. Man sieht sogleich, dafs, wenn der Punkt φ innerhalb der Kurve K liegt, die reciproke Polare von K eine Ellipse wird, wenn φ aufserhalb liegt, eine Hyperbel, und wenn φ auf der Kurve sich befindet, eine Parabel wird. Es sei die Gleichung des Kegelschnittes

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1,$$

ϱ der Radius des Kreises, und die Coordinaten des Punktes φ seien

$$x_1=\sqrt{\frac{A+\lambda.A+\mu}{A-B}}, \qquad y_1=\sqrt{\frac{B+\lambda.B+\mu}{B-A}},$$

so ist die Excentricität der reciproken Polare des Kegelschnittes K in Bezug auf den Kreis A

$$\frac{\varrho^2}{\lambda\mu}\sqrt{A.B.(\lambda-\mu)};$$

die beiden Halbachsen werden

$$\frac{\varrho^2}{\mu}\sqrt{\frac{AB}{\lambda}} \quad \text{und} \quad \frac{\varrho^2}{\lambda}\sqrt{\frac{AB}{\mu}}.$$

Es sei eine Gerade G und ein Kegelschnitt K gegeben; irgend ein zu K confokaler Kegelschnitt K' schneide die Gerade G in zwei Punkten i

*) Ein Büschel Berührungssehnen geht durch den einen Punkt, ein zweiter durch den andern.

und i_1, so können nach dem Vorhergehenden i und i_1 als Brennpunkte eines Kegelschnittes betrachtet werden, welcher die Kurve K doppelt berührt. Der Pol P dieser Berührungssehne fällt mit dem Pol der Geraden G in Bezug auf die Kurve K' genommen zusammen. Die Berührungssehne, welche die Gerade G in γ schneiden möge, ist die Polare zu P in Bezug auf die Kurve K. Welches auch die Kurve K' sei, so liegen die Punkte P in einer Geraden g, welche auf G senkrecht steht; folglich müssen alle Berührungssehnen durch denselben Punkt, d. i. den Pol der Geraden g in Bezug auf den Kegelschnitt K genommen gehen. Da aber die Pole der Geraden g für alle möglichen confokalen Kegelschnitte in der Geraden G liegen, so müssen alle jene Berührungssehnen durch den Punkt γ gehen. Wir haben hieraus folgenden Satz:

Die Berührungssehnen aller möglichen Kegelschnitte, welche einen gegebenen doppelt berühren und deren Brennpunkte in derselben Geraden liegen, gehen durch ein und denselben Punkt dieser Geraden.

Der gemeinsame Punkt ist dadurch bestimmt, dafs seine Polare in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt durch den Pol der gegebenen Geraden geht und senkrecht auf dieser steht.

Nehmen wir einen beliebigen Kegelschnitt K an und denken uns durch einen Punkt a auf demselben die zu ihm confokale Kurve H, welche ihn senkrecht schneidet, gelegt. Die Normale an K im Punkte a ist gleichzeitig Tangente an H im Punkte a. Man darf annehmen, dafs diese Normale die Kurve H in einem a unendlich nahen Punkte a' nochmals schneidet, welcher auf einem zu K unendlich nahe gelegenen confokalen Kegelschnitte derselben Art K' liegt. Die Normale aa' schneidet die Kurve K nochmals in b, K' in b'. Bestimmt man zu a und b die conjugirten Punkte auf K', zu a', b' die conjugirten auf K, so werden nach dem im Vorhergehenden Bewiesenen die Tangenten in diesen vier neuen Punkten einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben. Offenbar ist aber in unserm Falle der conjugirte Punkt zu a, a'; zu a', a; zu b', b; also wird jener gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der vier Tangenten mit dem Pol der Linie ab, in Bezug auf den Kegelschnitt K genommen, zusammenfallen. Da aber die Tangenten in a und a' zwei unendlich nahe Normalen der Kurve H sind, so haben wir folgenden Satz:

Legt man an einen beliebigen Punkt a eines Kegelschnittes K die Tangente und bestimmt zu dieser den Pol in Bezug auf den zu K confokalen Kegelschnitt, welcher die Kurve K im Punkte a senkrecht

schneidet, so ist dieser Pol der Krümmungsmittelpunkt des Bogenelementes a für die Kurve K.

Wenn a und a_1 zwei Punkte auf einem Kegelschnitte A, a' und a'_1 ihre conjugirten auf einem zu A confokalen Kegelschnitte A' bezeichnen, so ist nach dem *Ivory*schen Theorem $aa'_1 = a_1 a'$. Ist nun aa'_1 Normale an die Kurve A', so wird aa'_1 ein Maximum oder Minimum unter den von a an die Punkte der Kurve A' gezogenen Linien, folglich ist auch $a_1 a'$ ein solches Maximum oder Minimum unter den vom Punkte a' an die Kurve A gezogenen Linien. Wir haben daher den folgenden Satz:

„Bezeichnen e, e_1, e_2, e_3 die Fufspunkte der von einem Punkte p an einen Kegelschnitt A gezogenen Normalen, e', e'_1, e'_2, e'_3 die conjugirten Punkte auf dem durch den Punkt p gehenden mit A confokalen Kegelschnitte derselben Art A', und π den conjugirten Punkt zu p auf A, so sind e', e'_1, e'_2, e'_3 die Fufspunkte der vom Punkte π an die Kurve A' gezogenen Normalen."

Ist i_0 ein Punkt der grofsen Achse eines Kegelschnittes, i sein conjugirter auf der Kurve, so fälle man von i ein Perpendikel auf die Achse und nenne den Fufspunkt desselben i'_0; man bestimme zu i'_0 wieder seinen conjugirten Punkt i' auf der Kurve, so ist $i' i_0$ Normale vom Punkte i_0 an den gegebenen Kegelschnitt.

Ich füge noch einen Satz hinzu, der aus dem bisher Behandelten sich von selbst ergiebt:

„Legt man durch einen Kegelschnitt eine beliebige Sehne ab, wo a und b Punkte der Kurve sind, und zieht durch a eine zweite Linie, welche mit der Tangente in diesem Punkte denselben Winkel bildet als ab; und durch b eine zweite Linie, welche mit der Tangente in diesem Punkte denselben Winkel bildet, als ab, so schneiden sich die eben construirten neuen Linien in einem Punkte p: die durch p gehende mit dem gegebenen Kegelschnitte confokale Kurve derselben Art wird von der Linie ab senkrecht geschnitten."

3.

Im Folgenden soll noch eine Eigenschaft confokaler Kegelschnitte angegeben werden, die mir einiges Interesse zu haben scheint, weil auf dieselbe bisher noch nirgends aufmerksam gemacht worden ist.

Wenn man durch einen Punkt p alle möglichen Transversalen zieht, welche einen gegebenen Kegelschnitt respective in den Punkten a, a_1, b, b_1, c, c_1, ... schneiden, und man bestimmt zu diesen Punkten ihre

conjugirten a', a'_1, b', b'_1, c', c'_1, ... auf einer zur gegebenen confokalen Kurve derselben Art, so gehen die geraden Linien $a'a'_1$, $b'b'_1$, $c'c_1$, ... wieder durch ein und denselben Punkt π; es ist ferner

$$\frac{pa}{pa_1} = \frac{\pi a'}{\pi a'_1}, \qquad \frac{pb}{pb_1} = \frac{\pi b'}{\pi b'_1}, \qquad \frac{pc}{pc_1} = \frac{\pi c'}{\pi c'_1}, \ \ldots$$

und

$$pa.pa_1 - \pi a'.\pi a'_1 = pb.pb_1 - \pi b'.\pi b'_1 = pc.pc_1 - \pi c'.\pi c'_1 = \ldots.$$

Zum Beweise nehmen wir an, dafs die Quadrate der Halbachsen des gegebenen Kegelschnittes $A+\lambda$, $B+\lambda$ seien, dieselben Gröfsen für die confokale Kurve $A+\lambda'$, $B+\lambda'$, so lassen sich die Coordinaten der Punkte

$$a, a_1; \quad b, b_1; \quad c, c_1; \ \ldots$$
$$a', a'_1; \quad b' b'_1; \quad c', c'_1; \ \ldots$$

so darstellen

$$\begin{array}{llll}
\sqrt{A+\lambda}.\cos\alpha, & \sqrt{B+\lambda}.\sin\alpha, & \sqrt{A+\lambda}.\cos\alpha_1, & \sqrt{B+\lambda}.\sin\alpha_1, \\
\sqrt{A+\lambda'}.\cos\alpha, & \sqrt{B+\lambda'}.\sin\alpha, & \sqrt{A+\lambda'}.\cos\alpha_1, & \sqrt{B+\lambda'}.\sin\alpha_1, \\
\sqrt{A+\lambda}.\cos\beta, & \sqrt{B+\lambda}.\sin\beta, & \sqrt{A+\lambda}.\cos\beta_1, & \sqrt{B+\lambda}.\sin\beta_1; \\
\sqrt{A+\lambda'}.\cos\beta, & \sqrt{B+\lambda'}.\sin\beta, & \sqrt{A+\lambda'}.\cos\beta_1, & \sqrt{B+\lambda'}.\sin\beta_1; \\
\sqrt{A+\lambda}.\cos\gamma, & \sqrt{B+\lambda}.\sin\gamma, & \sqrt{A+\lambda}.\cos\gamma_1, & \sqrt{B+\lambda}.\sin\gamma_1; \\
\sqrt{A+\lambda'}.\cos\gamma, & \sqrt{B+\lambda'}.\sin\gamma, & \sqrt{A+\lambda'}.\cos\gamma_1, & \sqrt{B+\lambda'}.\sin\gamma_1; \\
\text{etc.} & \text{etc.} & &
\end{array}$$

Die Gleichungen der Geraden aa_1, bb_1, cc_1, werden:

$$y = \sqrt{\frac{B+\lambda}{A+\lambda}} \cdot \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_1).x + \sqrt{B+\lambda} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_1)}$$

$$y = \sqrt{\frac{B+\lambda}{A+\lambda}} \cdot \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\beta+\beta_1).x + \sqrt{B+\lambda} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)}{2\sin\frac{1}{2}(\beta+\beta_1)}$$

$$y = \sqrt{\frac{B+\lambda}{A+\lambda}} \cdot \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma_1).x + \sqrt{B+\lambda} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\gamma_1)}{2\sin\frac{1}{2}(\gamma+\gamma_1)}$$

etc.

Aus diesen Gleichungen sieht man, dafs die Bedingung, damit sich diese Linien in einem Punkte schneiden, nur von den Winkeln α, α_1, β, β_1, γ, γ_1 ... abhängt; da diese für die conjugirten Punkte dieselben bleiben, so müssen auch die Linien $a'a'_1$, $b'b'_1$, $c'c'_1$ ... einen gemeinschaftlichen Durchschnitt haben. Die Coordinaten des Punktes p sind von der Form $\sqrt{A+\lambda}.p_1$, $\sqrt{B+\lambda}.q_1$, wo p_1 und q_1 blofse Funktionen jener Winkel sind; daher werden die Coordinaten

des Punktes π von der Form

$$\sqrt{A+\lambda'}.p_1, \qquad \sqrt{B+\lambda'}.q_1.$$

(Man könnte auf diese Weise jedem Punkte p in Bezug auf einen Kegelschnitt $(A+\lambda,\ B+\lambda)$ immer einen andern π in Bezug auf einen confokalen $(A+\lambda',\ B+\lambda')$ entsprechen lassen; liegen die Punkte p auf einer Kurve $n$ten Grades, so liegen die Punkte π wieder auf einer Kurve $n$ten Grades.)

Das Verhältnifs

$$\frac{pa}{pa_1} = \sqrt{\frac{A+\lambda}{A+\lambda}}.\frac{p_1-\cos\alpha}{p_1-\cos\alpha_1} = \sqrt{\frac{B+\lambda}{B+\lambda}}.\frac{q_1-\sin\alpha}{q_1-\sin\alpha_1}$$

ist also unabhängig von $A+\lambda$ und $B+\lambda$ und daher gleich $\frac{\pi a'}{\pi a'_1}$.

Ziehen wir durch den Punkt p, dessen Coordinaten ξ, η heifsen, irgend eine Transversale

$$x-\xi = r\cos\varphi$$
$$y-\eta = r\sin\varphi,$$

so ist bekanntlich das Product der beiden Abschnitte der Transversale, von p bis zu den Durchschnittspunkten derselben mit der gegebenen Kurve $(A+\lambda,\ B+\lambda)$ gerechnet,

$$r_1 r_2 = \frac{\frac{\xi^2}{A+\lambda}+\frac{\eta^2}{B+\lambda}-1}{\frac{\cos^2\varphi}{A+\lambda}+\frac{\sin^2\varphi}{B+\lambda}} = \frac{p_1^2+q_1^2-1}{\frac{\cos^2\varphi}{A+\lambda}+\frac{\sin^2\varphi}{B+\lambda}},$$

weil

$$\xi = \sqrt{A+\lambda}.p_1 \qquad \eta = \sqrt{B+\lambda}.q_1.$$

Haben die Durchschnittspunkte der Transversale mit der Kurve die Coordinaten $\sqrt{A+\lambda}.\cos\alpha$, $\sqrt{B+\lambda}.\sin\alpha$, $\sqrt{A+\lambda}.\cos\alpha_1$, $\sqrt{B+\lambda}.\sin\alpha_1$, so wird:

$$\cos^2\varphi = \frac{(A+\lambda).(\cos\alpha-\cos\alpha_1)^2}{(A+\lambda).(\cos\alpha-\cos\alpha_1)^2+(B+\lambda)(\sin\alpha-\sin\alpha_1)^2}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{(B+\lambda).(\sin\alpha-\sin\alpha_1)^2}{(A+\lambda).(\cos\alpha-\cos\alpha_1)^2+(B+\lambda)(\sin\alpha-\sin\alpha_1)^2},$$

daher

$$pa.pa_1 = r_1 r_2 = \frac{p_1^2+q_1^2-1}{4\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)}\{(A+\lambda)(\cos\alpha-\cos\alpha_1)^2+(B+\lambda)(\sin\alpha-\sin\alpha_1)^2\}.$$

Für $\pi a'.\pi a'_1$ erhalten wir demnach einen ganz ähnlichen Ausdruck

$$\frac{p_1^2+q_1^2-1}{4\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)}\cdot\{(A+\lambda').(\cos\alpha-\cos\alpha_1)^2+(B+\lambda')(\sin\alpha-\sin\alpha_1)^2\},$$

und es folgt:

$$pa.pa_1 - \pi a'.\pi a_1' = (p_1^2 + q_1^2 - 1)(\lambda - \lambda'),$$

welcher Werth unabhängig von der Richtung der Transversale ist, w. z. b. w.

Wenn die Seiten eines Dreieckes f, g, h sind, und man halbirt den Winkel, welchen die Seiten f und g mit einander bilden und nennt die Länge der Halbirungslinie von jener Winkelspitze bis zur gegenüberliegenden Dreiecksseite h gerechnet r, so ist

$$r^2 = \frac{(f \pm g)^2 - h^2}{(f \pm g)^2} \cdot fg,$$

oder, wenn man die beiden Stücke, in welche h getheilt wird mit φ und γ bezeichnet,

$$r^2 = fg - \varphi\gamma.$$

Construiren wir über der im Vorhergehenden betrachteten Linie $a'a_1'$ ein Dreieck mit den Seiten ap und a_1p, so trifft die Halbirungslinie des Winkels, welcher der Seite $a'a_1'$ gegenüber liegt, dieselbe im Punkte π, weil $\frac{pa}{pa_1} = \frac{\pi a'}{\pi a_1'}$. Das Quadrat der Länge dieser Halbirungslinie ist aber $ap.a_1p - a'\pi.a_1'\pi$ gleich einer Constanten. Wenn wir also auch über der Linie $b'b_1'$ ein Dreieck mit den Seiten bp und b_1p construiren, über $c'c_1'$ ein Dreieck mit den Seiten cp, c_1p u. s. f., so liegen die Spitzen dieser Dreiecke auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt π ist.

Mit Hülfe dieses Satzes können wir die Aufgabe lösen, um zwei gegebene Dreiecke ABC und $A'B'C'$ zwei Kegelschnitte zu beschreiben, welche gleiche Excentricität haben.

Man wähle auf BC einen beliebigen Punkt p und theile $B'C'$ durch den Punkt π in dem Verhältnisse $\frac{Bp}{Cp}$. Ueber $B'C'$ construire man ein Dreieck, dessen Seiten gleich Bp und Cp, und verbinde die Spitze o desselben mit dem Punkte π. Dann beschreibe man mit πo einen Kreis um π als Mittelpunkt und bestimme auf demselben einen Punkt i, so dafs $iA' = pA$ wird. Man verbinde i mit π, und ziehe durch i eine zweite Linie, welche mit $i\pi$ denselben Winkel bildet, als $A'i$, so trifft diese neue Linie die Gerade $A'\pi$ in einem Punkte D', welcher auf dem gesuchten Kegelschnitte, der durch die Punkte A', B', C' geht, liegt. Da p ganz willkürlich gewählt war, so sieht man, wie man auf diese Weise beliebig viele Punkte des dem Dreieck $A'B'C'$ umschriebenen Kegelschnittes gewinnen kann. Wie man die andere Kurve, welche dem Dreieck ABC umschrieben ist, zu construiren habe, ist von selbst einleuchtend.

Ich will noch bemerken, dafs wenn 4 Punkte eines Kegelschnittes auf einem Kreise liegen, oder wenn die Normalen in 4 Punkten eines Kegelschnittes durch denselben Punkt gehen, dieselbe Eigenschaft auch ihren conjugirten Punkten auf einer zur gegebenen confokalen Kurve derselben Art zukömmt. Da nämlich, wenn die Coordinaten der Punkte eines Kegelschnittes durch die Achsen desselben und einen Winkel ausgedrückt werden, der letztere für die conjugirten Punkte unverändert bleibt, so erhellt das Obige aus den bekannten Bedingungen, dafs vier Punkte eines Kegelschnittes auf einem Kreise liegen:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2n\pi,$$

oder dafs die Normalen in 4 Punkten einen gemeinschaftlichen Durchschnitt haben:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = (2n+1)\pi.$$

4.

Wenn man für einen gegebenen Punkt in Bezug auf das doppelte System Kegelschnitte, welche zwei feste Punkte zu Brennpunkten haben, die Polaren bestimmt, so umhüllen dieselben eine Parabel; in der That:

Es seien u, v die rechtwinkligen Coordinaten des gegebenen Punktes, so wird die Polare desselben in Bezug auf irgend einen der confokalen Kegelschnitte $(A+\lambda, B+\lambda)$

$$\frac{ux}{A+\lambda} + \frac{vy}{B+\lambda} = 1;$$

differentiirt man die Gleichung nach λ, so erhält man

$$\frac{ux}{(A+\lambda)^2} + \frac{vy}{(B+\lambda)^2} = 0,$$

und durch Subtraction beider Gleichungen wird

$$\frac{(B-A)vy}{(B+\lambda)^2} = 1, \qquad \frac{(A-B)ux}{(A+\lambda)^2} = 1,$$

daher die Gleichung der Umhüllungskurve sämmtlicher Polaren

$$\sqrt{ux} + \sqrt{-vy} = \sqrt{A-B},$$

oder

$$(ux - vy - (A-B))^2 + 4uxvy = 0.$$

Dieselbe Kurve erhält man natürlich, wenn man durch den gegebenen Punkt alle möglichen Transversalen zieht, zu diesen die Pole in Bezug auf irgend einen der Kegelschnitte $(A+\lambda, B+\lambda)$ bestimmt, und auf jede von

ihrem zugehörigen Pol ein Perpendikel fällt: alle diese Perpendikel umhüllen jene Parabel.

Bekanntlich geht durch die Fufspunkte der von einem Punkte (u, v) an einen Kegelschnitt $(A+\lambda, B+\lambda)$ gezogenen Normalen eine gleichseitige Hyperbel, welche gleichzeitig durch den Mittelpunkt der gegebenen Kurve und den Punkt (u, v) geht. *Chasles* hat im dritten Bande des *Liouville*schen Journals die Bemerkung gemacht, dafs die reciproke Polare jener gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt genommen eine Parabel sei, deren 4 gemeinschaftliche Tangenten mit der Kurve $(A+\lambda, B+\lambda)$, diese in den Fufspunkten der 4 vom Punkte (u, v) ausgehenden Normalen berührt. Aber er construirt diese Parabel in der Weise, dafs er um den gegebenen Punkt (u, v) als Mittelpunkt alle möglichen Kreise zeichnet und für jeden die drei gemeinschaftlichen Polaren mit dem gegebenen Kegelschnitt bestimmt; diese Polaren umhüllen jene Parabel. Man kann diese Parabel auch so erhalten, dafs man um den Punkt (u, v) irgend einen Kreis zeichnet, und zu diesem die gemeinschaftlichen Polaren mit allen möglichen confokalen Kegelschnitten $(A+\lambda, B+\lambda)$ bestimmt; weshalb die im Eingange dieses Abschnittes betrachtete Parabel mit der von *Chasles* erwähnten ebenfalls übereinkommt. Da nun umgekehrt die gleichseitige Hyperbel die reciproke Polare der Parabel ist, so erhalten wir für erstere folgende einfache Construction:

„Man ziehe durch den Punkt (u, v) irgend eine Transversale und bestimme zu dieser den Pol π', von diesem fälle man ein Perpendikel auf die Transversale und bestimme zu diesem wieder den Pol π''; *während sich die Transversale um den Punkt* (u, v) *bewegt, beschreibt der Punkt* π'' *die gleichseitige Hyperbel des Apollonius.*

5.

Ich will noch eine Construction confokaler Kegelschnitte angeben, welche ebenfalls aus der von *Jacobi* angegebenen Erzeugungsweise der Kurven und Flächen zweiten Grades folgt. Sind zwei feste Punkte A und B gegeben und die Entfernungen irgend eines Punktes i von A und B bestimmt, so wird es immer einen Punkt i' geben, welcher von zwei andern festen Punkten A', B' respective dieselben Entfernungen hat. Wenn aber drei feste Punkte A, B, C gegeben sind, und man die Entfernungen eines Punktes i in der Ebene dieses Dreieckes von jenen drei Punkten bestimmt, so wird es *im Allgemeinen keinen* Punkt i' in der Ebene eines andern Dreieckes $A'B'C'$

geben, welcher von den Endpunkten dieses Dreieckes respective dieselben Entfernungen hätte. Es giebt aber gewisse Punkte i in der Ebene des ersten Dreieckes, denen Punkte i' in der Ebene des zweiten Dreieckes in der angegebenen Weise entsprechen. ***Die Punkte i liegen auf einem Kegelschnitte, die Punkte i' ebenfalls auf einem Kegelschnitte, welcher mit jenem gleiche Excentricität hat.***

In einer folgenden Abhandlung will ich von confokalen Flächen zweiten Grades handeln, auf welche sich nicht nur alle hier erwähnten Eigenschaften confokaler Kurven übertragen lassen, sondern für welche sich aus der von *Jacobi* angegebenen Erzeugungsweise noch viele andere merkwürdige Eigenschaften ergeben.

Schliefslich bemerke ich noch, dafs der im Vorhergehenden behandelten Erzeugungsweise der Kurven zweiten Grades, deren Ausdehnung auf Flächen *Jacobi* gelehrt hat, und deren Wesen darin besteht, dafs jeder Punkt durch seine Entfernungen von zwei festen Punkten oder, was dasselbe ist, als Durchschnittspunkt zweier Kreise, die die festen Punkte zu Mittelpunkten haben, bestimmt wird, eine andere in folgender Weise entspricht. Jede gerade Linie kann nämlich als gemeinsame Tangente zweier Kreise, die zwei feste Punkte zu Mittelpunkten haben, betrachtet werden; jede Ebene als gemeinsame Tangentialebene an drei um drei feste Punkte beschriebene Kugeln. Je zwei solcher Kreise, oder je drei solcher Kugeln bezeichnen wir als conjugirte; denken wir uns dies System von zwei Kreisen oder drei Kugeln so verändert, dafs die Mittelpunkte in eine andere Lage rücken, so entspricht die gemeinschaftliche Tangente oder Tangentialebene des neuen Kreis- oder Kugelsystems der anfangs betrachteten Geraden oder Ebene. Jeder Geraden oder Ebene, welche in der angegebenen Weise auf feste Centren bezogen werden, entsprechen also wieder eine Gerade oder Ebene in Bezug auf die neuen Centren. Es gilt nun folgender Satz: Wenn alle Geraden g, die durch einen gemeinsamen Punkt P gehen, in der angegebenen Weise auf zwei feste Punkte bezogen werden, so umhüllen die ihnen entsprechenden Geraden, welche auf zwei andere feste Punkte bezogen werden, einen Kegelschnitt wenn alle Ebenen E, die durch einen gemeinsamen Punkt P gehen, in der angegebenen Weise auf drei feste Punkte bezogen werden, so umhüllen die ihnen entsprechenden Ebenen, die auf drei andere feste Punkte bezogen werden, eine Fläche zweiten Grades. —

Berlin im October 1856.

30.

Beiträge zur Theorie des Solitär-Spiels.

(Von Herrn *M. Reifs* zu Frankfurt a. M.)

Saepe notavimus nusquam homines quam in ludicris ingeniosiores esse: atque ideo ludos Mathematicorum curam mereri, non per se, sed artis inveniendi causa.

Leibnitz.

Das Solitär-Spiel scheint im Anfange des vorigen Jahrhunderts bekannt geworden zu sein *). Seine Aufgabe kann in folgender Weise ausgedrückt werden: Auf einer Tafel von beliebiger Form (Fig. 1, 2, 3) seien eine gewisse Anzahl von Feldern derart in horizontalen und verticalen Reihen vertheilt, dafs jedes Feld zugleich einer horizontalen und einer verticalen Reihe angehört, von welcher Bedingung vorkommenden Falls nur gewisse

Fig. 1

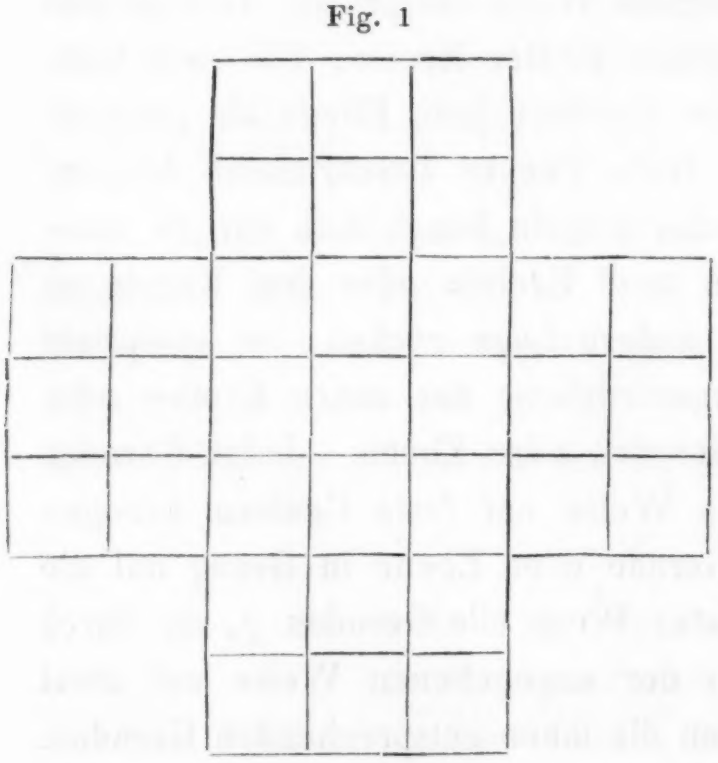
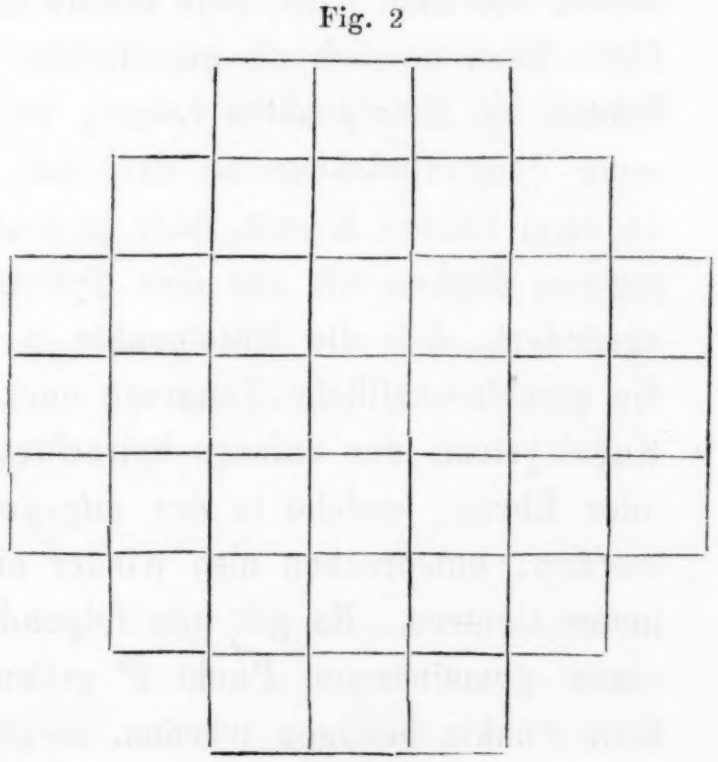
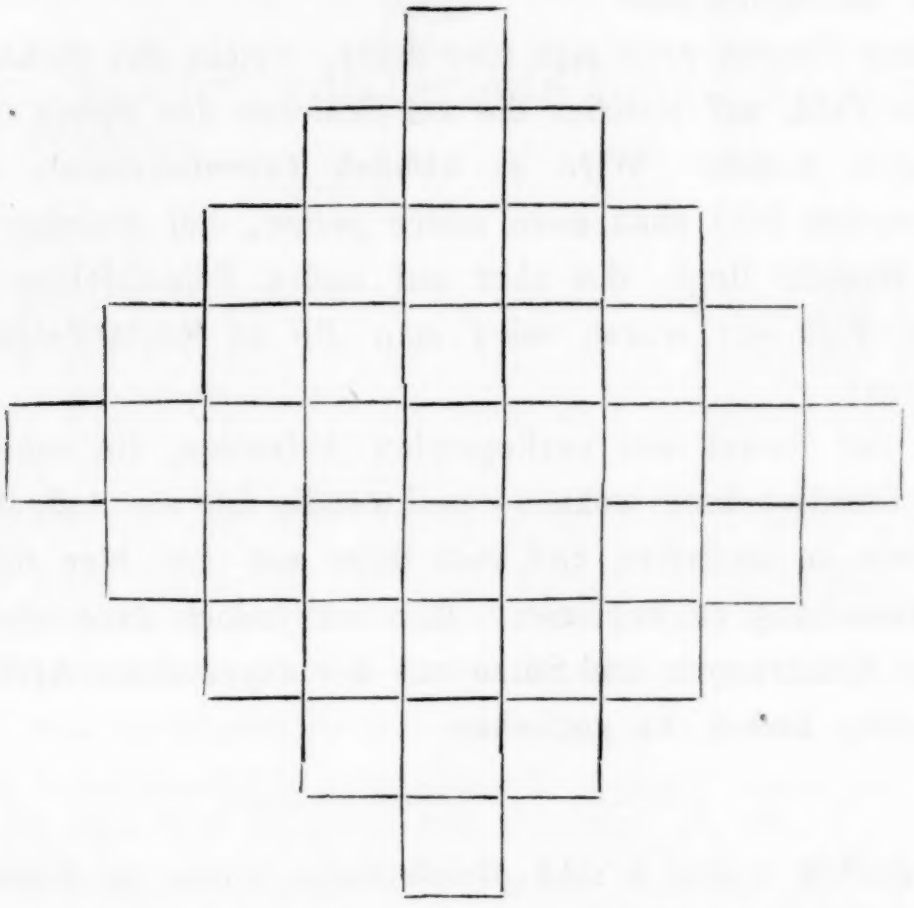


Fig. 2



*) *Leibnitz*, der dieses Spiels in den Miscellaneis Berolinensibus, 1710 (Annotatio de quibusdam ludis, etc.) erwähnt, beginnt die betreffende Stelle mit den Worten: Non ita pridem increbuit ludi genus singulare quem *Solitarium* appellant. Seine Mittheilungen beziehen sich übrigens nur auf die Erklärung des Spiels und eine Umwandlung der Aufgabe desselben. Sie sind von *Mollweide* in dessen Fortsetzung von *Klügel*'s math. Wörterbuch, vierter Theil, pag. 466 wiedergegeben.

Fig. 3



Eckfelder (wie in Fig. 3) ausgenommen sein dürfen. Diese Felder sind zu Anfang des Spiels bis auf Eins, welches man auszuwählen hat, und welches ***Anfangsfeld*** heifsen soll, mit Marken besetzt. Ein Zug ist erlaubt, wenn von drei in einer horizontalen oder verticalen Reihe neben einander liegenden Feldern, F', F'', F''', das eine äufsere, F''', unbesetzt, die beiden andern aber besetzt sind. Er geschieht, indem man die Marke des besetzten äufseren Feldes, F', auf das unbesetzte bringt und die Marke des mittleren Feldes wegnimmt; in welchem Falle man sagt, dafs er von F' auf F''' gehe. Es handelt sich nun darum, durch eine Reihe auf einander folgender Züge ***alle Felder, bis auf Eins, zu leeren.***

Ehe man in einem vorgelegten Falle zu einer Auflösung schreiten kann, ist es nöthig, die Frage zu beantworten, ob die Auflösung auch *möglich* sei, und zwar wird man zu untersuchen haben:

1^{stens} ob für die gegebene Form der Tafel und für die gegebene Anzahl der Felder überhaupt eine Auflösung möglich sei;

2^{tens} ob, wenn sich eine solche als nicht unmöglich erweiset, ein ***beliebiges*** Feld zu Anfang des Spiels unbesetzt gelassen werden dürfe, oder

ob es Anfangsfelder gebe, welche Auflösungen zulassen und andre, bei welchen diese unmöglich sind.

An diese Fragen reiht sich eine dritte, welche das *Schlufsfeld* betrifft, d. h. dasjenige Feld, auf welches die am Schlusse des Spiels übrig bleibende Marke zu liegen kommt. Wird es nämlich (vorausgesetzt, dafs man eine Auflösung gefunden hat) auch noch andre geben, bei welchen dasselbe Anfangsfeld zu Grunde liegt, die aber auf andre Schlufsfelder führen? Und wenn dies der Fall ist: woran wird man die zu Schlufsfeldern geeigneten Felder erkennen?

Es ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes, die angeregten Fragen theilweise zu beantworten; wozu es nothwendig ist, die Aufgabe des Solitär-Spiels fürs erste zu verlassen und statt ihrer mit der hier folgenden, verwandten Untersuchung zu beginnen. Ehe wir jedoch dazu übergehen, ist es nöthig, einiger Erklärungen und Sätze aus der allgemeinen Arithmetik, welche dabei Anwendung finden, zu gedenken.

Zwei Zahlen a und b sind *gleichnamig*, wenn sie beide *gerade* oder beide *ungerade* sind; *ungleichnamig* aber, wenn die eine *gerade*, die andre *ungerade* ist.

Ihr *Gleichnamigkeitsverhältnifs* drückt aus, ob das eine oder das andre der Fall sei. Wir bezeichnen es durch $G(a:b)$, wofür man auch $G(b:a)$ schreiben kann.

Jede Zahl ist mit sich selbst gleichnamig. 0 ist mit *geraden* Zahlen gleichnamig.

Ist $a = b \pm 2c$, so sind a und b gleichnamig.

Sind die zusammengesetzten Zahlen $a+b$ und $c+d$ gleichnamig, so hat man:

$$G(a:b) = G(c:d).$$

Umgekehrt: Findet diese Gleichung Statt, so sind $a+b$ und $c+d$ gleichnamige Zahlen.

Es ist also auch allgemein:

$$G(a+b:c+d) = G(a+c:b+d).$$

Sind c und d gleichnamige Zahlen, so hat man

$$G(a:b) = G(a+c:b+d);$$

also auch:

$$G(a:b) = G(a \pm c:b \pm c).$$

Ist

$$G(a:b) = G(\alpha:\beta); \qquad G(a:c) = G(\alpha:\gamma),$$

so ist auch

$$G(b:c) = G(\beta:\gamma);$$

was durch die Gleichung

$$G(a:b:c) = G(\alpha:\beta:\gamma)$$

bezeichnet werden soll.

Findet diese Gleichung Statt, so werden wir von den beiden Zahlenreihen a, b, c und α, β, γ sagen, dafs sie in Bezug auf Gleichnamigkeit *identisch* seien; wobei vorausgesetzt wird, dafs in diesen Reihen die gleichliegenden Zahlen einander entsprechen.

In jeder Reihe von drei Zahlen müssen zwei unter sich gleichnamig sein; dagegen kann die dritte mit jenen beiden ungleichnamig oder gleichnamig sein.

1.

Man habe nun drei Gruppen von Punkten A, B, C, von denen die erste a, die zweite b und die dritte c Punkte enthalte. Die Gruppenreihe A, B, C und die Zahlenreihe a, b, c werden sich alsdann gegenseitig entsprechen; nämlich jede Zahl der gleichliegenden Gruppe, und umgekehrt.

Man nenne es einen Zug, wenn man von zwei beliebigen Gruppen je einen Punkt wegnimmt und zu der dritten einen hinzufügt; auch sage man, dafs der Zug auf diese dritte vermehrte Gruppe gehe. Die solchermafsen bestimmten Züge unterscheiden sich von denen des Solitär-Spiels dadurch, dafs sie auch auf die mittlere Gruppe gehen können.

Da man von einer leeren Gruppe keinen Punkt wegnehmen kann, oder mit andern Worten: da keine der Punktenzahlen negativ werden kann, so folgt mit Rücksicht auf vorstehende Erklärung:

1^{stens} dafs, wenn eine Gruppe leer ist, nur auf diese ein Zug möglich ist;

2^{tens} dafs man, wenn zwei Gruppen leer sind, gar keinen Zug thun kann;

3^{tens} dafs die Gruppe, auf welche ein Zug geht, nicht durch diesen geleert werden kann; dafs also durch keinen Zug alle Gruppen zugleich leer werden können.

2.

Da durch jeden Zug die Anzahl sämmtlicher Punkte um Einen vermindert wird, so kann man durch eine Reihenfolge von Zügen jene Anzahl

nach und nach reduciren und bis zu einer gewissen, von 0 verschiedenen Gränze abnehmen lassen. Nun ist aber einerseits immer ein Zug möglich, so lange nicht zwei Gruppen geleert sind; andrerseits ist jedoch die ***Anzahl*** sämmtlicher Züge eine endliche, nämlich jedenfalls $< a+b+c$; man mufs daher, wie man auch die Züge auf einander folgen lasse, zuletzt dahin gelangen, dafs zwei Gruppen geleert seien. Um nun zu bestimmen, woran diese beiden Gruppen zu erkennen seien und welches die kleinste Anzahl von Punkten sei, die in der dritten Gruppe übrig bleiben können, nehme man zuvörderst an, dafs man eine willkührliche Anzahl beliebiger Züge thue, und dafs von diesen l auf die Gruppe A, m auf B und n auf C gehen. Sind, *nach* den Zügen, in den Gruppen A, B, C, resp. noch α, β, γ Punkte vorhanden, so ist

$$\alpha = a + l - m - n;$$
$$\beta = b + m - l - n;$$
$$\gamma = c + n - l - m;$$

denn durch jeden Zug, welcher auf eine bestimmte Gruppe geht, werden die darin enthaltenen Punkte um einen vermehrt, während sie durch jeden Zug auf eine andre Gruppe um Einen vermindert werden.

Man findet demnach:

$$\alpha+\beta = a+b-2n; \qquad \alpha+\gamma = a+c-2m;$$

woraus sich die Gleichnamigkeit von $\alpha+\beta$ und $a+b$, so wie diejenige von $\alpha+\gamma$ und $a+c$ ergiebt. Also ist auch

$$\mathrm{G}(\alpha:\beta) = \mathrm{G}(a:b); \qquad \mathrm{G}(\alpha:\gamma) = \mathrm{G}(a:c);$$

oder

$$\mathrm{G}(\alpha:\beta:\gamma) = \mathrm{G}(a:b:c).$$

Sollen nun zwei der drei Zahlen α, β, γ, $= 0$ sein, so müssen die ihnen entsprechenden unter a, b, c, unter sich gleichnamig sein; denn 0 ist mit sich selbst gleichnamig. Folglich können nur zwei solche Gruppen zugleich leer werden, deren ursprüngliche Punktenzahlen unter sich gleichnamig sind.

Da ferner 0 mit geraden Zahlen gleichnamig ist, so wird in der nicht geleerten Gruppe eine ungerade oder gerade Anzahl von Punkten übrig bleiben, je nachdem ihre ursprüngliche Punktenzahl mit denen der beiden andern Gruppen ungleichnamig oder gleichnamig ist. Im ersten Falle wird also die kleinste Anzahl von Punkten in der ***Restgruppe*** $= 1$ und im zweiten Falle $= 2$ sein.

3.

Bleiben in der Restgruppe mehr als zwei Punkte übrig, so kann man diese durch eine Umänderung und Fortsetzung der Züge auf ihr Minimum reduciren. Das dabei zu beobachtende Verfahren wird am besten aus einem Beispiele erhellen. Man nehme an, dafs $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma > 2$. In diesem Falle wird, nach Art. 1, der letzte Zug (durch welchen die Zahlenreihe 0, 0, γ geworden ist) auf die Gruppe C gegangen sein. *Vor* dem letzten Zuge, d. h. nach dem vorletzten, mufs also die Zahlenreihe 1, 1, $\gamma-1$ gewesen sein. Läfst man daher den letzten Zug weg und thut statt seiner erst einen auf A und dann einen auf B, so geht die Reihe 1, 1, $\gamma-1$ in 2, 0, $\gamma-2$ und diese in 1, 1, $\gamma-3$ über. Setzt man dies Verfahren fort, indem man immer erst einen Zug auf A und dann einen auf B thut, so erhält man nach und nach die Reihen 1, 1, $\gamma-5$; 1, 1, $\gamma-7$; u. s. w.; also zuletzt 1, 1, 0, oder 1, 1, 1, je nachdem γ ungerade oder gerade ist. Im ersten Falle ist nur noch ein Zug möglich, nämlich auf C, durch welchen die Reihe 1, 1, 0 in 0, 0, 1 übergeht und die Reduction vollendet ist. Im zweiten Falle geschieht dies, wenn man auf eine beliebige der drei Gruppen einen Zug thut; wodurch sich aus 1, 1, 1 eine der drei Reihen 2, 0, 0; 0, 2, 0; 0, 0, 2 ergiebt. Hier ist also die Lage der Restgruppe unbestimmt. Dieselbe Unbestimmtheit wird übrigens auch dann stattfinden, wenn γ selbst $= 2$ ist. Denn in diesem Falle mufs die Zahlenreihe vor dem letzten Zuge 1, 1, 1 gewesen sein; es steht also nach dem vorletzten ein Zug auf jede der drei Gruppen frei, so dafs man eben sowohl auf 2, 0, 0, oder 0, 2, 0, als auf 0, 0, 2 gelangen kann.

Man ersieht aus dem Vorhergehenden, dafs es immer möglich ist, die Gruppen A, B, C bis auf einen oder zwei (in einer einzigen Gruppe enthaltene) Punkte zu leeren, und dafs das erste der Fall sein wird, wenn eine der ursprünglichen Punktenzahlen a, b, c mit den beiden andern ungleichnamig ist, das zweite hingegen, wenn jene Zahlen alle unter sich gleichnamig sind. Ueberdies ist im ersten Falle die Restgruppe eine bestimmte, nämlich diejenige, deren Punktenzahl mit denen der beiden andern ungleichnamig ist; im zweiten Falle hingegen kann jede Gruppe als Restgruppe dienen.

Demzufolge kann man in allen Fällen das definitive Ergebnifs der Reduction nach der ursprünglichen Zahlenreihe bestimmen, ohne dafs es nöthig wäre, die Züge wirklich auszuführen.

4.

Wir gehen nun von den aus drei Gruppen bestehenden Reihen zu *Systemen* über, in welchen *neun* Gruppen auf die Weise geordnet sind, dafs sie sowohl in horizontaler als in verticaler Richtung Reihen bilden; wie es z. B. in dem Systeme

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{cases}$$

der Fall ist. Dieses Systems werden wir uns bedienen, um jeder Gruppe einen Namen zu geben; dagegen soll die Anzahl der Punkte, welche jede Gruppe enthält, durch andre Systeme — Zahlensysteme — wie z. B.

$$\text{(II.)} \quad \begin{cases} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{cases}$$

dargestellt werden, indem jede darin enthaltene Zahl auf die gleichliegende Gruppe des Systems (I.) bezogen wird.

Läfst man in einem Gruppensysteme horizontale und verticale Züge zu, oder bestimmter: gestattet man in jeder horizontalen und in jeder verticalen Reihe die in Art. 1 bestimmte Art von Zügen, so kann man diese auf beliebige Weise so lange fortsetzen, als nicht in allen horizontalen und verticalen Reihen zwei Gruppen geleert sind. Ist dies aber der Fall, so werden nicht mehr als drei Gruppen noch Punkte enthalten und von diesen Restgruppen wird keine in derselben horizontalen oder verticalen Reihe liegen, wie eine andre. Ein solches Resultat schliefst übrigens nicht aus, dafs in einer, und sogar in zwei parallel liegenden Reihen auch die dritte Gruppe leer geworden sei; was zwar nicht durch Züge in einer solchen Reihe, wohl aber durch andre in senkrecht darauf liegenden erreicht werden kann. Es können demnach zuletzt eine, zwei oder drei Restgruppen übrig bleiben.

5.

Die Restgruppen werden zwar im allgemeinen auch mehr als zwei Punkte enthalten können; es ist aber immer möglich, die Züge so auszuwählen, dafs in keiner derselben mehr als einer oder zwei übrig bleiben.

Um dies völlig klar zu machen, mufs man zuvörderst bemerken, dafs es bei der Bestimmung der Punktenzahl einer jeden Restgruppe nur auf die Anzahl und Beschaffenheit der Züge, nicht aber auf deren Ordnung ankommt.

Bezeichnet man nämlich eine beliebige der Restgruppen mit R, und sind *vor* den Zügen r, *nach* denselben ϱ Punkte in ihr enthalten, so wird die Gruppe R zugleich in einer horizontalen Reihe H und in einer verticalen V liegen, und alle Züge, welche in keiner dieser beiden Reihen stattfinden, werden ohne Einfluſs auf den Werth von ϱ sein. Gehen aber in der Reihe H, h Züge auf R, h' auf die beiden andern Gruppen, und in der Reihe V, v Züge auf R, v' auf die beiden andern Gruppen, so folgt aus der Natur der Züge, daſs

$$\varrho = r + h + v - h' - v'$$

ist: ein Werth, welcher, wie man sieht, nicht nur von den Zügen aufserhalb H und V und deren Ordnung, sondern auch von der Ordnung der Züge innerhalb jener Reihen unabhängig ist.

Man kann demzufolge annehmen, daſs der letzte aller Züge auf R gegangen sei. Ist aber $\varrho > 2$, so kann man, wie in (Art. 3) diesen Zug als ungeschehen betrachten und durch eine Reihenfolge andrer Züge, welche in derselben Reihe, wie der weggelassene Statt zu finden haben, den Werth von ϱ bis auf 1 oder 2 abnehmen lassen.

Sind in einem gegebenen Systeme durch eine Reihenfolge von Zügen alle Gruppen bis auf eine, zwei oder höchstens drei leer geworden: liegt von diesen Restgruppen, wenn es ihrer mehrere sind, keine in derselben horizontalen oder verticalen Reihe, wie eine andre, und enthalten sie nicht mehr als einen oder zwei Punkte, so werden wir das auf diese Weise entstandene System ein *Reductions-Ergebniſs* des gegebenen nennen.

Es giebt mithin in allem *neun* verschiedene Arten oder Klassen von Reductions-Ergebnissen; nämlich folgende:

I. Eine Restgruppe mit einem Punkte.
II. Eine Restgruppe mit einem, und eine mit zwei Punkten.
III. Eine Restgruppe mit einem und zwei mit zwei Punkten.
IV. Zwei Restgruppen mit einem Punkte.
V. Zwei Restgruppen mit einem, und eine mit zwei Punkten.
VI. Drei Restgruppen mit einem Punkte.
VII. Eine Restgruppe mit zwei Punkten.
VIII. Zwei Restgruppen mit zwei Punkten.
IX. Drei Restgruppen mit zwei Punkten.

Die Reductions-Ergebnisse können durch ihre Zahlensysteme dargestellt werden. So stellen z. B. die folgenden einen Fall aus jeder Klasse dar:

I. 100	II. 100	III. 100	IV. 100	V. 100
000	020	020	010	010
000	000	002	000	002
VI. 100	VII. 200	VIII. 200	IX. 200	
010	000	020	020	
001	000	000	002	

6.

Es soll nunmehr untersucht werden, auf welcherlei Reductions-Ergebnisse ein Gruppensystem (I.), welches nebst seinem Zahlensysteme (II.) gegeben ist, führen könne; oder, was dasselbe ist, welchen Bedingungen ein System genügen müsse, wenn sein Reductions-Ergebnifs zu einer bestimmten Klasse gehören soll. Zu diesem Zwecke nehme man zuvörderst an, dafs man eine willkürliche Anzahl beliebiger Züge thue, und dafs durch dieselben das System (II.) in

$$\text{(III.)} \quad \begin{cases} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' \end{cases}$$

übergehe. Zwischen den Systemen (II.) und (III.) wird alsdann folgende allgemeine Beziehung Statt finden:

Entnimmt man dem Systeme (II.) zwei beliebige parallele Reihen $\boldsymbol{R}^u$ und $\boldsymbol{R}^v$ und dem Systeme (III.) die beiden gleichliegenden $\boldsymbol{P}^u$ und $\boldsymbol{P}^v$, addirt darauf 1^{stens} in $\boldsymbol{R}^u$ und $\boldsymbol{R}^v$, 2^{tens} in $\boldsymbol{P}^u$ und $\boldsymbol{P}^v$ alle gleichliegenden Zahlen, so erhält man zwei in Bezug auf Gleichnamigkeit identische Reihen; d. h. es werden folgende Gleichungen bestehen:

1. $\mathrm{G}(a' + b' : a'' + b'' : a''' + b''') = \mathrm{G}(\alpha' + \beta' : \alpha'' + \beta'' : \alpha''' + \beta''')$
2. $\mathrm{G}(a' + c' : a'' + c'' : a''' + c''') = \mathrm{G}(\alpha' + \gamma' : \alpha'' + \gamma'' : \alpha''' + \gamma''')$
3. $\mathrm{G}(b' + c' : b'' + c'' : b''' + c''') = \mathrm{G}(\beta' + \gamma' : \beta'' + \gamma'' : \beta''' + \gamma''')$
4. $\mathrm{G}(a' + a'' : b' + b'' : c' + c'') = \mathrm{G}(\alpha' + \alpha'' : \beta' + \beta'' : \gamma' + \gamma'')$
5. $\mathrm{G}(a' + a''' : b' + b''' : c' + c''') = \mathrm{G}(\alpha' + \alpha''' : \beta' + \beta''' : \gamma' + \gamma''')$
6. $\mathrm{G}(a'' + a''' : b'' + b''' : c'' + c''') = \mathrm{G}(\alpha'' + \alpha''' : \beta'' + \beta''' : \gamma'' + \gamma''')$.

Um die Richtigkeit dieser Gleichungen darzuthun, nehme man an, dafs von den geschehenen Zügen

l'	horizontale	und	λ'	verticale	auf	A'
m'	–	–	μ'	–	–	B'
n'	–	–	ν'	–	–	C'
l''	–	–	λ''	–	–	A''
m''	–	–	μ''	–	–	B''
n''	–	–	ν''	–	–	C''
l'''	–	–	λ'''	–	–	A'''
m'''	–	–	μ'''	–	–	B'''
n'''	–	–	ν'''	–	–	C'''

gehen. Man hat alsdann, der Natur der Züge zufolge, die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= a' + l' - m' - n' + \lambda' - \lambda'' - \lambda''' \\
\beta' &= b' + m' - l' - n' + \mu' - \mu'' - \mu''' \\
\gamma' &= c' + n' - l' - m' + \nu' - \nu'' - \nu''' \\
\alpha'' &= a'' + l'' - m'' - n'' + \lambda'' - \lambda' - \lambda''' \\
\beta'' &= b'' + m'' - l'' - n'' + \mu'' - \mu' - \mu''' \\
\gamma'' &= c'' + n'' - l'' - m'' + \nu'' - \nu' - \nu''' \\
\alpha''' &= a''' + l''' - m''' - n''' + \lambda''' - \lambda' - \lambda'' \\
\beta''' &= b''' + m''' - l''' - n''' + \mu''' - \mu' - \mu'' \\
\gamma''' &= c''' + n''' - l''' - m''' + \nu''' - \nu' - \nu'',
\end{aligned}$$

woraus man zuerst durch Addition

$$\begin{aligned}
\alpha' + \beta' + \alpha'' + \beta'' &= a' + b' + a'' + b'' - 2(n' + n'' + \lambda''' + \mu''') \\
\alpha' + \beta' + \alpha''' + \beta''' &= a' + b' + a''' + b''' - 2(n' + n''' + \lambda'' + \mu'')
\end{aligned}$$

erhält. Mithin werden $\alpha' + \beta' + \alpha'' + \beta''$ und $a' + b' + a'' + b''$, und eben so $\alpha' + \beta' + \alpha''' + \beta'''$ und $a' + b' + a''' + b'''$ unter sich gleichnamig sein. Also hat man

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}(\alpha' + \beta' : \alpha'' + \beta'') &= \mathrm{G}(a' + b' : a'' + b'') \\
\mathrm{G}(\alpha' + \beta' : \alpha''' + \beta''') &= \mathrm{G}(a' + b' : a''' + b'''),
\end{aligned}$$

woraus sich die Richtigkeit der ersten Gleichung ohne Weiteres ergiebt. Die übrigen lassen sich auf ganz analoge Weise beweisen, was wir jedoch, um überflüssige Wiederholungen zu vermeiden, übergehen *).

---

*) Wählt man zwei dieser Gleichungen so aus, dafs sie zusammen alle neun Zahlen $a', b', c', a'', \ldots$ und folglich auch alle neun Zahlen $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \ldots$ enthalten, so begreifen sie immer auch die vier übrigen *implicite* in sich; d. h. man kann diese aus jenen direct herleiten.

Zum Beweise dieses Satzes, dessen wir übrigens zu unserm Zwecke nicht bedürfen, wird es genügen, die beiden ersten Gleichungen, welche, wie überhaupt je zwei der

In Folge dieser Gleichungen sind die Gleichnamigkeitsverhältnisse in den sechs Reihen $\alpha'+\beta'$, $\alpha''+\beta''$, $\alpha'''+\beta'''$; $\alpha'+\gamma'$, $\alpha''+\gamma''$, $\alpha'''+\gamma'''$; u. s. w. als bekannt anzusehen, da $a'+b'$, $a''+b''$ u. s. w. gegebene Zahlen sind.

7.

Da es bei einer Reihe von drei Zahlen nur zwei Arten oder Kategorien von Gleichnamigkeitsverhältnissen giebt, indem nämlich eine Zahl mit den beiden andern entweder ungleichnamig oder gleichnamig sein mufs, so müssen in zwei Reihen, wie z. B.

(a) $a'+b'$, $a''+b''$, $a'''+b'''$ und $a'+c'$, $a''+c''$, $a'''+c'''$

oder in den von ihnen abhängigen

(α) $\alpha'+\beta'$, $\alpha''+\beta''$, $\alpha'''+\beta'''$ und $\alpha'+\gamma'$, $\alpha''+\gamma''$, $\alpha'''+\gamma'''$

---

drei ersten oder der drei letzten, die erwähnte Eigenschaft haben, zu Grunde zu legen, indem der Beweis für jedes andre Paar ganz ähnlich ist.

Man entnehme also den beiden ersten Gleichungen die darin enthaltenen:

$$G(\alpha'+\beta':\alpha''+\beta'') = G(a'+b':a''+b'')$$
$$G(\alpha'+\gamma':\alpha''+\gamma'') = G(a'+c':a''+c''),$$

woraus sich auf die Gleichnamigkeit der Zahlen $\alpha'+\beta'+\alpha''+\beta''$ und $a'+b'+a''+b''$ und ebenso auf diejenige von $\alpha'+\gamma'+\alpha''+\gamma''$ und $a'+c'+a''+c''$ schliefsen läfst. Aus diesen Verhältnissen ergiebt sich ferner, durch Addition, die Gleichnamigkeit von

$$2\alpha'+2\alpha''+\beta'+\gamma'+\beta''+\gamma'' \text{ und } 2a'+2a''+b'+c'+b''+c''$$

und folglich auch diejenige von $\beta'+\gamma'+\beta''+\gamma''$ und $b'+c'+b''+c''$. Es ist daher auch

$$G(\beta'+\gamma':\beta''+\gamma'') = G(b'+c':b''+c'').$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$G(\beta'+\gamma':\beta'''+\gamma''') = G(b'+c':b'''+c''')$$

aus

$$G(\alpha'+\beta':\alpha'''+\beta''') = G(a'+b':a'''+b''')$$

und

$$G(\alpha'+\gamma':\alpha'''+\gamma''') = G(a'+c':a'''+c''');$$

wodurch die Richtigkeit der dritten Gleichung vollständig bewiesen ist. Die Richtigkeit der vierten Gleichung erhellet noch einfacher aus der schon bemerklich gemachten Gleichnamigkeit von $\alpha'+\beta'+\alpha''+\beta''$ und $a'+b'+a''+b''$ und von $\alpha'+\gamma'+\alpha''+\gamma''$ und $a'+c'+a''+c''$, indem sich daraus unmittelbar

$$G(\alpha'+\alpha'':\beta'+\beta'') = G(a'+a'':b'+b'')$$

und

$$G(\alpha'+\alpha'':\gamma'+\gamma'') = G(a'+a'':c'+c'')$$

ergiebt. Auf ganz ähnliche Weise verfährt man bei der fünften und sechsten Gleichung, indem man von

$$G(\alpha'+\beta':\alpha'''+\beta''') = G(a'+b':a'''+b''')$$
$$G(\alpha'+\gamma':\alpha'''+\gamma''') = G(a'+c':a'''+c''')$$

und

$$G(\alpha''+\beta'':\alpha'''+\beta''') = G(a''+b'':a'''+b''')$$
$$G(\alpha''+\gamma'':\alpha'''+\gamma''') = G(a''+c'':a'''+c''')$$

ausgeht.

die gleichzeitig bestehenden Gleichnamigkeitsverhältnisse nothwendiger Weise zu einer der folgenden Kategorien gehören:

I. und II. In jeder Reihe ist eine bestimmte Zahl mit den beiden übrigen ungleichnamig, und diese bestimmten Zahlen haben in beiden Reihen I. gleiche, II. ungleiche Lage.

III. In der einen Reihe ist eine bestimmte Zahl mit den beiden übrigen ungleichnamig, während in der andern alle Zahlen unter sich gleichnamig sind.

IV. In beiden Reihen sind alle Zahlen unter sich gleichnamig.

Hierbei ist nicht zu übersehen, dafs es in jeder Reihe, in welcher nicht alle Zahlen unter sich gleichnamig sind, drei Fälle giebt, indem nämlich entweder die erste mit der zweiten und dritten, oder die zweite mit der ersten und dritten, oder endlich die dritte mit der ersten und zweiten ungleichnamig sein kann. Es wird daher, um es möglich zu machen, diese Fälle unter einem einzigen zu begreifen und zugleich die Lage der in den Systemen (II.) und (III.) enthaltenen Zahlen auf eine allgemeinere Weise zu bezeichnen, gut sein, die Accente $(', '', ''')$ durch r, s, t zu ersetzen; wo unter r ein beliebiger dieser Accente, unter s ein beliebiger der beiden andern und unter t der übrig bleibende verstanden wird. Diese Substitutionen verwandeln die Zahlen $a', b', c', a'', \ldots$ in $a^r, b^r, c^r, a^s, \ldots$; die Zahlen $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \ldots$ in $\alpha^r, \beta^r, \gamma^r, \alpha^s, \ldots$ und die Reihen (a) und (α) in

$$(a)' \quad a^r+b^r,\ a^s+b^s,\ a^t+b^t \quad \text{und} \quad a^r+c^r,\ a^s+c^s,\ a^t+c^t$$

und

$$(\alpha)' \quad \alpha^r+\beta^r,\ \alpha^s+\beta^s,\ \alpha^t+\beta^t \quad \text{und} \quad \alpha^r+\gamma^r,\ \alpha^s+\gamma^s,\ \alpha^t+\gamma^t,$$

wodurch nur die Ordnung, nicht aber der Werth der Zahlen geändert werden kann; während in den Reihen $(a)'$ und $(\alpha)'$, eben so wie in den Reihen (a) und (α), die gleichliegenden Zahlen sich wechselsweise entsprechen: so dafs die Kategorie der Gleichnamigkeitsverhältnisse in $(a)'$ und $(\alpha)'$ in allen Fällen dieselbe, wie die in (a) und (α) geltende, sein wird.

8.

Zwischen der Kategorie der Gleichnamigkeitsverhältnisse, welche in den Reihen (a) oder $(a)'$ Statt finden und der Klasse des Reductions-Ergebnisses, welches man aus dem ursprünglichen Systeme herleiten kann, besteht eine gegenseitige Abhängigkeit, die wir nunmehr näher zu erörtern im Stande sind. Nimmt man nämlich an, dafs aus den Zügen, deren Anzahl und

Beschaffenheit im Vorigen als willkürlich angesehen worden, ein bestimmtes Reductions-Ergebnifs hervorgehe, so werden dadurch die Zahlen $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \ldots$ oder $\alpha^r, \beta^r, \gamma^r, \alpha^s, \ldots$ bestimmte Werthe $(0, 1, 2)$ erhalten, und je nach diesen Werthen werden sich auch die in den Reihen $(\alpha)'$ enthaltenen Zahlen angeben lassen. Kennt man aber diese Zahlen, so kennt man auch die in denselben Reihen Statt findenden Gleichnamigkeitsverhältnisse, welche, wie wir wissen, mit den in den Reihen $(a)'$ bestehenden identisch sind. Man hat also, um die gegenseitige Beziehung zwischen diesen letzteren und den Reductions-Ergebnissen festzusetzen, alle möglichen Fälle in dieser Hinsicht klassenweise zu prüfen. Ehe man jedoch dazu schreitet, wird es zweckmäfsig sein, die Bemerkung vorauszuschicken, dafs es dabei auf die Restgruppen mit zwei Punkten nicht ankommt; d. h. dafs es rücksichtlich der in den Reihen $(\alpha)'$ Statt findenden Gleichnamigkeitsverhältnisse einerlei ist, ob man sich eine vorhandne Restgruppe mit zwei Punkten als bestehend, oder als nicht bestehend vorstellt. Im ersten Falle wird nämlich die ihr entsprechende unter den Zahlen $\alpha^r, \beta^r, \gamma^r, \alpha^s, \ldots, = 2$, im zweiten dagegen $= 0$ werden. Es ist aber augenscheinlich, dafs die Substitution des einen dieser Werthe für den andern die Gleichnamigkeitsverhältnisse in den Reihen $(\alpha)'$ unverändert läfst, da $\alpha^r + \beta^r$ und $\alpha^r + \beta^r - 2$, $\alpha^s + \beta^s$ und $\alpha^s + \beta^s - 2$, u. s. w. unter sich gleichnamig sind.

9.

Aus dieser Bemerkung folgt zunächst, dafs Reductions-Ergebnisse, welche zu der ***ersten, zweiten*** oder ***dritten*** Klasse gehören, auf identische Gleichnamigkeitsverhältnisse in den Reihen $(\alpha)'$ und mithin auch in den Reihen $(a)'$ führen, wenn nur die Restgruppe mit einem Punkte in ihnen dieselbe Lage hat. Es genügt also, statt aller drei, nur die erste in der angedeuteten Hinsicht zu prüfen. Da nun in derselben acht Zahlen $= 0$ sind, während die neunte $= 1$ wird, so sind hier nur die drei Fälle: $1^{\text{stens}}\ \alpha^r = 1$, $2^{\text{tens}}\ \beta^r = 1$, $3^{\text{tens}}\ \gamma^r = 1$ zu berücksichtigen, weil r jeden der drei Accente bedeuten kann. Nun gehen aber die Reihen $(\alpha)'$ im ersten Falle in 1, 0, 0 und 1, 0, 0; im zweiten in 1, 0, 0 und 0, 0, 0; im dritten in 0, 0, 0 und 1, 0, 0 über. Also werden, da 0 mit geraden Zahlen gleichnamig ist, und da in den Reihen $(a)'$ dieselben Gleichnamigkeitsverhältnisse wie in $(\alpha)'$ Statt finden:

im ersten Fall:

$a^r + b^r$ mit $a^s + b^s$ und $a^t + b^t$ ungleichnamig,
$a^r + c^r$ mit $a^s + c^s$ und $a^t + c^t$ ungleichnamig;

im zweiten Falle:

$$a^r + b^r \text{ mit } a^s + b^s \text{ und } a^t + b^t \text{ ungleichnamig,}$$
$$a^r + c^r,\ a^s + c^s,\ a^t + c^t \text{ unter sich gleichnamig;}$$

im dritten Falle:

$$a^r + b^r,\ a^s + b^s,\ a^t + b^t \text{ unter sich gleichnamig,}$$
$$a^r + c^r \text{ mit } a^s + c^s \text{ und } a^t + c^t \text{ ungleichnamig}$$

sein. Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Läfst sich aus einem Systeme ein Reductionsergebnifs *erster*, *zweiter* oder *dritter* Klasse herleiten, so müssen die Gleichnamigkeitsverhältnisse in den nach jenem Systeme gebildeten Reihen $(a)'$ oder (a) zur *ersten* oder *dritten* Kategorie gehören.

Die vorausgeschickte Bemerkung zeigt ferner, dafs die Prüfung der fünften Klasse auf die der vierten zurückgeführt werden kann. Es sind in dieser sieben Zahlen $= 0$, die beiden andern $= 1$; also genügt es, der allgemeinen Bedeutung der Accente r und s wegen, die Fälle: $1^{\text{stens}}\ \alpha^r = 1,\ \beta^s = 1$; $2^{\text{tens}}\ \alpha^r = 1,\ \gamma^s = 1$; $3^{\text{tens}}\ \beta^r = 1,\ \gamma^s = 1$, zu betrachten. Die Reihen $(\alpha)'$ nehmen aber im ersten Falle die Werthe 1, 1, 0 und 1, 0, 0; im zweiten die Werthe 1, 0, 0 und 1, 1, 0; im dritten die Werthe 1, 0, 0 und 0, 1, 0 an; woraus folgt, dafs

im ersten Falle:

$$a^t + b^t \text{ mit } a^r + b^r \text{ und } a^s + b^s,$$
$$a^r + c^r \text{ mit } a^s + c^s \text{ und } a^t + c^t;$$

im zweiten Falle:

$$a^r + b^r \text{ mit } a^s + b^s \text{ und } a^t + b^t,$$
$$a^t + c^t \text{ mit } a^r + c^r \text{ und } a^s + c^s;$$

im dritten Falle:

$$a^r + b^r \text{ mit } a^s + b^s \text{ und } a^t + b^t,$$
$$a^s + c^s \text{ mit } a^r + c^r \text{ und } a^t + c^t$$

ungleichnamig sind. Man hat also folgenden Satz:

Läfst sich aus einem Systeme ein Reductions-Ergebnifs *vierter* oder *fünfter* Klasse herleiten, so müssen die Gleichnamigkeitsverhältnisse in den nach jenem Systeme gebildeten Reihen (a) zur *zweiten* Kategorie gehören.

Es ist übrigens hierbei zu bemerken, dafs die obigen drei Fälle eigentlich nur einen einzigen darstellen, da die Gleichnamigkeitsverhältnisse in den Reihen $(a)'$, auf welche sie führen, sich durch Vertauschung der Accente

aus einander herleiten lassen. So gehen die im ersten und zweiten Falle gültigen Verhältnisse durch Vertauschung von r und t, die im zweiten und dritten bestehenden durch Vertauschung von s und t gegenseitig in einander über.

Es ist ferner leicht zu sehen, dafs die Gleichnamigkeitsverhältnisse in den Reihen $(a)'$, auf welche ein beliebiger der aufgestellten Fälle führt, sich noch aus zwei andern ähnlichen Fällen herleiten lassen. So wird z. B.

$$a^r + b^r \text{ mit } a^s + b^s \text{ und } a^t + b^t,$$
$$a^s + c^s \text{ mit } a^r + c^r \text{ und } a^t + c^t,$$

ungleichnamig bleiben, wenn man statt $\beta^r = 1$, $\gamma^s = 1$, entweder $\alpha^r = 1$, $\gamma^t = 1$, oder $\alpha^s = 1$, $\beta^t = 1$, setzt.

Geht man nun zur Prüfung der ***sechsten*** Klasse über, worin drei Zahlen $= 1$ werden, so genügt es, einen einzigen Fall, z. B. $\alpha^t = 1$, $\beta^s = 1$, $\gamma^r = 1$, zu berücksichtigen, da hier alle Basen (α, β, γ) zugleich vorkommen und mithin, je nach der Bedeutung der Accente, alle möglichen Fälle erzeugt werden können. In Folge dieser Bestimmungen erhalten aber die Reihen $(\alpha)'$ die Werthe 0, 1, 1 und 1, 0, 1. Es mufs also

$$a^r + b^r \text{ mit } a^s + b^s \text{ und } a^t + b^t,$$
$$a^s + c^s \text{ mit } a^r + c^r \text{ und } a^t + c^t$$

ungleichnamig sein, woraus sich auf denselben Satz wie bei der ***vierten*** und ***fünften*** Klasse schliefsen läfst.

Was endlich die ***siebente, achte*** und ***neunte*** Klasse betrifft, bei welchen nur Restgruppen mit zwei Punkten vorkommen, so werden die Zahlen α^r, β^r, γ^r, α^s, ... theils $= 2$, theils $= 0$ sein; mithin mufs dasselbe auch in Bezug auf die in den Reihen $(\alpha)'$ enthaltenen Zahlen der Fall sein. Folglich werden diese Reihen, und ebenso die Reihen $(a)'$ und (a), nur aus unter sich gleichnamigen Zahlen bestehen; was auf folgenden Satz führt:

> Läfst sich aus einem Systeme ein Reductions-Ergebnifs ***siebenter, achter*** oder ***neunter*** Klasse herleiten, so müssen die Gleichnamigkeitsverhältnisse in den nach jenem Systeme gebildeten Reihen $(a.)$ zur ***vierten*** Kategorie gehören.

10.

Da sich jede Kategorie auf bestimmte Klassen und jede Klasse auf bestimmte Kategorien bezieht, so lassen sich die eben gefundenen Sätze auch ***umkehren***. Gehören nämlich in einem gegebenen Systeme die Gleichnamigkeitsverhältnisse in den Reihen (a) zur ***ersten*** oder ***dritten*** Kategorie, so

kann man aus demselben nur Reductions-Ergebnisse *erster, zweiter* oder *dritter* Klasse herleiten. Gehören dagegen jene Gleichnamigkeitsverhältnisse zur *zweiten* Kategorie, so sind nur Reductions-Ergebnisse *vierter, fünfter* oder *sechster* Klasse möglich. Gehören sie endlich zur *vierten* Kategorie, so mufs das Reductions-Ergebnifs der *siebenten, achten* oder *neunten* Klasse angehören. Hiermit ist die zu Anfang des Art. 6 gestellte Aufgabe vollständig gelöst.

Eine wichtige Bemerkung, die sich aus den Erörterungen des vorigen Artikels ergiebt, ist die, dafs sich die Lage der Restgruppen mit *einem* Punkte in allen Klassen, wo sie vorkommen, ohne die Züge zu thun, aus den in den Reihen (*a*) Statt findenden Gleichnamigkeitsverhältnissen im voraus erkennen läfst.

Betrachtet man zunächst die *erste* Kategorie und bezeichnet durch $a^r + b^r$ und $a^r + c^r$ die Zahlen, welche mit den beiden andern in den bezüglichen Reihen enthaltenen ungleichnamig sind, so wird die Restgruppe mit *einem* Punkte der Zahl $a^r(\alpha^r)$ entsprechen.

Wendet man sich nun zu der mit der ersten verwandten *dritten* Kategorie, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: je nachdem in der ersten oder in der zweiten der Reihen (*a*) eine Zahl mit den beiden andern ungleichnamig ist. Bezeichnet man diese im ersten Falle durch $a^r + b^r$ und im zweiten durch $a^r + c^r$, so wird die Restgruppe mit *einem* Punkte, wenn das erste Statt findet, der Zahl b^r, wenn das zweite, der Zahl c^r entsprechen.

Ist endlich die *zweite* Kategorie die geltende, und bezeichnet man durch $a^r + b^r$ die Zahl, welche in der ersten der Reihen (*a*) und durch $a^s + c^s$ diejenige, welche in der zweiten mit den beiden andern ungleichnamig ist; bedeutet ferner t den dritten Accent, so werden die Restgruppen mit *einem* Punkte, 1^{stens} wenn es ihrer zwei sind, den Zahlen b^r und c^s, oder a^r und c^t, oder auch a^s und b^t; 2^{tens} wenn es ihrer drei sind, den Zahlen a^t, b^s, c^r entsprechen.

Was im Gegentheil die Restgruppen mit *zwei* Punkten betrifft, so läfst sich die Lage derselben nicht im voraus bestimmen; sie hängt vielmehr von der Beschaffenheit der jedesmaligen Züge ab und ist im allgemeinen nur der Bedingung unterworfen, dafs keine Restgruppe in der nämlichen horizontalen oder verticalen Reihe liegen darf, wie eine andre.

11.

Welches auch das ursprüngliche System sei, so lassen sich daraus eben sowohl Reductions-Ergebnisse der einen als der andern möglichen Klasse herleiten. Dieser Satz bedarf eines Beweises. Denn obgleich man nach Art. 5 aus jedem Systeme ein Reductions-Ergebnifs herleiten kann, so folgt daraus doch nicht von selbst, dafs es deren von verschiedenen Klassen gebe. Wir beschränken uns jedoch hier darauf, den wichtigsten Theil dieses Satzes zu beweisen, und darzuthun, dafs man jedesmal zu dem einfachsten der möglichen Reductions-Ergebnisse gelangen könne: also, wenn die ***erste*** oder ***dritte*** Kategorie die geltende ist, zu einem der ***ersten*** Klasse; wenn die ***zweite,*** zu einem der ***vierten,*** und wenn die ***vierte,*** zu einem der ***siebenten*** Klasse.

Hierbei wird es nur darauf ankommen, zu zeigen, wie man die Züge, wenn sie nicht unmittelbar auf ein einfachstes, sondern auf ein andres mögliches Reductions-Ergebnifs geführt haben, umändern könne, dafs sich dennoch ein einfachstes ergebe. Betrachtet man also zunächst die ***zweite*** und ***dritte*** Klasse, welche nebst der ***ersten*** bei der ersten und dritten Kategorie vorkommen können, so kann man sie beispielsweise durch die Zahlensysteme

a.		*b.*
100		100
020		020
000		002

darstellen und diese, um jeder Gruppe einen Namen zu geben, auf das System (I.) beziehen. Was nun das System *a.* betrifft, so kann man nach Art. 5 annehmen, dafs der letzte Zug auf die Gruppe B'' gegangen sei. In diesem Falle wird das System *vor* dem Zuge

100	oder	110
111		010
000		010

gewesen sein, je nachdem er ein horizontaler oder verticaler Zug war. Läfst man also diesen letzten Zug weg und thut statt seiner im ersten Falle einen horizontalen Zug auf A'', im zweiten einen verticalen Zug auf B', so entsteht daraus das System

100	oder	120
200		000
000		000

mithin jedesmal ein der Reduction fähiges System. Vollendet man diese durch

Züge in der nicht geleerten Reihe, so erhält man in beiden Fällen

100
000
000

d. h. ein System, welches ein Reductions-Ergebnifs erster Klasse darstellt.

Geht man nun zu dem Systeme *b.* über und nimmt an, dafs die beiden letzten Züge auf B'' und C''' gegangen seien, so wird das System vor denselben eins der folgenden:

1.	2.	3.	4.
100	101	110	111
111	112	010	011
111	001	121	011

gewesen sein, je nachdem 1^{stens} beide Züge horizontal, 2^{tens} der erste horizontal, der zweite vertical, 3^{tens} der erste vertical, der zweite horizontal, 4^{tens} beide vertical waren. Läfst man nun diese Züge auf B'' und C''' weg und thut statt ihrer, ***im ersten Falle:*** einen horizontalen Zug auf A'' und dann einen horizontalen Zug auf A''', ***im zweiten Falle:*** einen horizontalen Zug auf A'' und dann einen verticalen Zug auf C', ***im dritten Falle:*** einen verticalen Zug auf B' und dann einen horizontalen Zug auf A''', ***im vierten Falle:*** einen verticalen Zug auf B' und dann einen verticalen Zug auf C', so erhält man die Systeme

1.	2.	3.	4.
100	102	120	122
200	200	000	000
200	000	200	000,

welche, wie man ohne Schwierigkeit sieht, durch die Vollendung der Reduction in den nicht geleerten Reihen, sämmtlich, wie oben, das System

100
000
000

geben.

Auf ähnliche Weise wie bei den Systemen *a.* und *b.* kann man verfahren, wenn man statt ihrer, andre zur zweiten oder dritten Klasse gehörige zu Grunde legt, oder wenn es sich um andre Klassen von Reductions-Ergebnissen handelt, in welchen Restgruppen mit ***zwei*** Punkten vorkommen. So lassen sich dadurch die Reductions-Ergebnisse der ***fünften*** durch die der ***vierten,*** die der ***achten*** und ***neunten*** durch die der ***siebenten*** ersetzen. Es

bleibt daher nur noch übrig, zu zeigen, wie man bei einem Reductions-Ergebnisse der ***sechsten*** Klasse, z. B. dem durch das System

100
010
001

dargestellten, zu verfahren habe, um daraus ein zur ***vierten*** Klasse gehöriges herzuleiten.

Man nehme also an, dafs der letzte Zug auf die Gruppe C''' gegangen und ein horizontaler Zug gewesen sei. Läfst man diesen Zug weg und geht mithin auf das System

100
010
110

zurück, so kann man auf dreierlei Arten zwei auf einander folgende Züge thun, nämlich: 1^{stens} einen Zug in jeder der beiden ersten verticalen Reihen, 2^{tens} einen Zug in der ersten verticalen und dann einen in der zweiten horizontalen, 3^{tens} einen Zug in der zweiten verticalen und dann einen in der ersten horizontalen Reihe, woraus die Systeme

1.	2.	3.
010	000	001
100	001	000
000	010	100

entstehen, welche sämmtlich Reductions-Ergebnisse der vierten Klasse darstellen.

Dieselben Systeme würde man übrigens gefunden haben, wenn der letzte Zug (auf C''') vertical gewesen, oder wenn er auf eine der beiden andern Gruppen (A' und B'') gegangen wäre. Auch sieht man leicht, dafs man auf ähnliche Weise verfahren könnte, wenn ein andres zur ***sechsten*** Klasse gehöriges Reductions-Ergebnifs zu verwandeln wäre. Es ist also der Beweis unsres Satzes als vollendet zu betrachten.

Man ersieht hieraus, dafs es immer möglich ist, ein gegebenes System durch eine Reihenfolge von Zügen bis auf einen oder zwei Punkte zu leeren, welche letztere ihrerseits entweder auf zwei Gruppen vertheilt, oder in einer einzigen enthalten sein können. Das Kriterium für diese verschiedenen Fälle beruht auf den Gleichnamigkeitsverhältnissen in den Reihen (a), für welche man jedoch mit demselben Rechte zwei andre ähnliche Reihen, die ebenfalls zusammen alle neun Zahlen $a', b', c', a'', \ldots$ enthalten, wählen dürfte.

Wir kehren nunmehr zu der Aufgabe des Solitär-Spiels zurück, und wollen zunächst die zweckmäfsigste Art und Weise, die Felder zu ***bezeichnen*** und ***einzutheilen,*** angeben.

Jedes Feld wird durch die horizontale und durch die verticale Reihe bestimmt, denen es gemeinschaftlich angehört. Nennt man also eine horizontale Reihe m und eine verticale n, so läfst sich das Feld, welches in beiden zugleich liegt, durch mn bezeichnen; wobei man übereinkommt, den Namen der ***horizontalen*** Reihe immer zuerst zu setzen.

Um die Reihenfolge oder Rang-Ordnung der Reihen — der horizontalen sowohl als der verticalen — anzugeben, mufs man bei beiden Arten von einer bestimmten Reihe ausgehen. Nennt man diese Reihe 0, so erreicht man den angedeuteten Zweck, wenn man die nach der einen Seite hin darauf folgende mit 1, die derselben zunächst liegende mit 2 bezeichnet, u. s. w. und wenn man ebenso der nach der andern Seite hin an die Reihe 0 sich anschliefsenden den Namen -1, der darauf folgenden den Namen -2 giebt, u. s. w. Für -1, -2, ... werden wir kürzer $1'$, $2'$, ... schreiben.

Zwei dieser Vorschrift gemäfs bezeichnete Felder mn und $\mu\nu$, rücksichtlich deren jede der Zahlen $m-\mu$, $n-\nu$, durch 3 theilbar oder $=0$ ist, nenne man einander ***congruent.***

Dieser Erklärung zufolge werden unter andern alle in einer Reihe liegenden Felder, welche durch 2, 5, 8, ... ***Zwischenfelder*** getrennt sind, einander ***congruent*** sein und es werden allgemeiner sämmtliche Felder einer Tafel in mehrere Gruppen unter sich congruenter Felder zerfallen. In der Fig 1 z. B. hat man die Gruppen:

Fig. 1

		31′	30	31		
		21′	20	21		
13′	12′	11′	10	11	12	13
03′	02′	01′	00	01	02	03
1′3′	1′2′	1′1′	1′0	1′1	1′2	1′3
		2′1′	2′0	2′1		
		3′1′	3′0	3′1		

1. 11′, 12, 2′1′
2. 10, 13, 2′0, 13′
3. 11, 2′1, 12′
4. 01′, 31′, 02, 3′1′
5. 00, 30, 03, 3′0, 03′
6. 01, 31, 3′1, 02′
7. 1′1′, 21′, 1′2
8. 1′0, 20, 1′3, 1′3′
9. 1′1, 21, 1′2′

und in der Fig. 2 die folgenden:

Fig. 2

		31′	30	31		
	22′	21′	20	21	22	
13′	12′	11′	10	11	12	13
03′	02′	01′	00	01	02	03
1′3′	1′2′	1′1′	1′0	1′1	1′2	1′3
	2′2′	2′1′	2′0	2′1	2′2	
		3′1′	3′0	3′1		

1. 11′, 12, 2′2, 2′1′
2. 10, 13, 2′0, 13′
3. 11, 2′1, 2′2′, 12′
4. 01′, 31′, 02, 3′1′
5. 00, 30, 03, 3′0, 03′
6. 01, 31, 3′1, 02′
7. 1′1′, 21′, 22, 1′2
8. 1′0, 20, 1′3, 1′3′
9. 1′1, 21, 22′, 1′2′.

Die Anzahl der Feldergruppen kann nie mehr als ***neun*** betragen. Denn enthält die Spieltafel neun im Quadrat bei einander liegende Felder, und sondert man diese ab, wie z. B. die folgenden in den Fig. 1 und 2:

(Q)

11′	10	11
01′	00	01
1′1′	1′0	1′1

so wird jedes aufserhalb des Quadrats liegende Feld *mn* einem oder dem andern der innerhalb liegenden ***congruent*** sein. Wie nämlich auch die Zahlen *m* und *n* beschaffen sein mögen, so mufs entweder *m*, oder $m-1$, oder $m+1$, und ebenso entweder *n*, oder $n-1$, oder $n+1$, durch 3 theilbar sein; also mufs auch, der Erklärung zufolge, das Feld *mn* einem der neun Felder 00, 10, 1′0, 01, 11, 1′1, 01′, 11′ 1′1′ ***congruent*** sein. Es kann demnach in dem erwähnten Falle nicht mehr Gruppen geben als das Quadrat Felder enthält. Um so weniger würde dies möglich sein, wenn das abgesonderte Quadrat nicht vollständig in der Spieltafel enthalten wäre, wenn es also durch eine Fortsetzung derselben ergänzt werden müfste, wie dies z. B. in der Fig. 1 bei folgendem geschieht:

31		
21		
11	12	13

Denn hierdurch kann die Anzahl der Gruppen wohl abnehmen (wenn nämlich ein oder mehrere Ergänzungsfelder keinem Felde der Spieltafel congruent sind), niemals aber gröfser als ***neun*** werden.

Man bilde nunmehr ein System von ***neun*** Punktengruppen

$$A' \quad B' \quad C'$$
$$A'' \quad B'' \quad C''$$
$$A''' \quad B''' \quad C'''$$

und sage von jeder Gruppe und jedem gleichliegenden Felde eines bestimmten abgesonderten Quadrats (mag dieses vollständig in der Spieltafel enthalten sein, oder nicht), dafs sie einander ***entsprechen;*** was also, wenn z. B. das obige Quadrat (Q) zu Grunde gelegt wird, zwischen dem Felde $11'$ und der Gruppe A', zwischen dem Felde 10 und der Gruppe B', u. s. w. der Fall sein wird. Desgleichen sage man von jedem aufserhalb des Quadrats liegenden Felde der Spieltafel, dafs es ***derselben*** Gruppe entspreche, wie das ihm ***congruente*** des Quadrats.

Diese Beziehungen zwischen den Feldern der Spieltafel und zwischen den Gruppen des Systems führen auf folgenden Satz:

> Liegen drei Felder einer horizontalen oder verticalen Reihe neben einander, so werden auch die ihnen ***entsprechenden*** Gruppen einer einzigen horizontalen oder verticalen Reihe angehören und alle drei werden von einander verschieden sein.

Denn betrachtet man z. B. drei in einer ***horizontalen*** Reihe neben einander liegende Felder mn, $m(n+1)$, $m(n+2)$, und sind $\mu\nu$, $\mu_{,}\nu_{,}$, $\mu_{,,}\nu_{,,}$ die ihnen congruenten Felder des abgesonderten Quadrats, so müssen zuvörderst die Zahlen $m-\mu$, $m-\mu_{,}$, $m-\mu_{,,}$, und folglich auch $\mu-\mu_{,}$ und $\mu-\mu_{,,}$ durch 3 theilbar oder $=0$ sein. Nun gehen aber die mit μ, $\mu_{,}$, $\mu_{,,}$ bezeichneten Reihen durch das abgesonderte Quadrat (da die Felder $\mu\nu$, $\mu_{,}\nu_{,}$, $\mu_{,,}\nu_{,,}$ zu diesem gehören); der Unterschied je zweier der drei Zahlen μ, $\mu_{,}$, $\mu_{,,}$ mufs also weniger als 3 betragen und folglich $=0$ sein. Hieraus folgt, dafs diese Zahlen selbst unter einander gleich sind, dafs also die mn, $m(n+1)$,

$m(n+2)$ congruenten Felder des Quadrats und mithin auch die ihnen entsprechenden Gruppen des Systems einer einzigen horizontalen Reihe angehören.

Da ferner die Zahlen $n-\nu$, $n+1-\nu_{,}$, $n+2-\nu_{,,}$ und mithin auch $\nu+1-\nu_{,}$, $\nu+2-\nu_{,,}$ ebenfalls durch 3 theilbar oder $=0$ sind, so kann dies nicht bei $\nu-\nu_{,}$ und $\nu-\nu_{,,}$ der Fall sein; d. h. die Zahlen ν, $\nu_{,}$, $\nu_{,,}$ und ebenso die mit ihnen bezeichneten Reihen müssen von einander verschieden sein. Folglich gilt dasselbe für die Felder $\mu\nu$, $\mu\nu_{,}$, $\mu\nu_{,,}$ und die ihnen entsprechenden Gruppen.

Ebenso beweiset man den Satz, wenn die drei neben einander liegenden Felder einer *verticalen* Reihe angehören. Es ist übrigens, wie leicht zu sehen, nicht nothwendig, dafs die Gruppen, welche drei neben einander liegenden Feldern entsprechen, sich in derselben Ordnung wie diese folgen. So entsprechen z. B. in der Fig. 1, wenn man dabei das Quadrat (Q) zu Grunde legt, die Felder 11, 12, 13, welche in dieser Ordnung von der Linken zur Rechten liegen, resp. den Gruppen C', A', B', wo diese Ordnung nicht befolgt wird und wo sogar die mittlere Gruppe einem äufseren Felde entspricht, und umgekehrt.

Da nun die drei Felder, welche bei einem Zuge in Betracht kommen, in einer Reihe neben einander liegen, so ergiebt sich aus dem vorigen folgender Satz:

> Thut man auf der Spieltafel einen nach der Regel des Spiels erlaubten Zug und nimmt man von jeder der beiden Gruppen, welche den dadurch leer gewordenen Feldern entsprechen, einen Punkt weg, während man zu derjenigen Gruppe, welche dem durch den Zug besetzten Felde entspricht, einen Punkt hinzufügt, so entsteht in dem Systeme ein Zug von der in Art. 1 erklärten Art.

Diesen Zug werden wir seinerseits dem auf der Spieltafel stattgefundenen *entsprechend* nennen.

Versteht man endlich unter *Projection* eines Feldes einen Punkt, welchen man für dasselbe in die ihm entsprechende Gruppe einträgt, so schliefst man weiter auf folgenden Satz:

> Enthält das System im Anfange des Spiels keine anderen Punkte als die Projectionen der *besetzten* Felder, d. h. aller, mit Ausnahme des Anfangsfeldes, und begleitet man jeden Zug auf der Spieltafel durch den ihm entsprechenden im Systeme, so mufs, wenn die Tafel durch eine Reihenfolge von Zügen bis auf *ein* Feld (das Schlufsfeld) geleert wird,

zugleich das System bis auf *einen* Punkt leer werden, und die Gruppe, worin dieser liegt, mufs dem Schlufsfelde entsprechen.

Hieraus folgt von selbst, dafs die Aufgabe des Solitär-Spiels keiner Auflösung fähig sei, wenn das auf die angegebene Weise entstandene System nicht bis auf *einen* Punkt geleert werden kann. Wir haben also nunmehr ein sehr einfaches Mittel erlangt, die drei zu Anfang dieses Aufsatzes gestellten Fragen *wenigstens theilweise* zu beantworten.

Man sondere nämlich von der Spieltafel ein Quadrat von *neun* Feldern ab und bilde mit Rücksicht darauf ein Gruppensystem aus den Projectionen *aller* Felder, lasse sodann nach und nach von jeder Gruppe einen Punkt weg und untersuche nach Art. 10, ob die dadurch entstehenden neun Systeme bis auf *einen* Punkt geleert werden können, oder nicht. Ist dies bei irgend einem Systeme unmöglich, und geht man auf die Gruppe desselben, von welcher ein Punkt weggelassen worden, zurück, so darf in keinem Falle ein dieser Gruppe entsprechendes Feld zum Anfangsfelde gewählt werden. Wäre es ferner in keinem Systeme möglich, die Gruppen bis auf *einen* Punkt zu leeren, so liefse die Spieltafel überhaupt keine Auflösung zu. Hat man endlich für ein gewisses Feld, als Anfangsfeld, eine Auflösung gefunden, so läfst sich in keinem Falle von diesem Anfangsfelde aus zu einem andern Schlufsfelde gelangen, wenn dieses nicht dem bei jener Auflösung erhaltenen *congruent* ist.

Denn zwei Auflösungen, die von gleichen Anfangsfeldern ausgehen, beziehen sich auf ein und dasselbe System: also mufs auch der Restpunkt in beiden Fällen einerlei Lage haben, da diese nach der Bemerkung des Art. 10 eine vollkommen und nur auf eine einzige Weise bestimmte ist. Die Schlufsfelder müssen folglich einer und derselben Gruppe entsprechen und mithin unter sich *congruent* sein.

Man wird nicht übersehen, dafs dieses Mittel, seiner Natur nach, nur auf *negative* Resultate führen kann. Es wird nämlich einerseits dazu dienen, gewisse Felder kennen zu lernen (wenn es deren auf der Spieltafel giebt), welche in keinem Fall zu *Anfangsfeldern* gewählt werden dürfen. Andrerseits wird es, bestimmten und zulässigen Anfangsfeldern gegenüber, gewisse andre Felder bezeichnen, welche dabei in keinem Fall zu *Schlufsfeldern* geeignet sind. Ob aber die *nicht* ausgeschlossenen Anfangs- und Schlufsfelder wirklich Auflösungen *zulassen*, und wie man diese finde, sind Fragen,

die hier noch unentschieden und einer weiteren Untersuchung vorbehalten bleiben müssen.

Wendet man nun das angegebene Verfahren zuerst auf die durch Fig. 1 dargestellte Form der Spieltafel an und legt dabei das Quadrat (*Q*) zu Grunde, so wird das aus den Projectionen aller Felder bestehende System das folgende:

3 4 3
4 5 4
3 4 3

zum Zahlensysteme haben. Läfst man nun nach und nach in jeder Gruppe einen Punkt weg und bezeichnet die dadurch entstehenden Systeme jedesmal mit dem Namen der Gruppe, worin die Verminderung Statt gefunden hat, so ergeben sich rücksichtlich dieser Systeme folgende Werthe für die in den Reihen (*a*) enthaltenen Zahlen:

	A'	*B'*	*C'*	*A''*	*B''*	*C''*	*A'''*	*B'''*	*C'''*
$a' + b'$	6	6	7	7	7	7	7	7	7
$a'' + b''$	9	9	9	8	8	9	9	9	9
$a''' + b'''$	7	7	7	7	7	7	6	6	7
$a' + c'$	5	6	5	6	6	6	6	6	6
$a'' + c''$	8	8	8	7	8	7	8	8	8
$a''' + c'''$	6	6	6	6	6	6	5	6	5

Folglich gehören die Gleichnamigkeitsverhältnisse in den erwähnten Reihen bei den Systemen *A'*, *A''*, *A'''* zu der ***ersten***, und bei allen übrigen zu der ***dritten*** Kategorie; woraus erhellet, dafs sich alle ***neun*** Systeme bis auf ***einen*** Punkt leeren lassen, dafs also von dieser Seite her kein Grund vorhanden ist, irgend ein Feld der Tafel als zu einem Anfangsfelde nicht tauglich ***auszuschliefsen.***

Sucht man ferner für jedes der ***neun*** Systeme die darauf bezügliche Restgruppe auf, was nach den in der Bemerkung des Art. 10 mitgetheilten Angaben geschehen mufs, so findet man ohne Schwierigkeit, dafs in jedem Systeme die Restgruppe mit derjenigen übereinstimmt, von welcher ein Punkt weggelassen worden war, dafs also das Anfangs- und das Schlufsfeld derselben Gruppe entsprechen; was auf folgenden Satz führt:

Sind auf der durch Fig. 1 dargestellten Spieltafel Auflösungen möglich, so können es keine andern sein, als bei welchen das Schlufsfeld mit dem Anfangsfelde ***identisch*** oder demselben ***congruent*** ist.

Ganz anders werden sich die Resultate gestalten, wenn man die durch Fig. 2 dargestellte Form der Spieltafel in Betracht zieht. Alsdann wird nämlich, wenn auch hier das Quadrat (Q) zu Grunde gelegt wird, das aus den Projectionen aller Felder bestehende System das folgende:

4 4 4
4 5 4
4 4 4

zum Zahlensysteme haben. Bezeichnet man nun, wie im ersten Falle, die hieraus entstehenden Systeme durch A', B', ... so werden rücksichtlich derselben die in den Reihen (a) enthaltenen Zahlen folgende Werthe haben:

	A'	B'	C'	A''	B''	C''	A'''	B'''	C'''
$a'+b'$	7	7	8	8	8	8	8	8	8
$a''+b''$	9	9	9	8	8	9	9	9	9
$a'''+b'''$	8	8	8	8	8	8	7	7	8
$a'+c'$	7	8	7	8	8	8	8	8	8
$a''+c''$	8	8	8	7	8	7	8	8	8
$a'''+c'''$	8	8	8	8	8	8	7	8	7

Folglich werden nur die Systeme B', B''', A'', C'' bis auf ***einen*** Punkt geleert werden können, indem die Gleichnamigkeitsverhältnisse in den Reihen (a) bei dem Systeme C'' zu der ersten, bei den Systemen B', B''', A'' zu der dritten Kategorie gehören, während bei den übrigen Systemen andre Kategorien gelten. Hieraus ergiebt sich also, dafs in der durch Fig. 2 dargestellten Form der Tafel die zulässigen Anfangsfelder nur unter den, den Gruppen B', B''', A'', C'' entsprechenden Feldern, nämlich unter

1 0, 13, 2′0, 1 3′,
1′0, 20, 1′3, 1′3′,
0 1′, 31′, 0 2, 3′1′,
0 1, 31, 3′1, 0 2′,

vorhanden sein können, dafs hingegen die übrigen 21 Felder als dazu jedenfalls nicht tauglich, ausgeschlossen werden müssen.

Bestimmt man ferner, wie oben, die Restgruppen nach den in Art. 10 enthaltenen Angaben, so findet man

für das System B' die Restgruppe B''',
– – – B''' – – B',
– – – A'' – – C'',
– – – C'' – – A'',

woraus sich folgender Satz ergiebt:

Ist in einer der beiden Linien

1 0, 13, 2′0, 1 3′,
1′0, 20, 1′3, 1′3′,

oder in einer dieser andern

01′, 31′, 0 2, 3′1′,
01, 31, 3′1, 0 2′,

ein Feld als ***Anfangsfeld*** zulässig, so mufs das ***Schlufsfeld*** in der andern der zusammengehörigen Linien enthalten sein. Das Schlufsfeld kann also niemals, wie im ersten Beispiele, mit dem Anfangsfelde *identisch* werden.

Nachdem somit unsre Aufgabe zu Ende geführt ist, wollen wir noch zeigen, wie man aus jeder bestimmten Auflösung gewisse andre herleiten könne. Dazu können verschiedene Hülfsmittel dienen, welche wir hier nach einander in Erwägung ziehen werden.

I.

Ist von drei in einer Reihe neben einander liegenden Feldern F', F'', F''' nur ein äufseres F'''' besetzt, und bringt man die Marke desselben auf das andre äufsere Feld F', während man auch das mittlere F'' durch eine zweite Marke besetzt, so nenne man dies einen ***Zug zweiter Art****). Dagegen nenne man die bis jetzt betrachteten, eigentlichen Züge, zur Unterscheidung von diesen, ***Züge erster Art.***

Hat man einen Zug der einen Art gethan, so kann man denselben immer durch einen der andern Art wieder aufheben. So wird z. B. der Zug zweiter Art von F'''' auf F', welcher den erster Art von F' auf F''''

---

*) Diese Züge sind es, welche *Leibnitz* als Ersatz der üblichen in Vorschlag bringt, um durch sie gewisse Felder nach und nach zu besetzen und auf diese Weise bestimmte Figuren zu bilden, woraus allerdings eine gröfsere Mannigfaltigkeit der Aufgaben hervorgeht, was aber im Grunde auf die Annahme verschiedener Spieltafeln hinauskommt.

möglich macht, durch diesen wieder aufgehoben. Dasselbe wird der Fall sein, wenn man, insofern es möglich ist, zuerst den Zug erster Art von F' auf F''' thut und darauf den Zug zweiter Art von F''' auf F' folgen läfst. In beiden Fällen wird nämlich der Zustand der Tafel, wie er vor den Zügen war, wieder hergestellt.

Züge beider Arten, welche einander aufheben, sollen *Gegenzüge* von einander heifsen.

Aus diesen Erklärungen ergeben sich ohne Weiteres folgende Sätze:

1. Bezeichnet man eine Tafel, auf welcher gewisse Felder besetzt, gewisse andre unbesetzt sind, mit T', und dieselbe Tafel, wenn sie sich im entgegengesetzten Zustande befindet, d. h. wenn alle auf T' besetzten Felder auf ihr unbesetzt sind und umgekehrt, mit T'', so kann man, wenn auf T' ein Zug erster Art von F auf f möglich ist, auf T'' dessen Gegenzug, nämlich den Zug zweiter Art von f auf F thun.

2. Führt man beide Züge wirklich aus, so wird auch *nach* denselben der Zustand von T' und T'' entgegengesetzter Art sein.

Man nehme nun an, dafs auf der Tafel T' alle Felder bis auf eins, z. B. f', besetzt seien, und dafs sich durch eine Reihenfolge von Zügen erster Art, nämlich

$$\begin{array}{lll} \text{von } F' & \text{auf } f', \\ - \; F'' & - \; f'', \\ \vdots & & \\ - \; F^{n-1} & - \; f^{n-1}, \\ - \; F^{n} & - \; f^{n}, \end{array}$$

alle Felder bis auf f^n leeren lassen. In diesem Falle ist es auch möglich, auf der Tafel T'' durch die Gegenzüge zu den eben angegebenen, wenn sie sich in derselben Ordnung wie diese folgen, alle Felder bis auf f^n zu besetzen.

Denn da zu Anfang der Zustand von T'' demjenigen von T' *entgegengesetzt* ist und man auf dieser Tafel den Zug (erster Art) von F' auf f' thun kann, so mufs auch auf T'' dessen Gegenzug, nämlich der Zug (zweiter Art) von f' auf F' möglich sein, und durch diese beiden Züge wird der Zustand der Tafel nicht aufhören, entgegengesetzt zu sein. Da man ferner nach jenen Zügen auf T' den von F'' auf f'' thun kann, so kann man auch auf T'' dessen Gegenzug von f'' auf F'' thun; und auch nach diesen beiden wird der Zustand der Tafeln entgegengesetzt bleiben. Schreitet man nach und nach zu allen folgenden Zügen weiter, so mufs, so lange der

Zustand der Tafeln entgegengesetzt bleibt, für jeden Zug auf der Tafel T' dessen Gegenzug auf der Tafel T'' möglich sein, und also auch ***nach*** denselben derselbe Gegensatz bestehen. Folglich mufs dies ***vor*** und ***nach*** jedem Zuge der Fall sein, so dafs alle Gegenzüge möglich sind und auf T'' nach und nach alle Felder bis auf f^n besetzt werden können.

Hat man aber auf der Tafel T'' nach einander alle Züge zweiter Art

von f' auf F',
- f'' - F'',
⋮
- f^{n-1} - F^{n-1},
- f^n - F^n,

gethan und dadurch alle Felder bis auf f^n besetzt, so kann man alle diese Züge, von dem letzten zum ersten zurückgehend, durch ihre Gegenzüge, nämlich durch die Züge erster Art

von F^n auf f^n,
- F^{n-1} - f^{n-1},
⋮
- F'' - f'',
- F' - f'

wieder *aufheben* und auf diese Weise alle Felder bis auf f' von neuem leeren. Dies giebt folgenden Satz:

> Kennt man eine Auflösung, bei welcher f' das Anfangs- und f^n das Schlufsfeld ist, so läfst sich daraus eine andre herleiten, bei welcher jene Felder ihre Bedeutung mit einander vertauschen. Dies geschieht, indem man die Ordnung der Züge umkehrt.

II.

Hat man eine Auflösung gefunden, bei welcher F' das ***Anfangsfeld*** ist, und geht der erste Zug von F''' auf F', bezeichnet man ferner das zwischen diesen liegende Feld mit F'' und das auf der andern Seite von F''' in derselben Reihe befindliche (wenn es ein solches auf der Tafel giebt), mit F^{IV}, so kann man auch F^{IV} als Anfangsfeld annehmen.

Denn thut man unter der Voraussetzung, dafs F' das Anfangsfeld sei, den ersten Zug (von F''' auf F'), so werden in Folge davon nur die beiden Felder F'' und F''' unbesetzt, alle andern Felder der Tafel hingegen besetzt sein. Dasselbe wird aber offenbar auch dann Statt finden, wenn F^{IV}

das Anfangsfeld war und der erste Zug von F''' auf F^{IV} ging. In beiden Fällen wird also der Zustand der Tafel nach dem ersten Zuge derselbe sein: mithin kann man auch auf den Zug von F''' auf F^{IV} dieselben Züge folgen lassen wie auf den von F'''' auf F' und dadurch das gleiche Resultat erreichen.

Auf ähnliche Weise, wie das Anfangsfeld, kann man auch das *Schlufsfeld* mit einem andern vertauschen. Ist man nämlich zu einem Schlufsfelde f' gelangt und war der letzte Zug von f''' auf f'; ist ferner f'' das zwischen diesen liegende Feld und giebt es in derselben Reihe, auf der andern Seite von f''' ein Feld f^{IV}: so sind vor dem letzten Zuge die Felder f'' und f''' die allein besetzten der Tafel. Man kann also eben sowohl den Zug von f'' auf f^{IV}, als den von f''' auf f' thun, wodurch man f^{IV} statt f' als *Schlufsfeld* erhält.

Man sieht hieraus, dafs, wenn man von dem Anfangsfelde F'' aus zu dem Schlufsfelde f' gelangen kann, oder, wie sich der Kürze wegen sagen läfst, wenn die Aufgabe $F' \ldots f'$ *eine Auflösung zuläfst,* dies auch in Bezug auf die Aufgaben: $F^{IV} \ldots f'$, $F' \ldots f^{IV}$, $F^{IV} \ldots f^{IV}$ der Fall sein wird, vorausgesetzt, dafs die Felder F^{IV} und f^{IV} wirklich auf der Tafel liegen.

III.

Die bis jetzt angegebenen Hülfsmittel finden ihre Anwendung, welches auch die *Form* der Spieltafel sei. Wir wollen jetzt noch auf ein andres aufmerksam machen, welches nur bei solchen Tafeln benutzbar ist, auf denen, wie in den Figuren 1, 2, 3, alle Felder *symmetrisch* um ein Mittelpunktsfeld (00) herumliegen. Bedient man sich in diesem Falle der oben erklärten Bezeichnung der Felderreihen $(\ldots 2, 1, 0, 1', 2', \ldots)$ und der darauf beruhenden Bezeichnung der Felder selbst, so lassen sich zwei Felder, mn und $\mu\nu$, *ähnlich liegende* nennen, wenn die Reihe m und eine der Reihen μ, ν, und zugleich die Reihe n und die andre der Reihen μ, ν von 00 *gleichen Abstand* haben, wenn also die Zahlenpaare m und μ, n und ν, oder diese andern: m und ν, n und μ gleiche absolute Werthe haben. Es wird folglich auf jeder Tafel, deren Felder symmetrisch um 00 herumliegen, je *acht* unter einander ähnlich liegende Felder geben, die, wenn für $-m$ und $-n$ resp. m' und n' geschrieben wird, allgemein durch

$$mn,\quad m'n,\quad mn',\quad m'n',\quad nm,\quad nm',\quad n'm,\quad n'm'$$

bezeichnet werden können. Es ist jedoch hierbei nicht zu übersehen:

1stens dafs diese Anzahl sich auf *vier* reducirt, wenn m oder $n = 0$ ist, da in diesem Falle $m = m'$, oder $n = n'$ sein wird, und ferner, wenn $m = n$, da alsdann die Felder mn und nm, $m'n$ und nm', u. s. w. identisch sind;

2tens dafs sie sich auf *eins* reducirt, wenn $m = n = 0$ ist.

So giebt es z. B. in Figur 1 folgende Gruppen ähnlich liegender Felder:

1. 00
2. 10, 1′0, 01, 01′
3. 20, 2′0, 02, 02′
4. 30, 3′0, 03, 03′
5. 11, 1′1, 11′, 1′1′
6. 12, 1′2, 12′, 1′2′, 21, 21′, 2′1, 2′1′
7. 13, 1′3, 13′, 1′3′, 31, 31′, 3′1, 3′1′.

Nun giebt es aber für jede Tafel, auf welcher alle Felder symmetrisch um 00 herumliegen, *acht* verschiedene Lagen, in welchen sie denselben Raum einnehmen wird. Diese Lagen lassen sich durch folgende Schemata andeuten, in welchen nur die zunächst um 00 herumliegenden Felder 10, 01, 1′0, 01′ angegeben sind:

1 0	01′	1′0	01
1. 01′ 0 0 01	2. 1′0 00 10	3. 0 1 0 0 01′	4. 10 00 1′0
1′0	01	1 0	01′
1 0	01	1′0	01′
5. 01 0 0 01′	6. 1′0 00 10	7. 01′ 0 0 01	8. 10 00 1′0.
1′0	01′	1 0	01

Die Lagen 2, 3, 4 erhält man nämlich aus der ersten, wenn man die Tafel in ihrer Ebene von der Linken zur Rechten um 00 herumdreht, bis das Feld 10 mit 01, dann mit 1′0 und endlich mit 01′ zusammenfällt. Ferner geht die erste Lage in die *fünfte* über, wenn man die Tafel um die Reihe ... 10 00 1′0 ... auf eine solche Weise herumdreht, dafs die nach unten gekehrte Seite ihrer Ebene nach oben zu liegen kommt; und umgekehrt. Aus der fünften Lage endlich entstehen die Lagen 6, 7, 8 auf dieselbe Weise, wie die Lagen 2, 3, 4 aus der ersten.

Betrachtet man diese verschiedenen Lagen näher, so überzeugt man sich leicht, dafs, wenn man eine solche symmetrische Tafel aus der ursprünglichen Lage in eine andre bringt, in welcher sie wieder denselben Raum ein-

nimmt, jedes Feld ein ihm ähnlich liegendes decken werde, und zwar, mit bestimmteren Worten: dafs allgemein jedes Feld

mn	in	der	Lage	2	mit	$n'm$	in	der	ersten,
–	–	–	–	3	–	$m'n'$	–	–	–
–	–	–	–	4	–	nm'	–	–	–
–	–	–	–	5	–	mn'	–	–	–
–	–	–	–	6	–	nm	–	–	–
–	–	–	–	7	–	$m'n$	–	–	–
–	–	–	–	8	–	$n'm'$	–	–	–

zusammenfallen werde.

Hat man also eine Auflösung gefunden, bei welcher $m_0 n_0$ das Anfangsfeld ist, so ergeben sich daraus andre, bei welchen irgend ein mit $m_0 n_0$ ähnlich liegendes Feld $\mu_0 \nu_0$ zum Anfangsfelde dient. Dies wird deutlich werden, wenn man zuvörderst die Spieltafel aus der ursprünglichen Lage in eine andre bringt, worin sie wieder denselben Raum einnimmt, worin aber $m_0 n_0$ mit $\mu_0 \nu_0$ zusammenfällt. Alsdann wird nämlich auch jedes andre Feld, $m_k n_k$, mit einem Felde $\mu_k \nu_k$ zusammenfallen, welches aus jenem durch dieselbe Substitution entsteht, wie $\mu_0 \nu_0$ aus $m_0 n_0$. Geht also, bei der als bekannt angenommenen Auflösung, der erste Zug von $m_1 n_1$ auf $m_0 n_0$ und allgemein der k^{te} Zug von $m_{k+1} n_{k+1}$ auf $m_k n_k$, so fallen diese Züge mit denen von $\mu_1 \nu_1$ auf $\mu_0 \nu_0$, ... von $\mu_{k+1} \nu_{k+1}$ auf $\mu_k \nu_k$, ... zusammen. Diese letzteren, bei welchen $\mu_0 \nu_0$ das Anfangsfeld ist, führen mithin gleichfalls zu einer Auflösung, und zwar zu einer, bei welcher das Schlufsfeld sich aus dem bei der ersten erhaltenen durch dieselbe Substitution wie $\mu_0 \nu_0$ aus $m_0 n_0$ herleiten läfst.

IV.

Wendet man die obigen Hülfsmittel auf die durch Fig. 1 dargestellte Form der Spieltafel an, so erhellt aus dem letzten derselben, dafs es genüge, von jeder Gruppe ähnlich liegender Felder immer nur eins als Anfangsfeld in Betracht zu ziehen, also z. B. die folgenden:

00, 30, 2′0, 30, 11, 12′, 13,

die, nach ihrer *Congruenz*, auf folgende Weise geordnet werden mögen:

00, 30, ... 10, 2′0, 13, ... 11, 12′.

Da nun, wie oben gezeigt, für diese Form der Tafel jedes Anfangsfeld nur ein mit ihm identisches oder ihm congruentes Schlufsfeld zuläfst, so werden alle denkbaren Aufgaben in den folgenden inbegriffen sein:

1. 00...00	6. 30...00	11. 10...10	15. 2′0...10
2. 00...30	7. 30...30	12. 10...13	16. 2′0...13
3. 00...03	8. 30...03	13. 10...2′0	17. 2′0...2′0
4. 00...3′0	9. 30...3′0	14. 10...13′	18. 2′0...13′
5. 00...03′	10. 30...03′		
19. 13...10	23. 11...11	26. 12′...11	
20. 13...13	24. 11...2′1	27. 12′...2′1	
21. 13...2′0	25. 11...12′	28. 12′...12′	
22. 13...13′			

Von diesen Aufgaben lassen sich jedoch verschiedene, theils vermöge des letzten Hülfsmittels, theils vermöge des ersten, oder beider zugleich, gegenseitig auf einander zurückführen. Dies wird namentlich bei jeder der folgenden Gruppen von Aufgaben der Fall sein:

I. 2, 3, 4, 5, 6 II. 8, 10 III. 12, 14, 19 IV. 13, 15
V. 16, 18, 21 VI. 24, 25, 26.

Es bleiben also aus diesem Grunde nur folgende 16 Aufgaben übrig:

1. 00...00	6. 10...10	13. 11...11
2. 00...30	7. 10...13	14. 11...12′
3. 30...30	8. 10...2′0	15. 12′...2′1
4. 30...03	9. 13...2′0	16. 12′...12′
5. 30...3′0	10. 2′0...2′0	
	11. 13...13	
	12. 13...13′	

Aber auch diese Anzahl wird sich noch verringern lassen, wenn man schliefslich das *zweite* Hülfsmittel anwendet. Bezeichnet man nämlich allgemein einen Zug, der von F auf f geht, durch $F-f$, und ferner eine Aufgabe $f' \ldots f^s$, bei welcher nicht nur das Anfangs- und Schlufsfeld (f' und f^s), sondern auch der erste und letzte Zug ($F'-f'$ und F^s-f^s) zu den Forderungen gehören, durch

$$\frac{F'-f'}{F^s-f^s},$$

so wird man aus der Auflösung der Aufgabe $\frac{20-00}{20-00}$ vermöge des zweiten Hülfsmittels auch diejenige von $\frac{20-00}{10-30}$ und von $\frac{10-30}{10-30}$ herleiten können; sie wird folglich zugleich den Aufgaben 1, 2, 3 genügen.

Auf ähnliche Weise findet man, dafs die Auflösung von $\frac{12-10}{12-10}$ den Aufgaben 6, 7, 11; ferner die von $\frac{12-10}{00-2'0}$ den Aufgaben 8, 9 und endlich die von $\frac{11'-11}{11'-11}$ den Aufgaben 13, 14, 16 Genüge leistet. Demnach werden alle Aufgaben, welche bei der in Betracht gezogenen Tafel vorkommen können, sich auf eine der folgenden zurückführen lassen:

1.	$\frac{20-00}{20-00}$	4.	$\frac{12-10}{12-10}$	8.	$\frac{11'-11}{11'-11}$
2.	30 . . . 03	5.	$\frac{12-10}{00-2'0}$	9.	12′ . . . 2′1
3.	30 . . . 3′0	6.	2′0 . . . 2′0		
		7.	13 . . . 13′		

Wir fügen hier zum Schlusse Auflösungen dieser verschiedenen Fälle bei, woraus sich die Auflösbarkeit aller möglichen Aufgaben thatsächlich und ohne weiteres ergiebt.

(1.) $\frac{20-00}{20-00}$.

1. 20 — 00	7. 01′ — 21′	13. 01 — 2′1	19. 02 — 00	25. 1′3′ — 1′1′
2. 12 — 10	8. 31′ — 11′	14. 1′3 — 1′1	20. 2′1′ — 01′	26. 3′0 — 1′0
3. 00 — 20	9. 10 — 12′	15. 13 — 1′3	21. 1′3′ — 1′1′	27. 1′0 — 1′2′
4. 12′ — 10	10. 1′1 — 11	16. 1′0 — 1′2	22. 01′ — 2′1′	28. 3′1′ — 1′1′
5. 31′ — 11′	11. 21 — 01	17. 1′3 — 1′1	23. 13′ — 1′3′	29. 1′2′ — 1′0
6. 31 — 31′	12. 3′1 — 1′1	18. 2′1 — 01	24. 12′ — 1′2′	30. 1′0 — 10
				31. 20 — 00

(2.) 30 . . . 03.

1. 10 — 30	7. 13′ — 11′	13. 1′0 — 1′2′	19. 12 — 10	25. 01 — 21
2. 12′ — 10	8. 1′3′ — 13′	14. 3′1′ — 1′1′	20. 31 — 11	26. 13 — 11
3. 00 — 20	9. 1′2′ — 12′	15. 3′1 — 3′1′	21. 10 — 12	27. 21 — 01
4. 31′ — 11′	10. 01′ — 21′	16. 01′ — 2′1′	22. 13 — 11	28. 2′0 — 00
5. 30 — 10	11. 13′ — 11′	17. 3′1′ — 1′1′	23. 1′3 — 13	29. 00 — 02
6. 10 — 12′	12. 21′ — 01′	18. 1′2′ — 1′0	24. 1′2 — 12	30. 2′1 — 01
				31. 01 — 03

(3.) 30 . . . 3′0.

Von Zug 1 bis Zug 24 wie in der vorigen.

25. 1′0 — 1′2
26. 1 1 — 1′1
27. 1 3 — 1 1
28. 2′1 — 0 1
29. 1 1 — 1′1
30. 1′2 — 1′0
31. 1′0 — 3′0

(4.) $\frac{12-10}{12-10}$.

1. 12 — 10	7. 0 1′ — 2 1′	13. 2′1′ — 0 1′	19. 1′0 — 1′2′	25. 1′0 — 1′2
2. 31 — 11	8. 1 3′ — 1 1′	14. 1′3′ — 1′1′	20. 3′1′ — 1′1′	26. 1′3 — 1′1
3. 10 — 12	9. 2 1′ — 0 1′	15. 0 1′ — 2′1′	21. 1′2′ — 1′0	27. 2′1 — 0 1
4. 30 — 10	10. 1′1′ — 1 1′	16. 3′1′ — 1′1′	22. 0 1 — 2′1	28. 1 2 — 1′2
5. 11′ — 11	11. 0 3′ — 0 1′	17. 3′1 — 3′1′	23. 1′3 — 1′1	29. 0 0 — 0 2
6. 31′ — 11′	12. 1 1′ — 1′1′	18. 2′1 — 2′1′	24. 1 3 — 1′3	30. 1′2 — 1 2
				31. 1 2 — 1 0

(5.) $\frac{12-10}{00-2'0}$.

Von Zug 1 bis Zug 27 wie in der vorigen.

28. 12 — 10 29. 10 — 1′0 30. 02 — 00 31. 00 — 2′0

(6.) 2′0 . . . 2′0.

1. 0 0 — 2′0	7. 1 2 — 1′2	13. 1′0 — 1′2′	19. 2′1′ — 01′	25. 1 2 — 1 0
2. 1′2 — 1′0	8. 0 1 — 2′1	14. 1′3′ — 1′1′	20. 1 0 — 12	26. 2 0 — 0 0
3. 3′1 — 1′1	9. 1′3 — 1′1	15. 1 3′ — 1′3′	21. 3 1 — 11	27. 0 0 — 0 2′
4. 1′0 — 1′2	10. 2′1 — 0 1	16. 1 2′ — 1′2′	22. 3 1′ — 31	28. 2 1′ — 0 1′
5. 1′3 — 1′1	11. 1′2′ — 1′0	17. 0 1′ — 2′1′	23. 0 1 — 21	29. 0 2′ — 0 0
6. 1 3 — 1′3	12. 3′1′ — 1′1′	18. 1′3′ — 1′1′	24. 3 1 — 11	30. 3′0 — 1′0
				31. 0 0 — 2′0

(7.) 13 . . . 13′.

1. 11 — 13. Von Zug 2 bis Zug 6 wie bei $\frac{12-10}{12-10}$; von Zug 7 bis Zug 30 die den Zügen in derselben Auflösung horizontal gegenüberstehenden, d. h. für jeden Zug $mn - \mu\nu$ diesen andern: $m(-n) - \mu(-\nu)$; also nach unsrer Bezeichnung, für $mn - \mu\nu$, $mn' - \mu\nu'$; für $mn - \mu\nu'$, $mn' - \mu\nu$, u. s. w.

31. 11′ — 13′.

(8.) $\frac{11'-11}{11'-11}$.

1. $11'-11$
2. $31'-11'$
3. $31-31'$
4. $21-21'$
5. $12'-10$
6. $31'-11'$
7. $10_1-12'$
8. $13'-11'$
9. $1'3'-13'$
10. $1'2'-12'$
11. $01'-21'$
12. $13'-11'$
13. $21'-01'$
14. $01-21$
15. $13-11$
16. $21-01$
17. $1'1-11$
18. $03-01$
19. $11-1'1$
20. $2'1-01$
21. $1'3-1'1$
22. $01-2'1$
23. $3'1-1'1$
24. $3'1'-3'1$
25. $2'1'-2'1$
26. $1'0-1'2$
27. $3'1-1'1$
28. $1'2-1'0$
29. $1'1'-11'$
30. $1'0-10$
31. $11'-11$

(9.) $12'\ldots2'1$.

1. $10-12'$. Von Zug 2 bis Zug 28 wie in der vorigen.

29. $01'-2'1'$ 30. $00-2'0$ 31. $2'1'-2'1$.

Frankfurt a. M., den 26. März 1853.

31.

Ueber die Bewegung eines Punktes auf der Oberfläche eines Ellipsoids.

(Von Herrn *Schellbach.*)

§. 1.

Jeder Punkt der Oberfläche eines Ellipsoids, dessen Coordinaten x, y, z sein mögen, läfst sich durch die Axen des Centralschnitts bestimmen, dessen Ebene der Berührungsebene im Punkte xyz parallel gelegt ist. Um dies nachzuweisen wollen wir zunächst die Axen dieses elliptischen Centralschnitts berechnen. Die Quadrate der Halbaxen des Ellipsoids mögen mit a, b, c bezeichnet werden, so dafs

$$(1.) \qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$$

seine Gleichung und

$$(2.) \qquad \frac{\xi x}{a}+\frac{\eta y}{b}+\frac{\zeta z}{c}=0$$

die Gleichung der Ebene des Centralschnitts wird, welche der Berührungsebene

$$\frac{\xi x}{a}+\frac{\eta y}{b}+\frac{\zeta z}{c}=1$$

des Punktes xyz parallel ist, während ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten.

Das Quadrat des Radius des elliptischen Centralschnitts, welcher vom Mittelpunkte nach irgend einem Punkte $\xi\eta\zeta$ der Peripherie desselben gezogen ist, sei u, dann ist

$$(3.) \qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=u,$$

und da $\xi\eta\zeta$ im Ellipsoid liegt, so ist auch

$$(4.) \qquad \frac{\xi^2}{a}+\frac{\eta^2}{b}+\frac{\zeta^2}{c}=1.$$

Betrachtet man die vorige Gleichung als die Gleichung einer Kugel und zieht von ihr die letzte Gleichung ab, nachdem man beide Seiten mit u multiplicirt hat, so erhält man

$$(5.) \qquad \frac{\xi^2}{a}(a-u)+\frac{\eta^2}{b}(b-u)+\frac{\zeta^2}{c}(c-u)=0,$$

die Gleichung einer Kegelfläche, deren Spitze im Mittelpunkt des Ellipsoids liegt, und deren Mantel durch den Durchschnitt des Ellipsoids und der Kugel

geht. Wenn der willkürlich gewählte Punkt $\xi\eta\zeta$ nicht im Scheitel der grofsen oder kleinen Axe des Centralschnitts liegt, so giebt es vier Punkte in der Peripherie dieses Schnittes, welche gleiche Entfernung vom Mittelpunkte des Ellipsoids haben, die Kegelfläche (5.) wird also die Centralebene (2.) in zwei gegen die Axen der Ellipse gleichgeneigten Durchmessern schneiden; ist aber der Punkt $\xi\eta\zeta$ ein Scheitel der Centralellipse, dann fallen diese beiden Linien in eine einzige zusammen, welche entweder die grofse oder kleine Axe dieser Ellipse sein wird, und die Centralebene (2.) wird in diesen beiden Fällen die Kegelfläche (5.) nicht schneiden, sondern nur berühren. Die Berührungsebene an diese Kegelfläche im Punkte $\xi\eta\zeta$ ist aber

$$(5'.) \qquad \xi'\xi\left(\frac{a-u}{a}\right)+\eta'\eta\left(\frac{b-u}{b}\right)+\zeta'\zeta\left(\frac{c-u}{c}\right)=0,$$

wenn ξ', η', ζ' die laufenden Coordinaten sind.

Diese Ebene und die Ebene (2.) müssen also identisch sein. Da die laufenden Coordinaten in (2.) ξ, η, ζ und in (5'.) ξ', η', ζ' genannt wurden, so hat man also

$$x=\xi(a-u); \qquad y=\eta(b-u); \qquad z=\zeta(c-u)$$

und die hieraus entspringenden Werthe von ξ, η, ζ in die Gleichung (2.) eingesetzt, geben die Gleichung

$$(6.) \qquad \frac{x^2}{a(a-u)}+\frac{y^2}{b(b-u)}+\frac{z^2}{c(c-u)}=0,$$

aus welcher die Halbachsen der Ellipse gefunden werden, in welcher das Ellipsoid von einer Ebene geschnitten wird, die der Berührungsebene im Punkte xyz parallel ist.

Die quadratische Gleichung (6.) hat zwei Wurzeln, die mit u und v bezeichnet werden mögen, so dafs $\sqrt{u}$ und $\sqrt{v}$ die beiden gesuchten Halbaxen sind. Es findet aufser (6.) also noch die andere Gleichung statt

$$(7.) \qquad \frac{x^2}{a(a-v)}+\frac{y^2}{b(b-v)}+\frac{z^2}{c(c-v)}=0.$$

Aus den Gleichungen (6.), (7.) und (1.) können jetzt die Gröfsen $\frac{x^2}{a}$, $\frac{y^2}{b}$, $\frac{z^2}{c}$ gefunden werden, oder man kann jetzt die Coordinaten jedes Punktes des Ellipsoids durch die Gröfsen a, b, c, u, v ausdrücken.

Um die Auflösung dieser drei Gleichungen leicht zu bewerkstelligen, bedenke man, dafs wenn

$$(a-b)(a-c), \quad (b-a)(b-c), \quad (c-a)(c-b)$$

entsprechend durch

$$A, \quad B, \quad C$$

bezeichnet werden, dann die bekannten identischen Gleichungen stattfinden

$$(8.) \quad \frac{1}{aA}+\frac{1}{bB}+\frac{1}{cC}=\frac{1}{abc}$$

$$(9.) \quad \frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=0$$

$$(10.) \quad \frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}=0$$

$$(11.) \quad \frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}+\frac{c^2}{C}=1$$

$$(12.) \quad \frac{a^3}{A}+\frac{b^3}{B}+\frac{c^3}{C}=a+b+c.$$

Bezeichnet man nun noch

$$(a-u)(a-v), \quad (b-u)(b-v), \quad (c-u)(c-v)$$

durch

$$A', \quad B', \quad C',$$

so hat man offenbar wegen der drei Gleichungen (9.), (10.) und (11.)

$$\frac{A'}{A(a-u)}+\frac{B'}{B(b-u)}+\frac{C'}{C(c-u)}=0$$

$$\frac{A'}{A(a-v)}+\frac{B'}{B(b-v)}+\frac{C'}{C(c-v)}=0$$

$$\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}+\frac{C'}{C}=1.$$

Vergleicht man diese drei Gleichungen mit den Gleichungen (6.), (7.) und (1.), so sieht man, dafs

$$(13.) \quad \frac{x^2}{a}=\frac{A'}{A}=\frac{(a-u)(a-v)}{(a-b)(a-c)}; \quad \frac{y^2}{b}=\frac{B'}{B}=\frac{(b-u)(b-v)}{(b-a)(b-c)};$$

$$\frac{z^2}{c}=\frac{C'}{C}=\frac{(c-u)(c-v)}{(c-a)(c-b)}$$

sein mufs, dafs also durch diese Gleichungen die Coordinaten jedes Punktes der Oberfläche des Ellipsoids durch die Halbaxen $\sqrt{u}$ und $\sqrt{v}$ des Centralschnitts bestimmt werden können, welcher der Berührungsebene im Punkte xyz parallel läuft. Da hier durch u und v nur die Quadrate von xyz gefunden werden, so entsprechen jedem u und v acht verschiedene Punkte des Ellipsoids. Es mag noch bemerkt werden, dafs die Durchschnitte der beiden Kegel (6.) und (7.) mit dem Ellipsoide (1.) die Krümmungslinien desselben bilden, welche durch die erwähnten acht Punkte gehen.

§. 2.

Die Differentiale der Gleichungen (13.) geben

$$2\partial x = -\sqrt{\frac{a}{A}}\left(\partial u\sqrt{\frac{a-v}{a-u}}+\partial v\sqrt{\frac{a-u}{a-v}}\right)$$

$$2\partial y = -\sqrt{\frac{b}{B}}\left(\partial u\sqrt{\frac{b-v}{b-u}}+\partial v\sqrt{\frac{b-u}{b-v}}\right)$$

$$2\partial z = -\sqrt{\frac{c}{C}}\left(\partial u\sqrt{\frac{c-v}{c-u}}+\partial v\sqrt{\frac{c-u}{c-v}}\right).$$

Bezeichnet man nun

$(a-u)(b-u)(c-u) = U$ und $(a-v)(b-v)(c-v) = V$,

so finden wieder die schon benutzten identischen Gleichungen statt:

$$\frac{1}{A(a-u)}+\frac{1}{B(b-u)}+\frac{1}{C(c-u)} = \frac{1}{U}$$

$$\frac{a}{A(a-u)}+\frac{b}{B(b-u)}+\frac{c}{C(c-u)} = \frac{u}{U}$$

$$\frac{a^2}{A(a-u)}+\frac{b^2}{B(b-u)}+\frac{c^2}{C(c-u)} = \frac{u^2}{U}$$

und die ähnlichen, in denen u und U durch v und V ersetzt werden müssen. Mit Hülfe dieser Gleichungen findet man sogleich

$$4(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2) = \partial u^2\left(\frac{u^2-uv}{U}\right)+\partial v^2\left(\frac{v^2-uv}{V}\right)$$

oder wenn man das Bogenelement mit ∂s bezeichnet

$$(14.)\qquad \partial s^2 = \frac{u-v}{4}\left(\frac{u\partial u^2}{U}-\frac{v\partial v^2}{V}\right).$$

Ebenso leicht ergiebt sich auch noch

$$(15.)\qquad \frac{\partial x^2}{a}+\frac{\partial y^2}{b}+\frac{\partial z^2}{c} = \frac{u-v}{4}\left(\frac{\partial u^2}{U}-\frac{\partial v^2}{V}\right),$$

und durch (8.) und (12.) gelangt man sogleich zu

$$(16.)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = \frac{uv}{abc}$$

und

$$(17.)\qquad x^2+y^2+z^2 = a+b+c-u-v.$$

§. 3.

Nach diesen Vorbereitungen kann man nun leicht die Bewegung eines Punktes auf der Oberfläche eines Ellipsoids bestimmen, der von einer Kraft $\varkappa$ nach dem Mittelpunkte desselben gezogen wird, die proportional der Entfernung wirkt.

Die Gleichung des Ellipsoids sei die Gleichung (1.), und der Widerstand desselben normal gegen seine Oberfläche werde mit λ bezeichnet. Die Bewegungsgleichungen sind dann, wenn man die Differentialquotienten in Bezug auf die Zeit t durch Accente ausdrückt

$$(18.) \qquad x'' = \frac{\lambda x}{a} + \varkappa x; \qquad y'' = \frac{\lambda y}{b} + \varkappa y; \qquad z'' = \frac{\lambda z}{c} + \varkappa z.$$

Man erhält aus ihnen sogleich

$$(19.) \qquad \frac{xx''}{a} + \frac{yy''}{b} + \frac{zz''}{c} = \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) + \varkappa\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\right).$$

Differentiirt man (1.) zweimal nach einander, so erhält man

$$(20.) \qquad \frac{xx'}{a} + \frac{yy'}{b} + \frac{zz'}{c} = 0,$$

$$(21.) \qquad \frac{xx''}{a} + \frac{yy''}{b} + \frac{zz''}{c} + \frac{x'^2}{a} + \frac{y'^2}{b} + \frac{z'^2}{c} = 0.$$

Bezeichnet man nun

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = p,$$

$$\frac{x'^2}{a} + \frac{y'^2}{b} + \frac{z'^2}{c} = q,$$

so verwandelt sich (19.) vermöge (1.) und (21.) in

$$(22.) \qquad -q = \lambda p + \varkappa,$$

ferner erhält man leicht aus (18.)

$$2\left(\frac{x'x''}{a} + \frac{y'y''}{b} + \frac{z'z''}{c}\right) = 2\lambda\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}\right) + 2\varkappa\left(\frac{xx'}{a} + \frac{yy'}{b} + \frac{zz'}{c}\right).$$

Diese Gleichung ist aber wegen (20.) und der Werthe von p und q nichts anderes als

$$(23.) \qquad q' = \lambda p'.$$

Eliminirt man λ aus (22.) und (23.), so gelangt man zu

$$\frac{p'}{p} + \frac{q'}{q+\varkappa} = 0,$$

von welcher Gleichung

$$(24.) \qquad p(q+\varkappa) = A$$

das Integral ist, mit der Constanten A.

Aus den Gleichungen (18.) bildet man sich noch, mit Rücksicht auf (20.), leicht die Gleichung

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = \varkappa(xx' + yy' + zz'),$$

deren Integral

$$(25.) \qquad x'^2+y'^2+z'^2 = z(x^2+y^2+z^2)+B$$

ist.

Benutzt man nun die Gleichungen (14.) und (17.), so gewinnt die letzte Gleichung, wenn man die Constante $z(a+b+c)+B$ durch C bezeichnet, die Gestalt

$$(26.) \qquad \frac{u-v}{4}\left(\frac{uu'^2}{U}-\frac{vv'^2}{V}\right) = C-z(u+v).$$

Nach (16.) ist p nichts anderes als $\frac{uv}{abc}$, und nach (15.) ist

$$q = \frac{u-v}{4}\left(\frac{u'^2}{U}-\frac{v'^2}{V}\right).$$

Daher ergiebt sich aus (24.), wenn man $abcA$ durch D bezeichnet,

$$(27.) \qquad \frac{u-v}{4}\left(\frac{u'^2}{U}-\frac{v'^2}{V}\right) = \frac{D}{uv}-z.$$

Der Quotient der beiden letzten Gleichungen führt endlich, wenn man ∂t^2 forthebt, zu der Differential-Gleichung der Bahn des bewegten Punktes

$$\left(\frac{D}{uv}-z\right)\left(\frac{u\partial u^2}{U}-\frac{v\partial v^2}{V}\right) = (C-z(u+v))\left(\frac{\partial u^2}{U}-\frac{\partial v^2}{V}\right),$$

oder zu

$$(28.) \qquad \frac{\sqrt{u}\,\partial u}{\sqrt{U(D-Cu+zu^2)}} = \pm\frac{\sqrt{v}\,\partial v}{\sqrt{V(D-Cv+zv^2)}},$$

in welcher die Veränderlichen gesondert erscheinen. Vertauscht man u mit $\frac{1}{r}$ und v mit $\frac{1}{s}$, so nimmt diese Gleichung die Gestalt an

$$(29.) \qquad \frac{\partial r}{\sqrt{(ar-1)(br-1)(cr-1)(Dr^2-Cr+z)}} = \pm\frac{\partial s}{\sqrt{(as-1)(bs-1)(cs-1)(Ds^2-Cs+z)}}.$$

Wenn nun v als Function von u bestimmt ist, so läfst sich aus den Gleichungen (26.) oder (27.) auch t als Function von u ausdrücken und somit für jede Zeit t das zugehörige u berechnen.

§. 4

Man kann jetzt auch die Bewegung eines Punktes auf dem Ellipsoide bestimmen, wenn ihn ein widerstehendes Mittel hemmt. Der Widerstand habe die Form $\alpha v+\beta v^2$, wo v die Geschwindigkeit und α constant oder eine Function der Zeit sein kann, eben so wie β als eine Constante oder als Function des Bogens s betrachtet werden kann.

Die Bewegungsgleichungen sind dann

$$x'' = \frac{\lambda x}{a} + (\alpha v + \beta v^2)\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\lambda x}{a} + (\alpha + \beta v)\frac{\partial x}{\partial t}$$

oder wenn man der Kürze wegen $\alpha + \beta v = \varkappa$ setzt

$$(30.) \quad x'' = \frac{\lambda x}{a} + \varkappa x'; \quad y'' = \frac{\lambda y}{b} + \varkappa y'; \quad z'' = \frac{\lambda z}{c} + \varkappa z'.$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man mit Benutzung der früheren Zeichen

$$2\left(\frac{x'x''}{a} + \frac{y'y''}{b} + \frac{z'z''}{c}\right) = 2\lambda\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}\right) + 2\varkappa\left(\frac{x'^2}{a} + \frac{y'^2}{b} + \frac{z'^2}{c}\right)$$

oder

$$(31.) \quad q' = \lambda p' + 2\varkappa q,$$

ferner

$$\frac{xx''}{a} + \frac{yy''}{b} + \frac{zz''}{c} = \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) + \varkappa\left(\frac{xx'}{a} + \frac{yy'}{b} + \frac{zz'}{c}\right)$$

oder

$$(32.) \quad -q = \lambda p.$$

Eliminirt man λ aus diesen beiden Gleichungen, so gelangt man zu

$$\frac{p'}{p} + \frac{q'}{q} = 2\varkappa,$$

oder

$$(33.) \quad \frac{\partial p}{p} + \frac{\partial q}{q} = 2\varkappa\partial t = 2(\alpha\partial t + \beta v\partial t) = 2(\alpha\partial t + \beta\partial s).$$

Bezeichnet man nun

$$2\int\alpha\,\partial t = T \quad \text{und} \quad 2\int\beta\,\partial s = S$$

und nennt die Integrationsconstante A, so ist das Integral dieser Gleichung

$$(34.) \quad pq = Ae^{T+S}.$$

Aus (30.) gelangt man nun noch leicht zu

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = \varkappa(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

oder

$$s's'' = \varkappa s'^2$$

oder

$$(35.) \quad \frac{\partial s'}{s'} = \varkappa\partial t.$$

Von dieser Gleichung ist das Integral

$$(36.) \quad s' = Be^{\frac{1}{2}(T+S)},$$

wenn B die Integrationsconstante bedeutet.

Das Quadrat dieser Gleichung giebt

$$\frac{s'^2}{B^2} = e^{T+S} = \frac{pq}{A},$$

oder

$$\frac{A}{B^2}\,\frac{u-v}{4}\left(\frac{uu'^2}{U} - \frac{vv'^2}{V}\right) = \frac{uv}{abc}\cdot\frac{u-v}{4}\left(\frac{u'^2}{U} - \frac{v'^2}{V}\right).$$

Aus dieser Gleichung hebt sich ∂t fort und, für $\frac{abcA}{B^2} = C$, gelangt man von ihr aus sogleich zu der Differentialgleichung der Bahn, der Curve

$$(37.) \qquad \frac{\sqrt{u}\,\partial u}{\sqrt{U(u-C)}} = \pm\frac{\sqrt{v}\,\partial v}{\sqrt{V(v-C)}},$$

welche natürlich zugleich die kürzeste Linie auf dem Ellipsoide darstellt.

Die Auflösungen dieser Aufgaben, die ich seit einigen Jahren besitze, theilte ich vor längerer Zeit Herrn Dr. ***Borchardt*** mit, der mir in einem Collegien-Hefte des verewigten ***Jacobi*** die erste derselben gelöst zeigte; da aber die zweite sich dort nicht behandelt findet, auch die Methoden ***Jacobi***'s zur Lösung zu gelangen ganz andere als die meinigen sein sollen, so veröffentliche ich jetzt meine Auflösungen, um dem Wunsche einiger wissenschaftlichen Freunde zu genügen.

Berlin, 1857.

32.

Lagrange's Umkehrungsformel.

(Von Herrn *E. Heine.*)

In ähnlicher Art, wie ich neulich (S. 68 dieses Bandes) die Variationsrechnung zur Umformung eines analytischen Ausdrucks anwendete, kann man sie benutzen, die Gleichungen des *D'Alembert*'schen Princips in die *Lagrange*'sche Form zu verwandeln, in der nur die *unabhängigen* Variabeln vorkommen, — eben so endlich, wie ich hier zeigen will, um *Lagrange*'s Umkehrungsformel abzuleiten.

Ich setze

$$(1.) \qquad y - hf(y) = x,$$

und bezeichne durch $\psi(x) = z$ irgend eine Function von x, ihre Differentialquotienten nach x durch z', z'' etc. Dann ist

$$\psi(x - hf(x)) = z - \frac{h}{1} z' f(x) + \frac{h^2}{1.2} z'' f(x)^2 - \cdots$$

also, wenn $\varphi(x)$ eine beliebige Function von x vorstellt

$$(2.) \int_a^b \varphi(x)\psi(x - hf(x))\,dx = \int_a^b \varphi(x)\left(z - \frac{h}{1} z' f(x) + \frac{h^2}{1.2} z'' f(x)^2 - \cdots\right)dx.$$

Schreibe ich in dem Integral auf der linken Seite y für x und reducire vermittelst (1.), so wird es

$$= \int_a^b \varphi(y)\psi(x)\,dy = \int_\alpha^\beta z\varphi(y)\frac{dy}{dx}\,dx,$$

$$\text{wo} \qquad \alpha = a - hf(a), \qquad \beta = b - hf(b).$$

Ist h klein genug, so fällt wenigstens ein Theil des Intervalles von a bis b und von α bis β zusammen. Variire ich nun nach z so, dafs in dem gemeinsamen Intervalle δz beliebig, aufserhalb desselben $\delta z = 0$ ist, bemerke ferner, dafs die Variation der rechten Seite von (2.) sich als Summe eines Theiles, welcher frei vom Integral ist, und von

$$\int_a^b B\,\delta z\,dx$$

darstellen läfst, wo

$$B = \varphi(x) + \frac{h}{1}\frac{d(\varphi(x)f(x))}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2(\varphi(x)f(x)^2)}{dx^2} + \cdots$$

gesetzt wird, so ist, in diesem Intervalle integrirt,

$$\int \delta z\,\varphi(y)\frac{dy}{dx}\,dx = \int B\,\delta z\,dx, \quad \text{also}$$

$$(3.) \qquad \varphi(y)\frac{dy}{dx} = B,$$

welches die *Lagrange*'sche Formel ist.

Halle, den 20. Juli 1857.